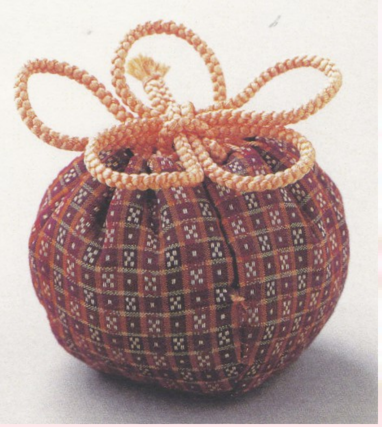
結び目の数学
白眉センター・数理解析研究所
鈴木咲衣





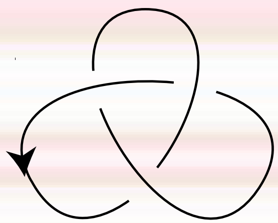

2015年5月15日＠京都大学数理解析研究所

目次

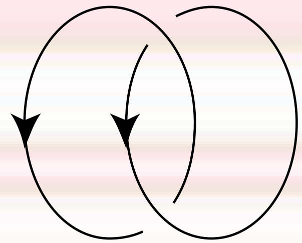
１．結び目って？

1．結び目って？

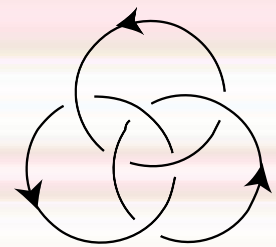
結び目：３次元空間の中にうめ込まれた円周



三葉結び目



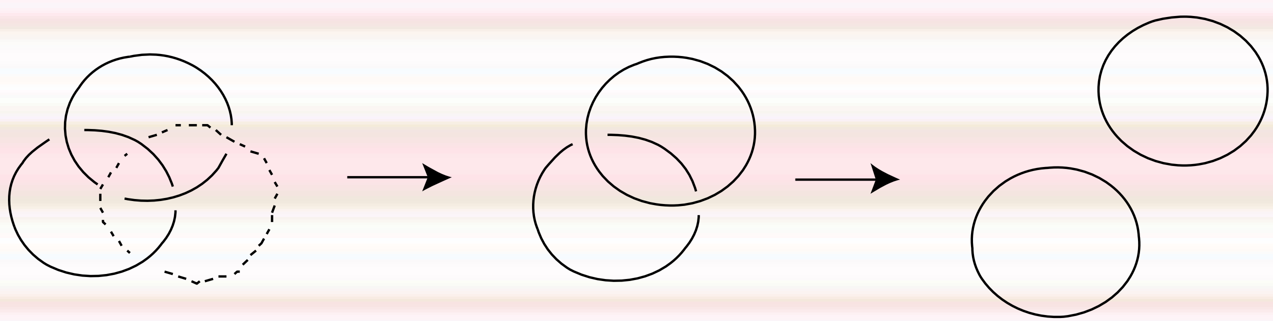
ホップ絡み目



ボロミアン絡み目

ボロミアン絡み目…どの２つの円周も絡んでいない！

（3つの円周が集まって初めて絡む.）

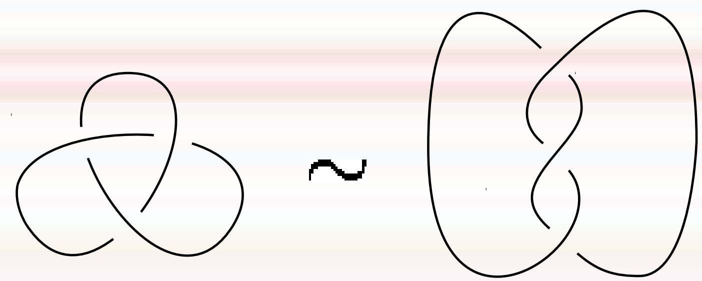


よりみち

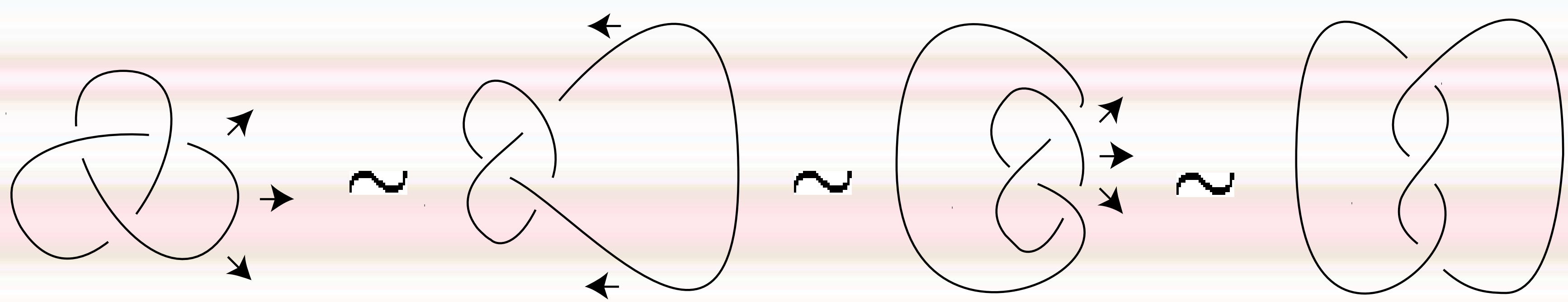
1．結び目って？

結び目KとK'が連続的に移りあうとき, K～K'と表す.

＜例＞

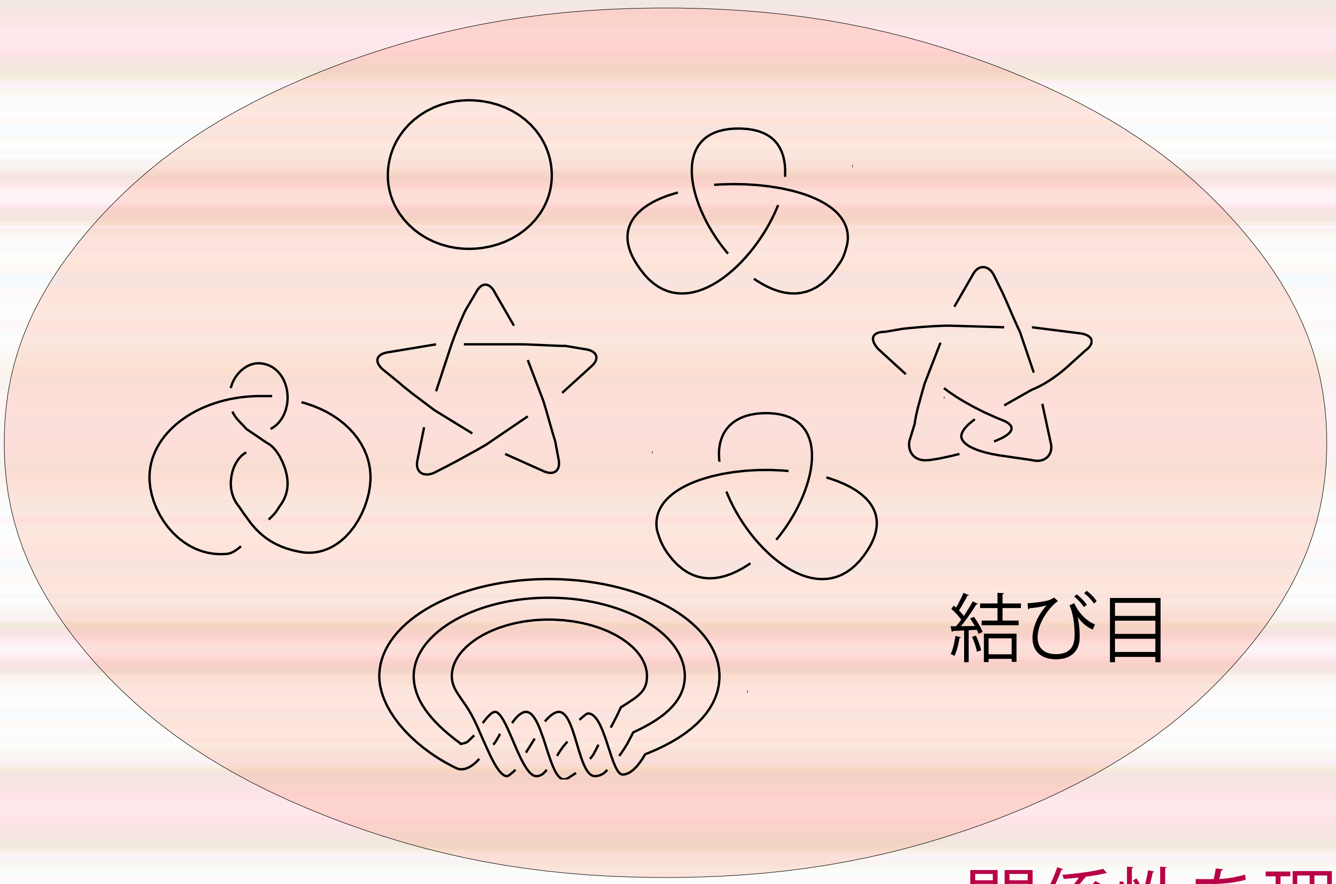


みえますか？



２．結び目で数学してみる

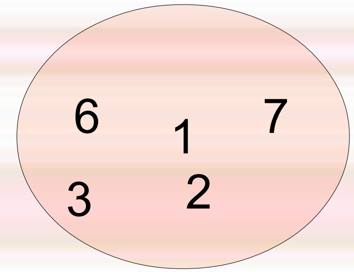
Q：結び目の集まりはどんなもの？



関係性を理解したい。

2．結び目で数学してみる

(例)　自然数 N＝{ 1, 2, 3 , , , }



かけ算：2×3＝6, 4×7=28, , , ,

2つの自然数 a, bに対して, もうひとつの自然数 a×bを対応させる操作

(2, 3)→ 6=2×3,　 (4,7)→28=4×7,

であって、次を満たすもの。

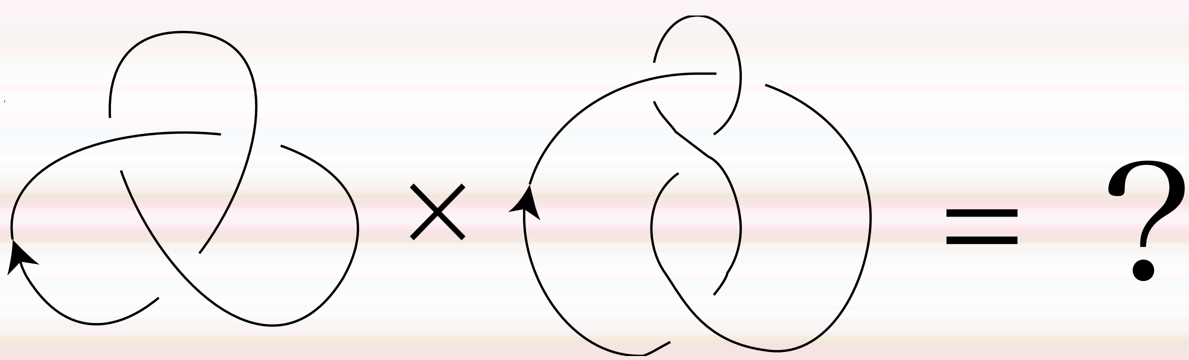
★ 1．結合律：(a×b)×c=a×(b×c)

★ 2．単位律：1×n=n=n×1

結び目で「かけ算」してみる！

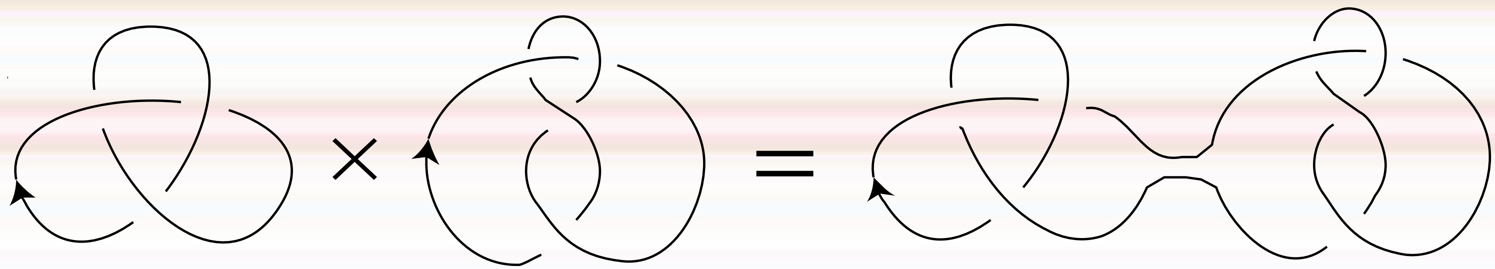
自然数の場合…2つの自然数 a, bに対して, もうひとつの自然数a×bを対応させる操作

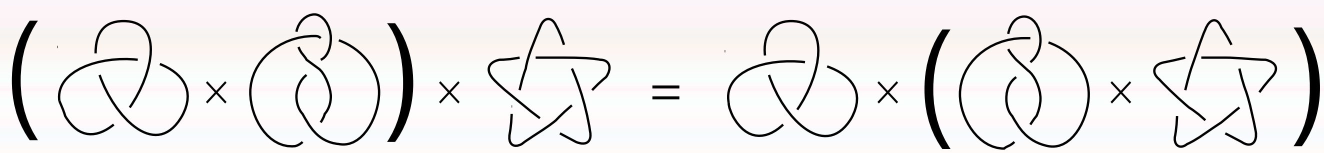
＋ 結合律、単位律

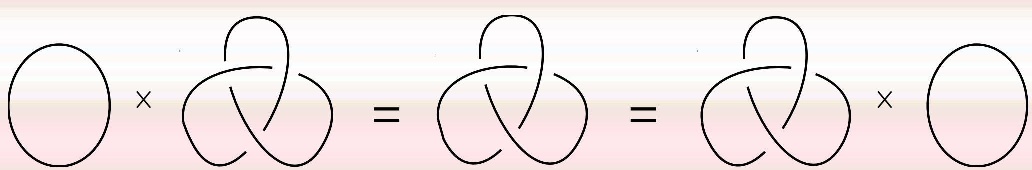


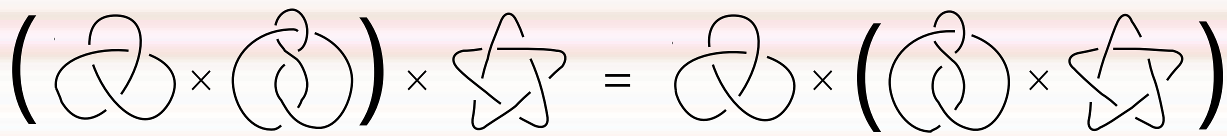
2．結び目で数学してみる

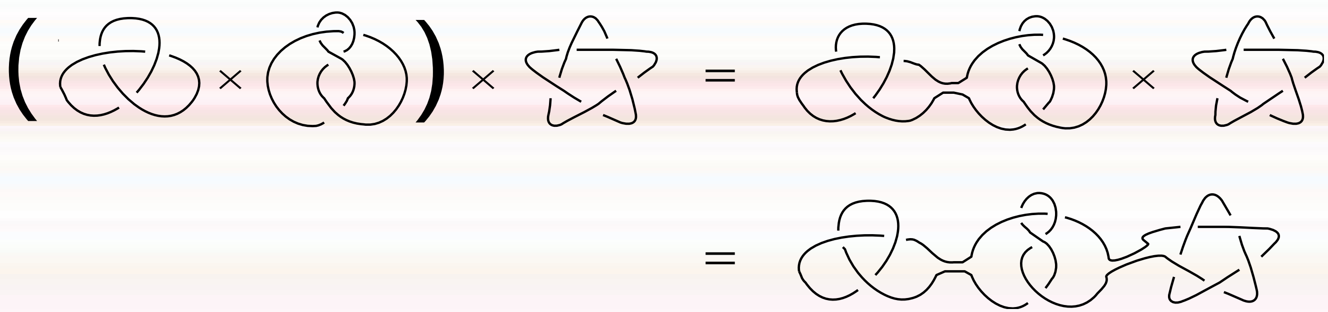
＜ひとつの例＞

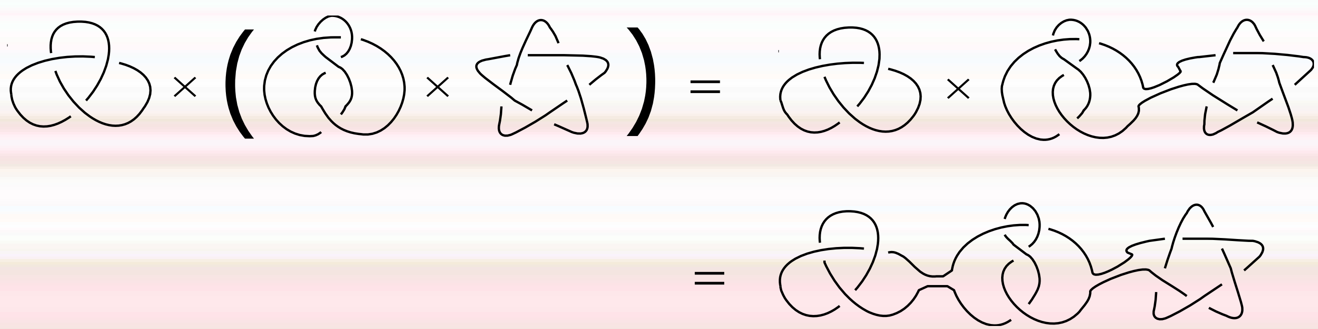


結合律  ?

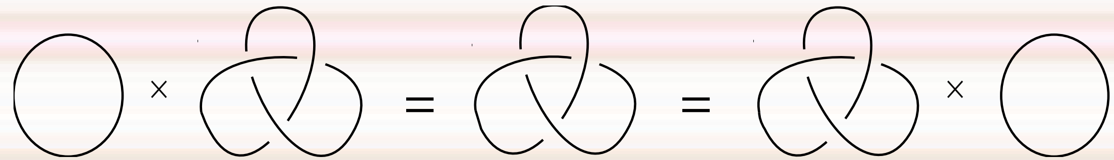
単位律  ?

結合律： ？

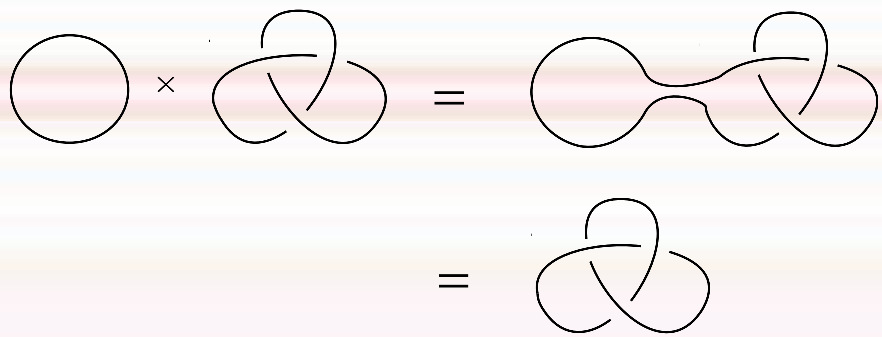


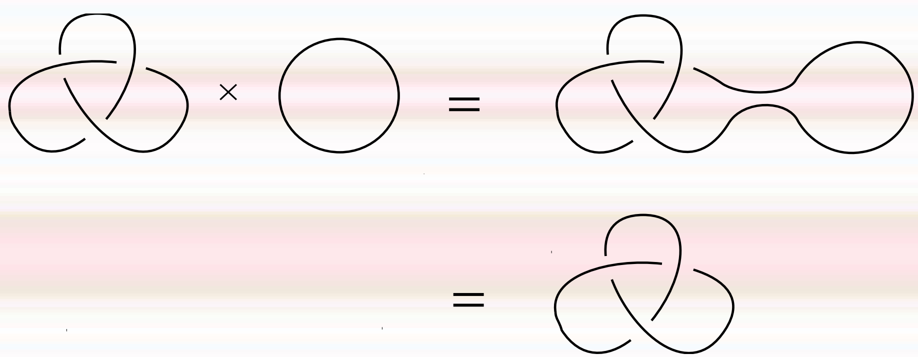


単位律：



？



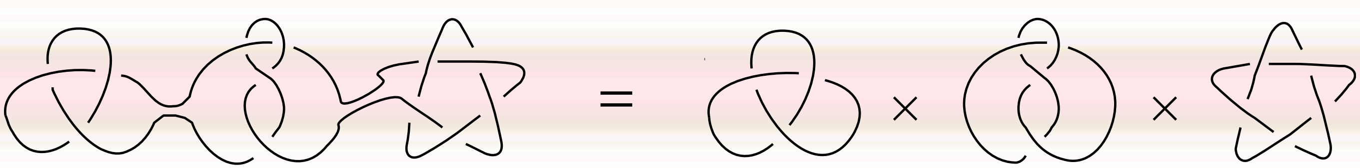


結び目の集まりにかけ算が定義できた！

素因数分解の定理

素数：1 とそれ自身以外に約数を持たない自然数
素因数分解：6=2×3, 8=2×2×2　（一意的）

素な結び目：○とそれ自身以外に分解できない結び目
素な結び目への分解：一意的

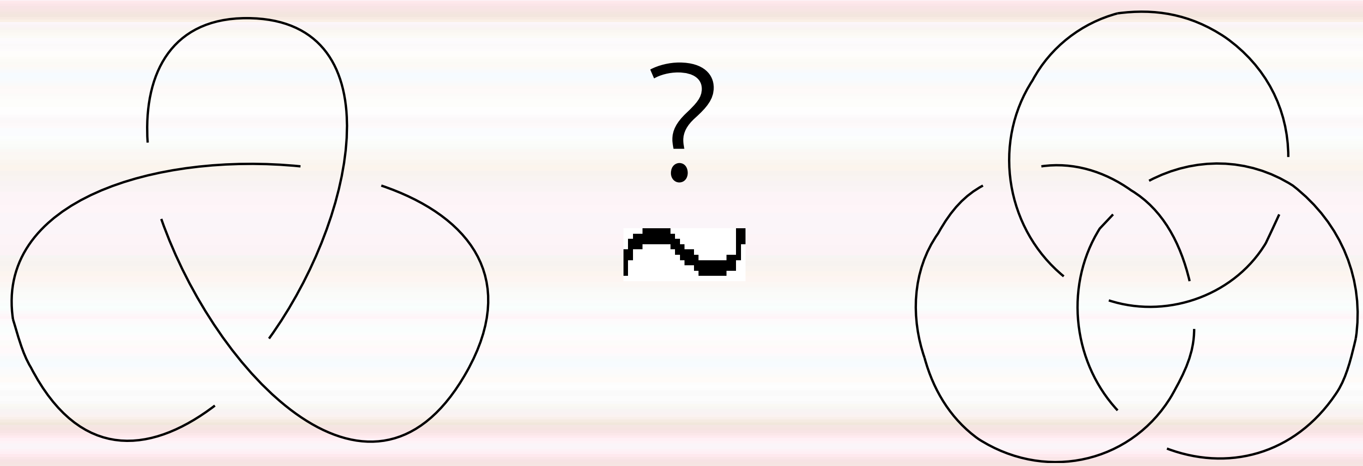


よりみち

３．結び目の不変量を計算してみよう

３．結び目の不変量を計算してみよう

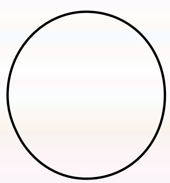
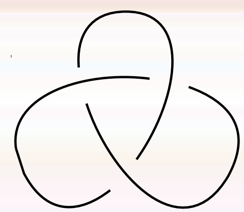
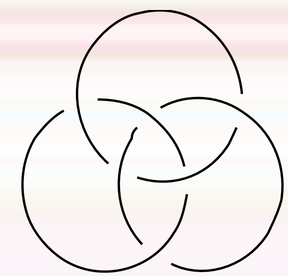
次の２つの絡み目は同じ？

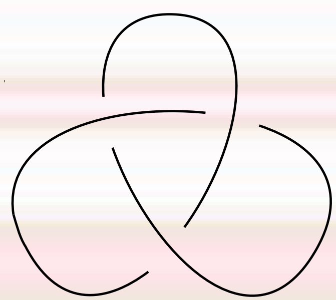
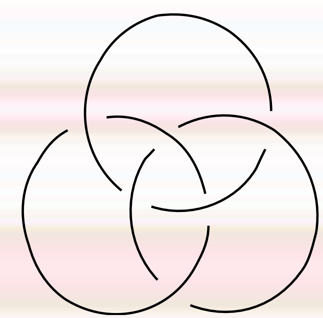


3．結び目の不変量を計算してみよう

成分の数…連続的変形で変わらない，不変な量！

- 成分数 s: {絡み目} → {1, 2, 3, 4, , , }

s()=1, s()=1, s()=3

 $\not\sim$ 

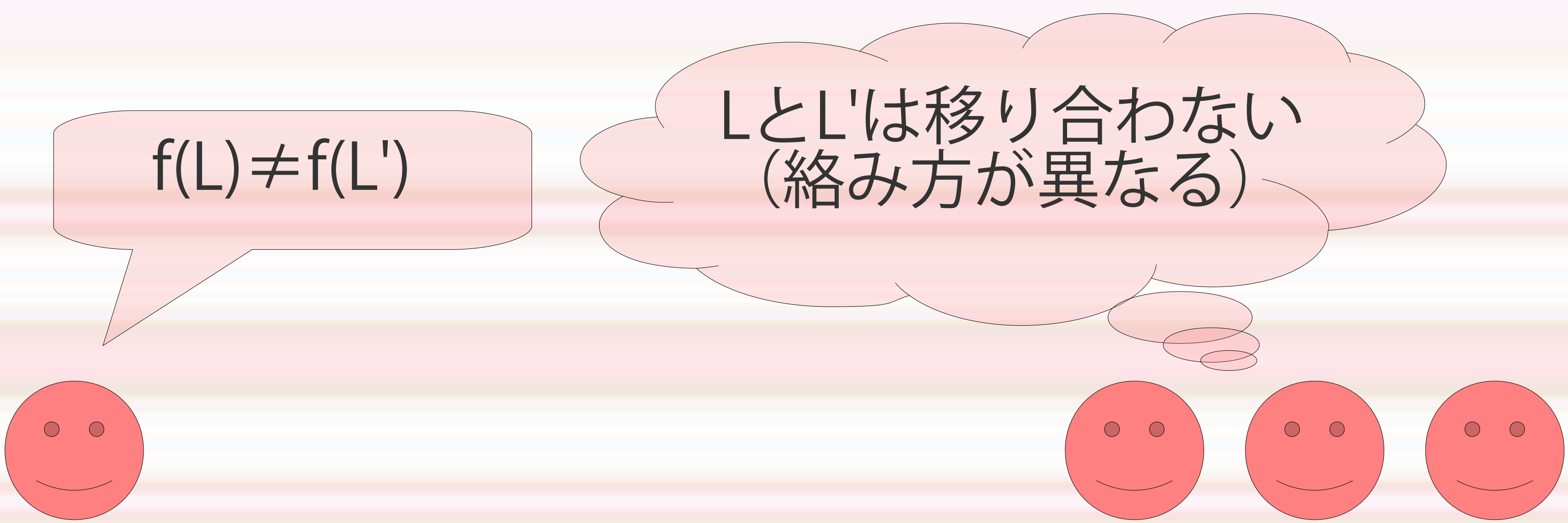
3．結び目の不変量を計算してみよう

不変量：写像 f: {絡み目} → G（集合, 整数や多項式など）

(すなわち, 絡み目Lに対して値f(L)を決めるもの)

であって, L～L'ならば f(L)=f(L') となるもの.

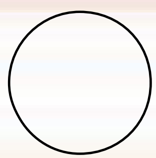
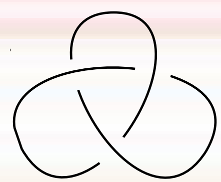
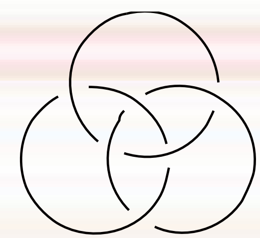
「絡まる」現象を記述するための言語



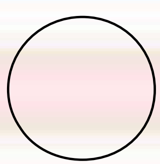
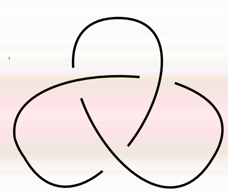
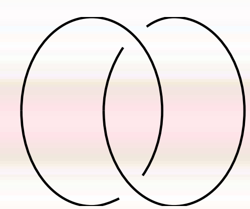
３．結び目の不変量を計算してみよう

〈不変量の例〉

- 成分数 s: {絡み目} → {1, 2, 3, 4, , , }

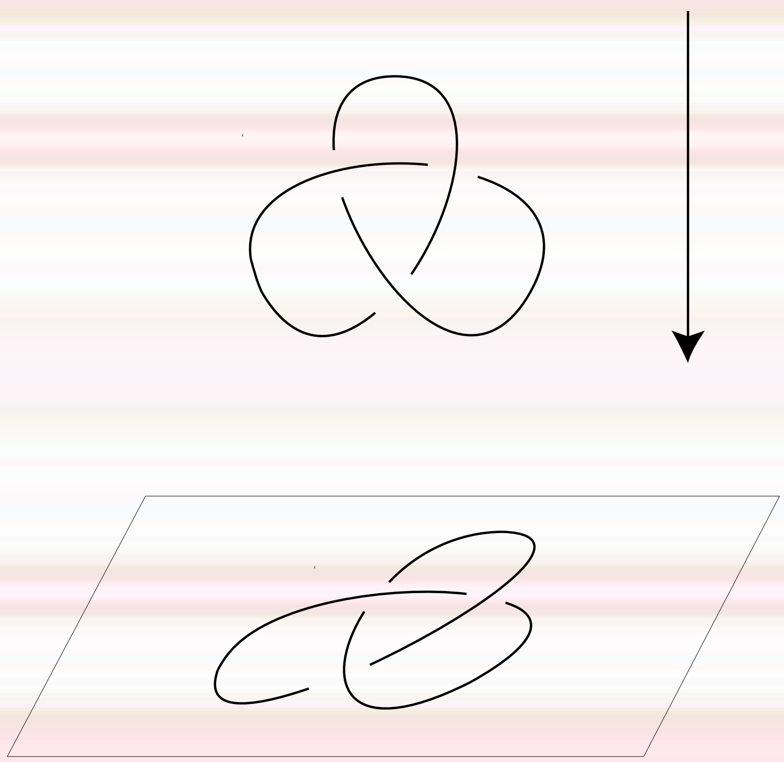
s()=1, s()=1, s()=3

- 最小交点数 m: {絡み目} → {0, 1, 2, 3, 4, , , }

m()=0, m()=3, m()=2

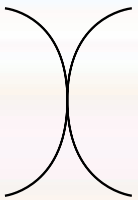
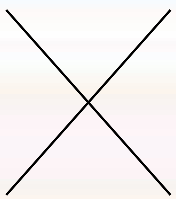
３．結び目の不変量を計算してみよう

絡み目の図式…絡み目の射影図＋交差の情報

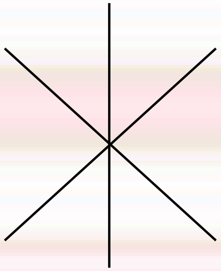


ただし…

１．交差は横断的

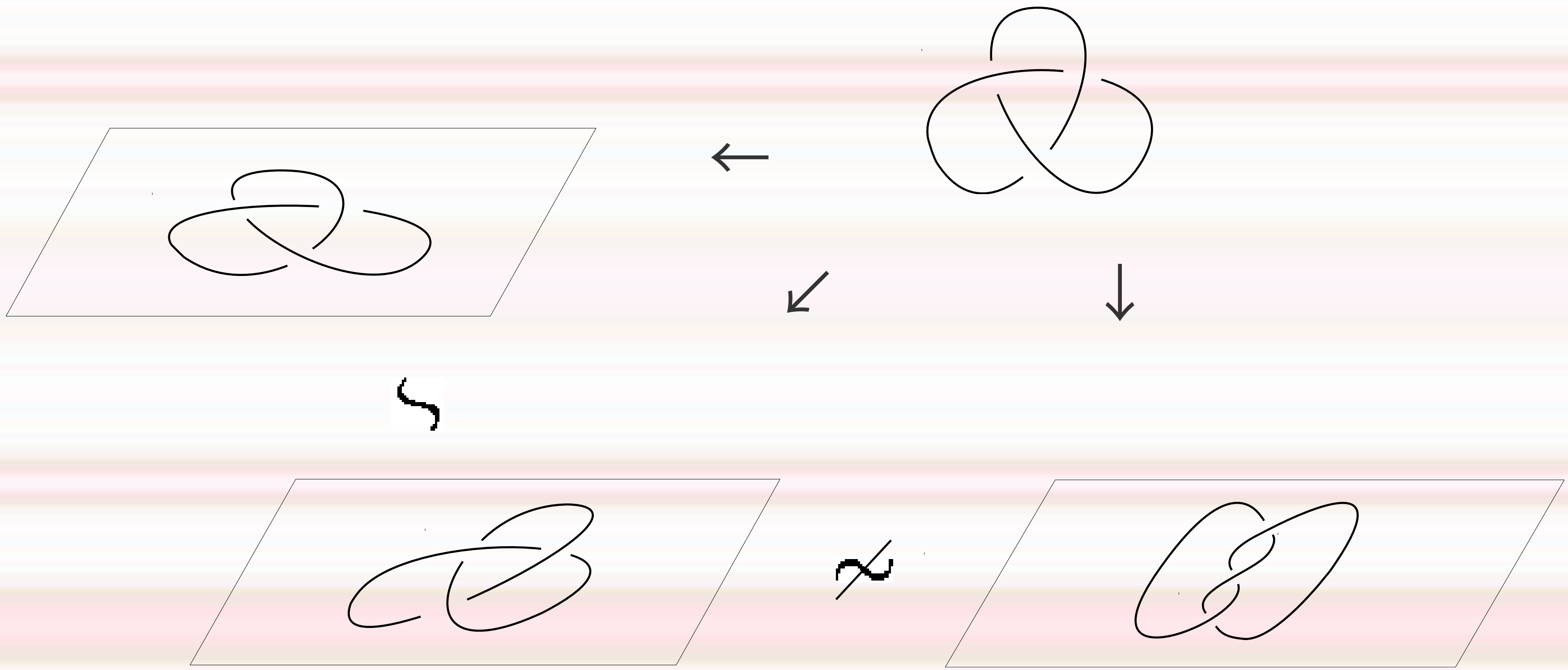
×…  ○… 

２．３重点以上はなし

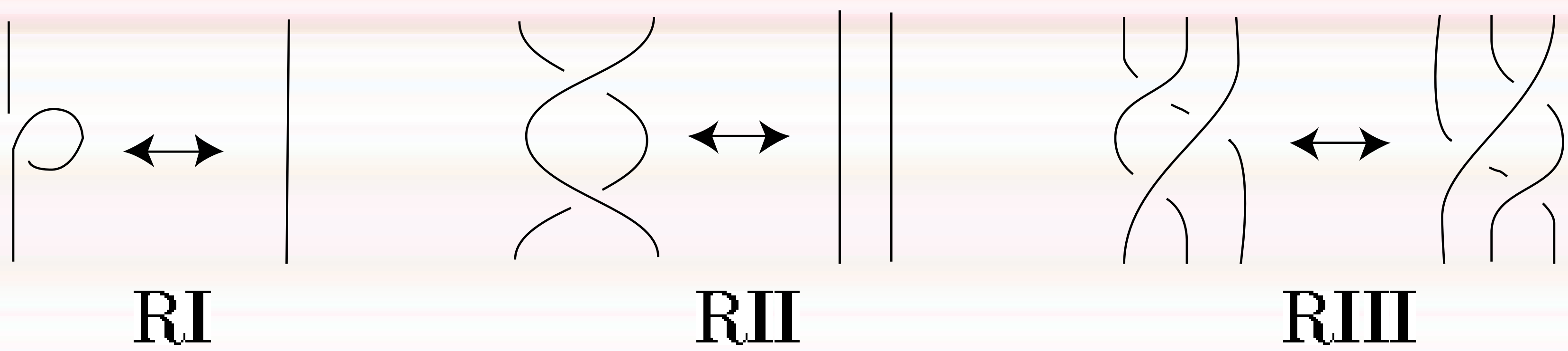
×… 

３．結び目の不変量を計算してみよう

図式DとD'が連続的に移りあうとき, D～D'と表す.



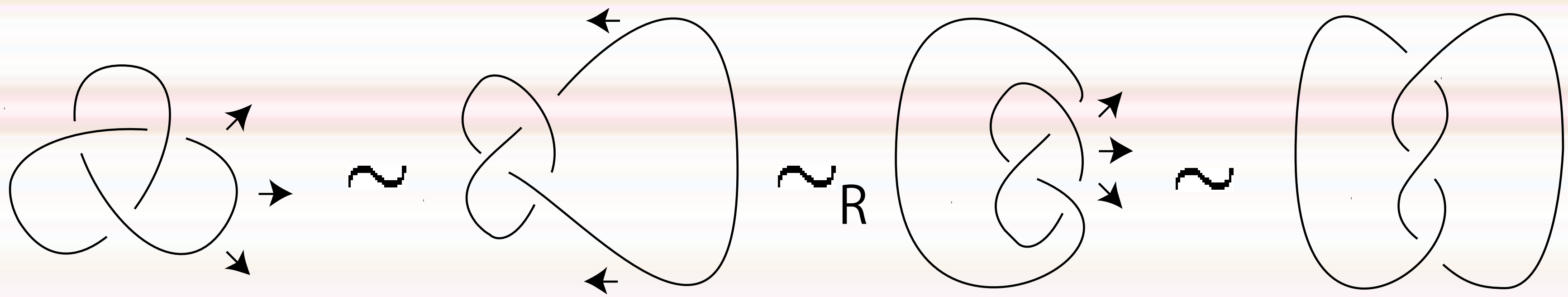
ライデマイスター(*Reidemeister*)変形



図式DとD'がRI, RII, RIIIの繰り返しと連続変形で移り合うとき，$D \sim_R D'$と表す.

3．結び目の不変量を計算してみよう

例えば…



1対1

$\{$絡み目$\} / \sim \quad \Longleftrightarrow \quad \{$絡み目図式$\} / \sim_R$

3．結び目の不変量を計算してみよう

図式を用いて不変量を作る

不変量 f：{絡み目}/∼　→　{0, 1, 2, 3, , , }

1対1

{絡み目図式}/ $\sim_R$

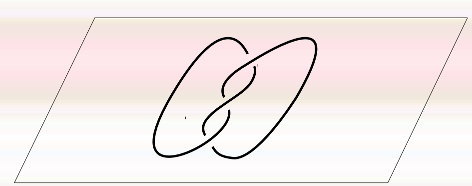
ここを作れば良い！

図式を用いて結び目の不変量を作る（レシピ）

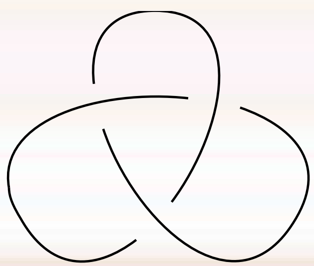
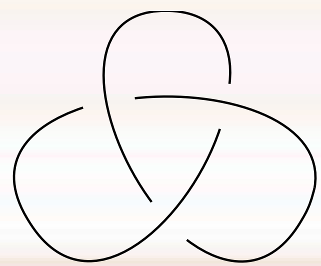
1．絡み目図式に対して値を対応させる.

f() = a

2．同じ絡み目を表す図式D,D'に対して同じ値になることを確認する.　（RI,RII,RIIIでの不変性）

f() = a　　f() = a

ジョーンズ多項式！

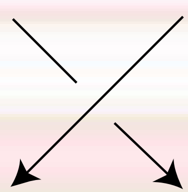
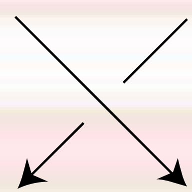
 $\not\sim$  の証明

3．結び目の不変量を計算してみよう

ジョーンズ多項式　$J(K) \in Z[A, A^{-1}]$

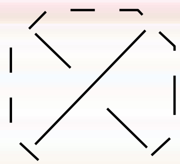
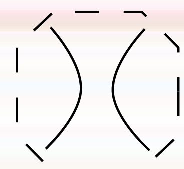
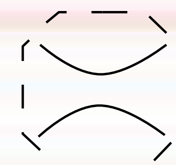
ステップ1．カウフマン括弧 $\langle D \rangle \in Z[A, A^{-1}]$

ステップ2．　$J(K) = (-A^{3})^{-w(D)} \langle D \rangle$

$w(D) =$  の数 －  の数

3．結び目の不変量を計算してみよう

1．カウフマン括弧 $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$

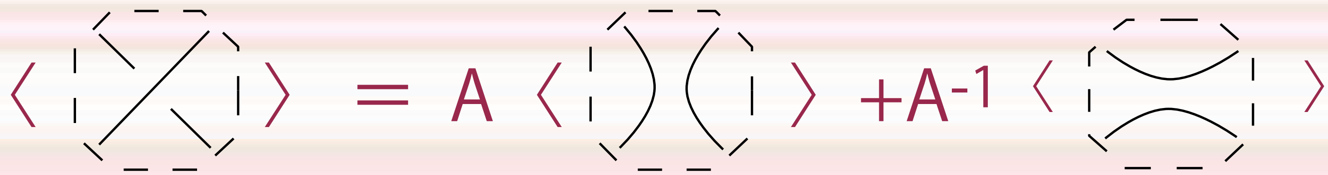
ルール1：〈  〉 ＝ A〈  〉 $+A^{-1}$〈  〉

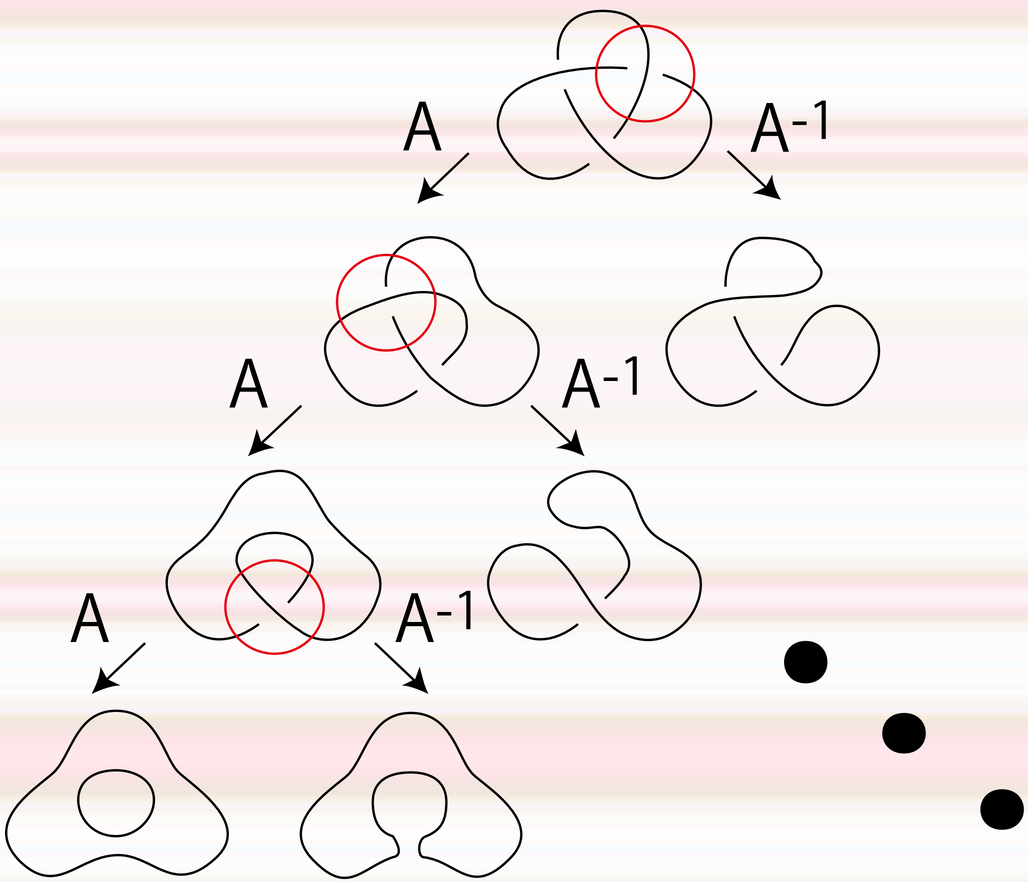
ルール2：$\langle D \bigcirc \rangle = -(A^{2}+A^{-2}) \langle D \rangle$

ルール3：$\langle \bigcirc \rangle = 1$

3．結び目の不変量を計算してみよう

ルール１：





3．結び目の不変量を計算してみよう

ルール２：$\langle D \bigcirc \rangle = -(A^2+A^{-2})\langle D \rangle$

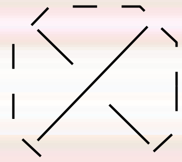
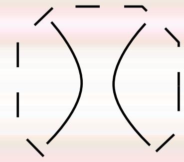
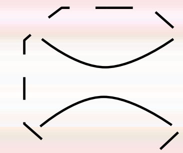
$\langle \bigcirc \rangle = 1$

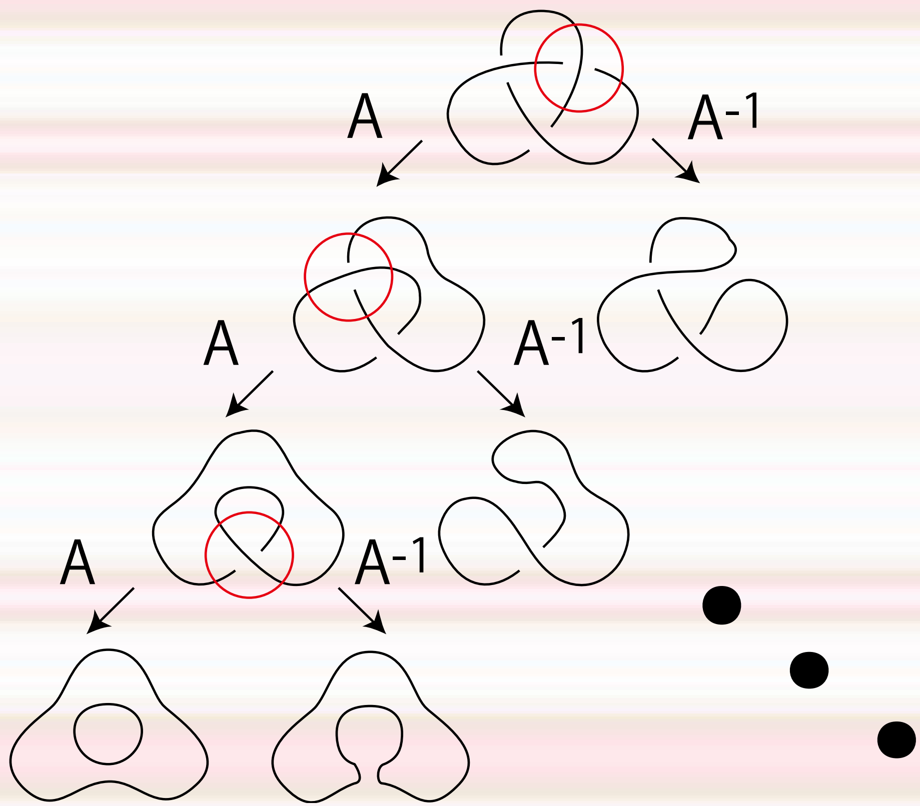
$\langle \bigcirc\bigcirc \rangle = -(A^2+A^{-2})\langle \bigcirc \rangle = -(A^2+A^{-2})$

$\langle \bigcirc\bigcirc\bigcirc \rangle = -(A^2+A^{-2})\langle \bigcirc\bigcirc \rangle = (A^2+A^{-2})^2$

$\langle \underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{n} \rangle = (-1)^{n-1}(A^2+A^{-2})^{n-1}$

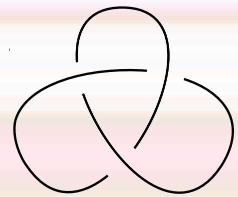
３．結び目の不変量を計算してみよう

ルール２： ⟨  ⟩ ＝ A ⟨  ⟩ +A^{-1} ⟨  ⟩



$-A^3(A^2+A^{-2})+A+\cdots$

3．結び目の不変量を計算してみよう

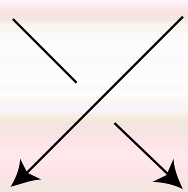
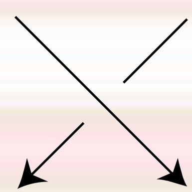
カウフマン括弧 ⟨  ⟩ を計算してみよう

3．結び目の不変量を計算してみよう

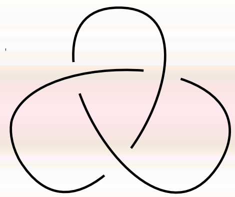
ジョーンズ多項式　$J(K) \in Z[A, A^{-1}]$

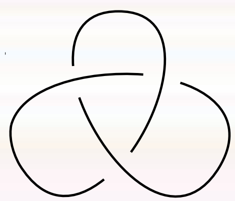
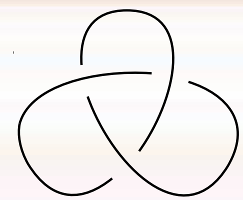
ステップ1．カウフマン括弧 $\langle D \rangle \in Z[A, A^{-1}]$

ステップ2．　$J(K) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$

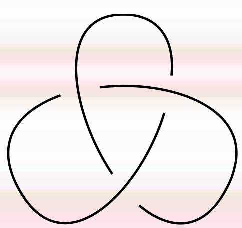
$w(D) =$  の数 ー  の数

3．結び目の不変量を計算してみよう

W () $= 3$

J () $= (-A^{3})^{-3}$ $\langle$  $\rangle$

$= -A^{9}(-A^{5}-A^{-3}+A^{-7})$

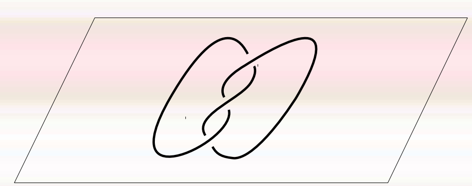
J () $= -A^{-9}(-A^{-5}-A^{3}+A^{7})$

図式を用いて結び目の不変量を作る（レシピ）

1．絡み目図式に対して値を対応させる.

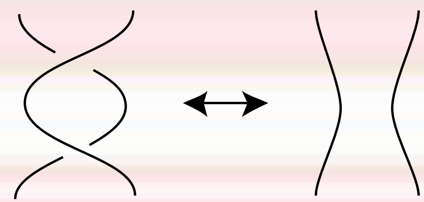
 → J()

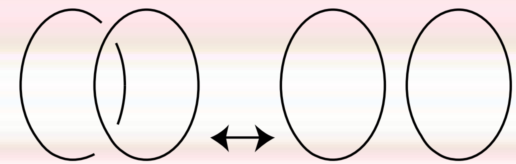
2．同じ絡み目を表す図式 D, D'に対して同じ値になることを確認する.

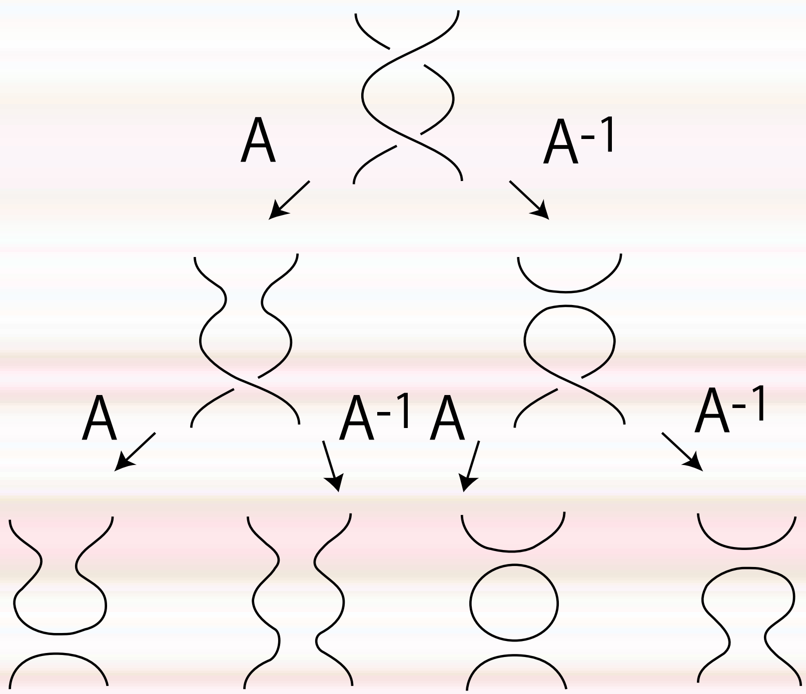
J() $\overset{?}{=}$ J()

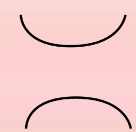
ジョーンズ多項式は結び目の不変量か？

例えば…



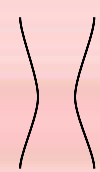






の係数＝

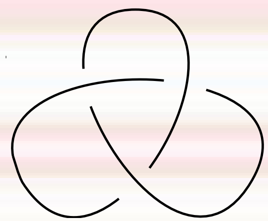
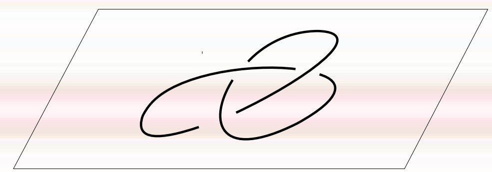
$A^2-(A^2+A^{-2})-A^{-2}=0$



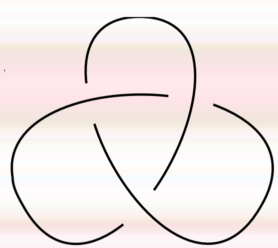
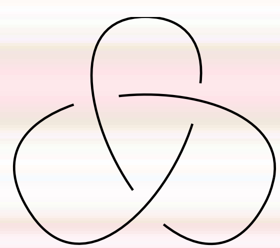
の係数 ＝1

3．結び目の不変量を計算してみよう

不変量の完成！

J() := J()

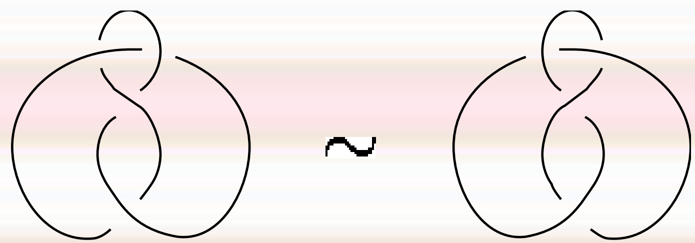
どの図式を持ってきても大丈夫！

→  $\not\sim$  を示すことができた！

３．最近の研究 ―その先へ―

4．最近の研究　ーその先へー

- 1849年…J.B.Listingのメモ (「渦巻き原子説」？)



- 1930年代…K. Reidemeister, H. Seifert, J. W. Alexander
- 1940年代後半〜1970年代…R. H. Fox, 本間龍雄, 樹下眞一, 杉本邦男, 河内明夫, (基礎理論の確立)
- 1980年代…V. F. R. Jones, 村上順, 大槻知忠, 葉廣和夫, (量子力学, 統計学, 物理学など様々な分野との結びつきながら大きく発展中！！)

４．最近の研究　ーその先へー

- ～1980年代（基礎の確立）

　１．同型問題（２つの絡み目があるとき, それらが同型な絡み目であるかどうかを判定せよ）

　２．分類問題（すべての絡み目の表を作成せよ）

- 1980年代～（量子不変量の登場）

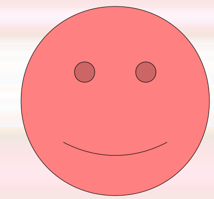
　１．絡み目の集まり全体の構造を知りたい

　２．低次元トポロジーへの応用

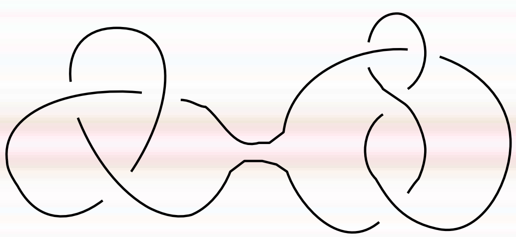
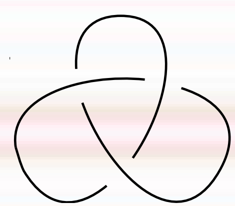
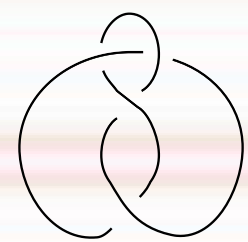
（分類問題はほぼ終わったという人も…）

４．最近の研究　ーその先へー

例えば



「ジョーンズ多項式はかけ算を保つ」

J() = J () J ()

素な結び目の判定、かけ算の構造の研究、、、

レポート問題

1．絡み目の不変量の定義を述べよ.

2．ジョーンズ多項式が不変量であることを示せ.

どうもありがとうございました