現代の数学と数理解析 データ構造の数理 レポート問題

2015 年 5 月 29 日

復習

- 集合 X、元 $l \in X$、関数 $n : X^2 \to X$ の組 (X, l, n) を**全二分木代数**と呼ぶ。
- 1) T を有限全二分木の集合、2) l_T を葉のみからなる全二分木、3) 関数 $n_T : T \times T \to T$ を、$t, u \in T$ に対し、t を左、u を右に持つ節点からなる木を返すものとする。以降、全二分木代数 (T, l_T, n_T) を $\mathcal{T}$ おく。
- $\mathcal{X} = (X, l_X, n_X)$ と $\mathcal{Y} = (Y, l_Y, n_Y)$ を全二分木代数とする。以下を満たす関数 $f : X \to Y$ を (全二分木代数) **準同型**と呼び、$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ と書く。

$$f(l_X) = l_Y, \quad f(n_X(x, y)) = n_Y(f(x), f(y))$$

- ($\mathcal{T}$ の初期性) 任意の全二分木代数 $\mathcal{X}$ に対し唯一の準同型 $h_{\mathcal{X}} : \mathcal{T} \to \mathcal{X}$ が存在する。
- 集合 A, B の直積と直和を以下で与える。

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}, \quad A + B = \{(0, a) \mid a \in A\} \cup \{(1, b) \mid b \in B\}$$

  また、元が一つのみからなる集合 $\mathbf{1}$ を固定し、$*$ をその元とする。

問題 1. 木で表現される情報の例を三つ挙げ、それぞれにおいて具体的な木を一つ図示せよ。

問題 2. 全二分木代数 $\mathcal{C} = (\mathbf{N}, l, n)$ に対して唯一存在する $\mathcal{T}$ からの準同型 $h_{\mathcal{C}} : \mathcal{T} \to \mathcal{C}$ が以下を満たす時、自然数 $l \in \mathbf{N}$ と関数 $n : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ はどのようになっているか?

1. $h_{\mathcal{C}}(t) =$ 全二分木 t の中にある葉の数
2. $h_{\mathcal{C}}(t) =$ 全二分木 t の高さ

問題 3. 全二分木代数 $\mathcal{R} = (T, L_R, N_R)$ に対して唯一存在する $\mathcal{T}$ からの準同型 $h_{\mathcal{R}} : \mathcal{T} \to \mathcal{R}$ が以下を満す時、木 $L_R \in T$ と関数 $N_R : T^2 \to T$ はどのようになっているか?

- $h_{\mathcal{R}}(t) = t$ の左右を反転した全二分木

準備　集合 X, Y に対し、X と Y の間に全単射が存在することを $X \sim Y$ と書こう。集合の直積と直和は以下を満たす。

$$\mathbf{1} \times X \sim X, \quad X \times Y \sim Y \times X, \quad X \times (Y \times Z) \sim (X \times Y) \times Z$$

$$\emptyset + X \sim X, \quad X + Y \sim Y + X, \quad X + (Y + Z) \sim (X + Y) + Z$$

$$X \times (Y + Z) \sim (X \times Y) + (X \times Z)$$

また、$X^0 = \mathbf{1}, X^1 = X, X^n = X^{n-1} \times X$ と定義する。

問題 4. 授業で紹介した $T \sim \mathbf{1} + T^2$ と上で挙げた全単射のみを用いて、$T^7 \sim T$ を示せ。(ヒント:

$$T^7 \sim T^8 + T^6 \sim T^8 + (T^7 + T^5) \sim \quad \cdots \quad \sim T^6 + T^2 \sim \quad \cdots \quad \sim T$$

を示す。)