

最小木問題 と 最短巡回路問題

—離散数学の “解ける” 問題 と “解けない” 問題—

高澤 兼二郎

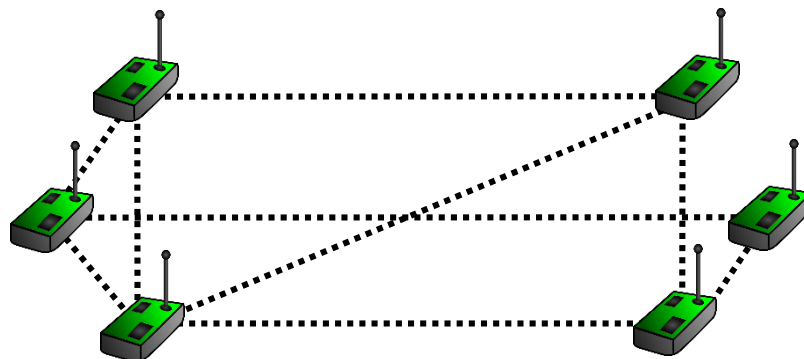
京都大学 数理解析研究所

全学共通科目「現代の数学と数理解析」

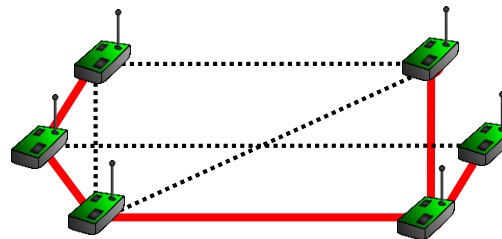
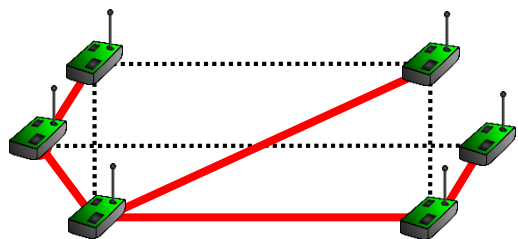
2015 年 4 月 17 日

ネットワーク上の最適化問題 その1

ネットワーク



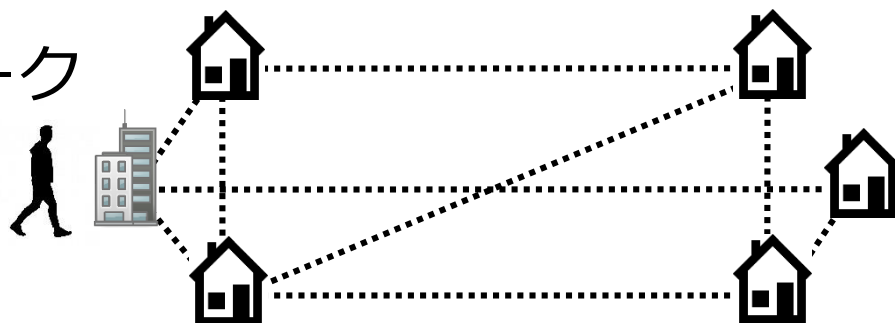
問題: すべてのセンサー間で通信ができるためには
どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？



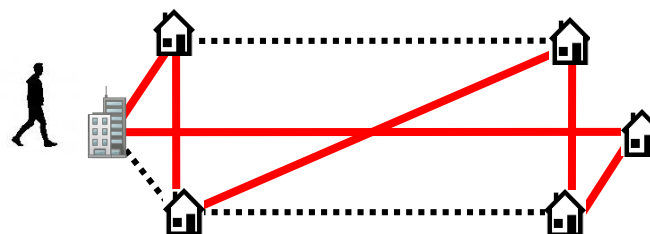
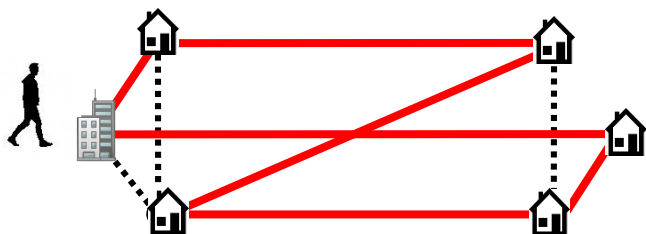
- すべてのセンサーを連結させる
- 閉路は不要

ネットワーク上の最適化問題 その2

ネットワーク



問題: すべての地点を一度ずつ通り元の地点に戻ってくる
最短の経路は?

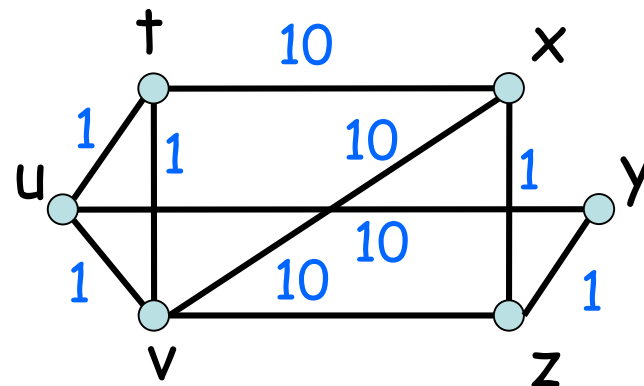


- イン트로ダクション
- 離散最適化問題
 - 問題の定式化
 - 離散最適化問題を「解く」とは？
- 最小全域木問題
 - Prim のアルゴリズム
 - Kruskal のアルゴリズム
- 巡回セールスマン問題
 - Christofides のアルゴリズム

最小全域木問題の定義

グラフ $G = (V, E)$

- 頂点集合 $V = \{t, u, v, x, y, z\}$
- 辺集合 $E = \{tu, tv, tx, uv, uy, vx, vz, xz, yz\}$



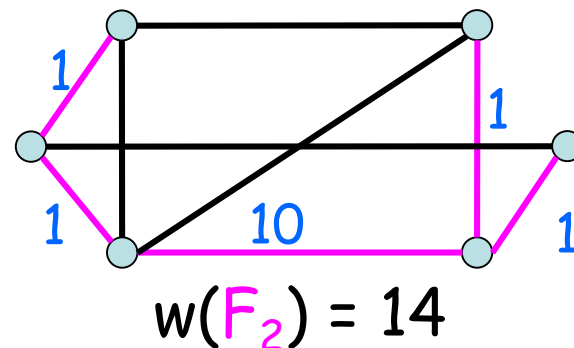
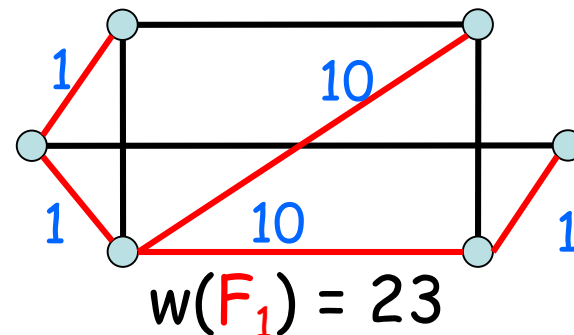
辺重み $w: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

- $w(tu) = 1, w(tx) = 10, \dots$

定義

辺部分集合 $F \subseteq E$ が **全域木**

- ⇔ {
- 任意の2頂点間に道が存在する
 - 閉路を含まない
- }



最小全域木問題

重み $w(F) = \sum_{e \in F} w(e)$ 最小の
全域木を求めよ

巡回セールスマン問題の定義

グラフ $G = (V, E)$

- 頂点集合 $V = \{t, u, v, x, y, z\}$
- 辺集合 $E = \{tu, tv, tx, uv, uy, vx, vz, xz, yz\}$

辺重み $w: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

- $w(tu) = 1, w(tx) = 10, \dots$

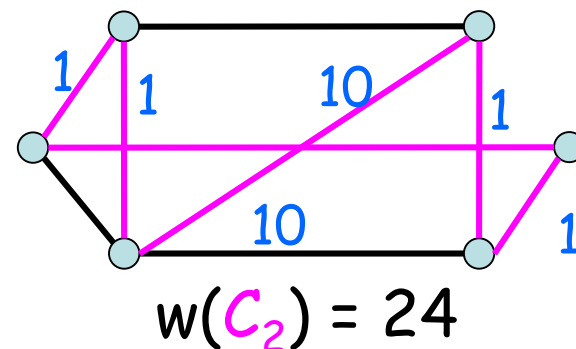
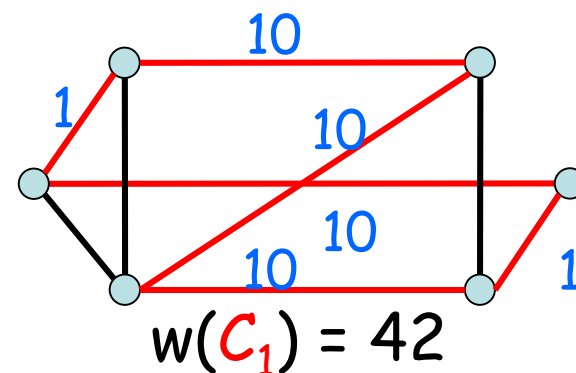
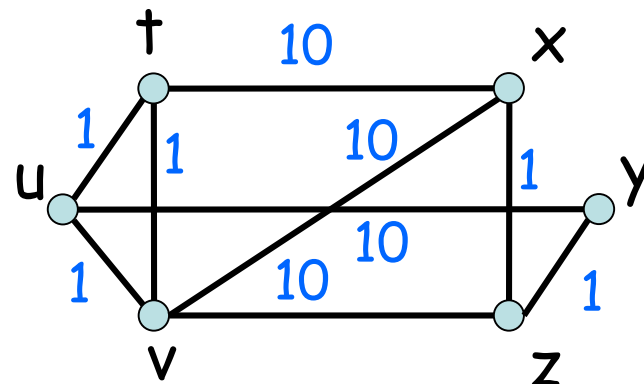
定義

辺部分集合 $C \subseteq E$ が **ハミルトン閉路**

↔ 全頂点を丁度 1 回通る閉路

巡回セールスマン問題

重み $w(C) = \sum_{e \in C} w(e)$ 最小の
ハミルトン閉路を求めよ



離散最適化問題を“解く”とは？

最小全域木問題

重み $w(F) = \sum_{e \in F} w(e)$ 最小の
全域木を求めよ

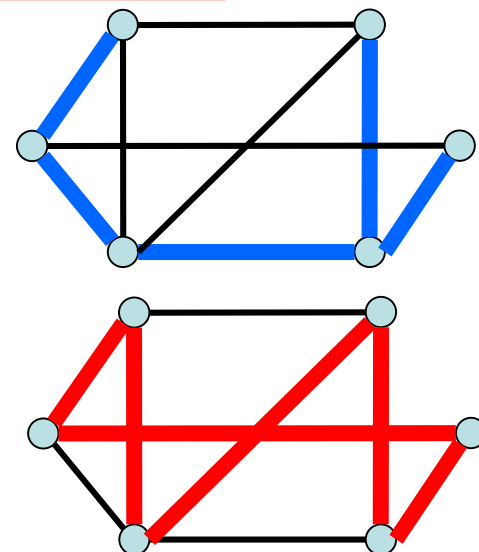
巡回セールスマン問題

重み $w(C) = \sum_{e \in C} w(e)$ 最小の
ハミルトン閉路を求めよ

計算機科学者の認識:

- 最小全域木問題: 解ける!!
- 巡回セールスマン問題: 解けない...

(と予想されている)



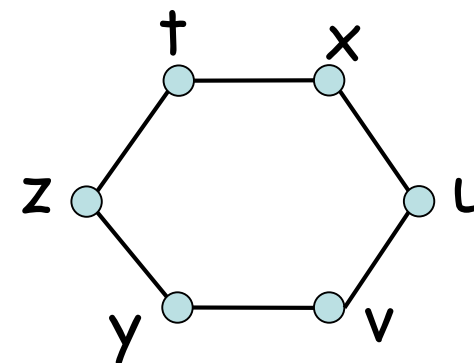
(*^o^*) 「ハミルトン閉路の個数は有限だから・・・」

(*^o^*) 「コンピュータでしらみつぶしをするんだ！」

しらみつぶしをすると…？

➤ ハミルトン閉路 ≡ 円順列, 数珠順列

➔ $\frac{(n-1)!}{2}$ 通り調べればよい ($n = |V|$)



	$\frac{(n-1)!}{2}$	計算時間
$n = 6$	60	0.000000006 秒
$n = 10$	181440	0.00018144 秒
$n = 20$	6×10^{16}	6×10^7 秒 = 70 日
$n = 33$	131565418466846765083609006080000000	

毎秒 10^9 回の演算ができるコンピュータ

$\div 1.3 \times 10^{35}$

400京年

1962年, 1万ドルの懸賞問題

$(*^{\circ}*) \rightarrow (\bullet \blacktriangle \bullet)$

「解く」といえる手間はどれくらい？

	$n!$	2^n	n^3
$n = 10$	0.0001 秒	0.000001 秒	0.000001 秒
$n = 20$	70 日	0.01 秒	0.00002 秒
$n = 50$	(>_<)	13 日	0.0001 秒
$n = 100$	(>_<)	40 兆年	0.001 秒

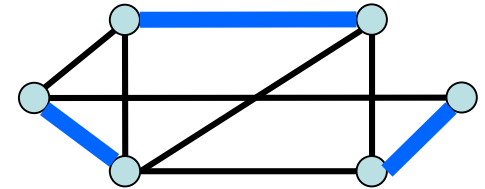
➤ $n^{\blacksquare}$ 回の演算: 現実的な計算時間

“良い” アルゴリズム
(多項式時間アルゴリズム)

➤ 多項式時間アルゴリズムが存在する問題: クラス P
例: 最小全域木問題

➤ クラス P : 多項式時間で解が見つけれられる問題のクラス

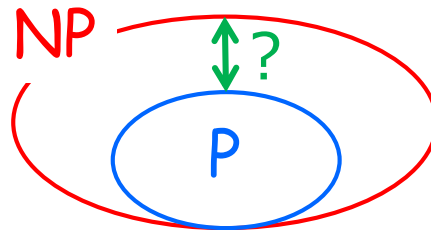
- 最小全域木問題
- 最小重み完全マッチング問題



➤ クラス NP : 多項式時間で解の検証ができる問題のクラス

- 長さが 40 以下のハミルトン閉路はあるか？
➔ 巡回セールスマン問題: クラスNPに属する

✓ $P \subseteq NP$



$P \neq NP$ 問題: クラス P と NP は等しいか否か??

➤ 100万ドルの懸賞問題 (クレイ研究所)

- イン트로ダクション
- 離散最適化問題
 - 問題の定式化
 - 離散最適化問題を「解く」とは？
- 最小全域木問題
 - Prim のアルゴリズム
 - Kruskal のアルゴリズム
- 巡回セールスマン問題
 - Christofides のアルゴリズム

最小全域木問題

グラフ $G = (V, E)$

辺重み $w: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

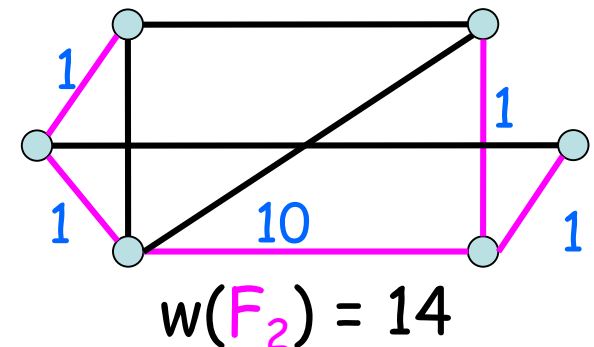
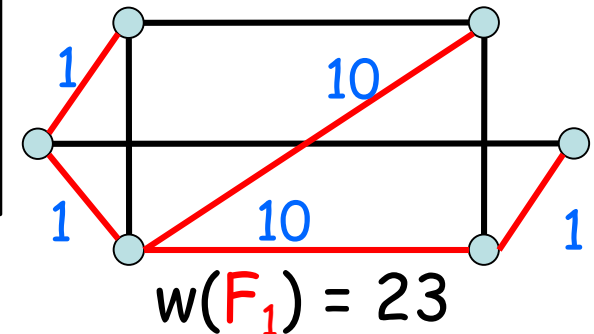
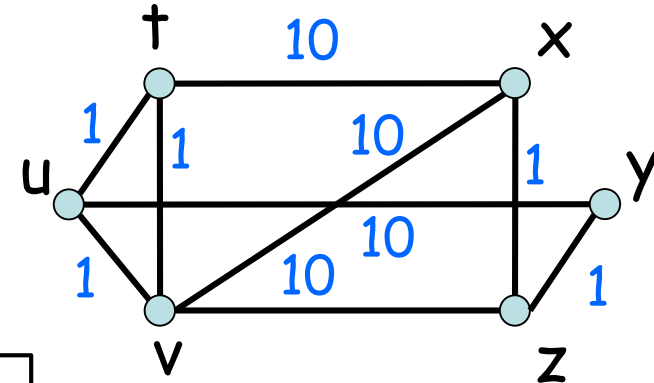
定義

辺部分集合 $F \subseteq E$ が **全域木**

- $\iff$ $\left\{ \begin{array}{l} \blacktriangleright \text{ 任意の 2 頂点間に道が存在する} \\ \blacktriangleright \text{ 閉路を含まない} \end{array} \right.$

最小全域木問題

重み $w(F) = \sum_{e \in F} w(e)$ 最小の
全域木を求めよ



Prim のアルゴリズム

Jarník 1930 13

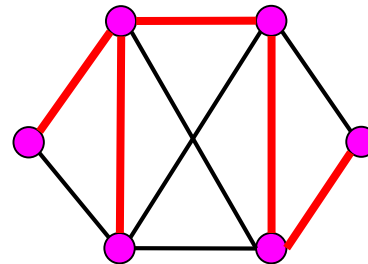
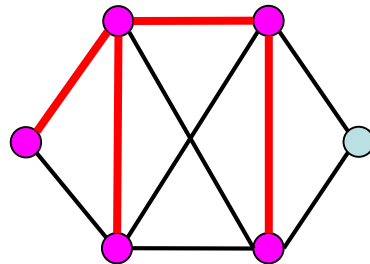
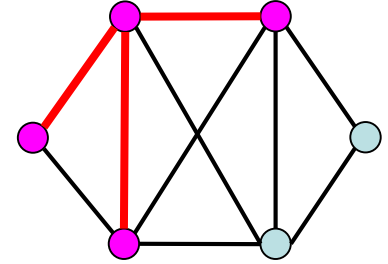
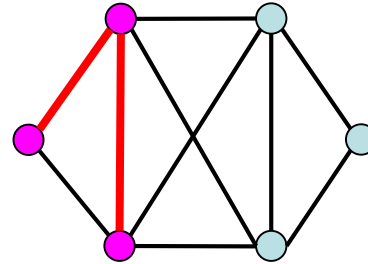
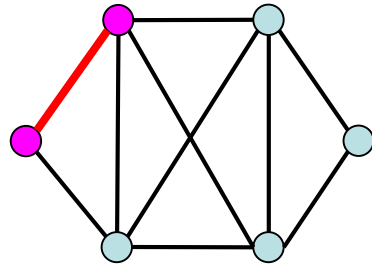
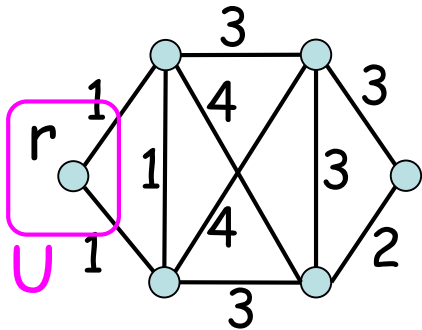
Prim 1957

Dijkstra 1959

初期化: 頂点 $r \in V$ を指定, $U := \{r\}$, $F := \emptyset$

反復: $U = V$ でなければ, 以下を実行:

- $e=uv : \min\{w(e) : e \in E, u \in U, v \in V-U\}$ を達成する辺
- $F := F \cup \{e\}$, $U := U \cup \{v\}$



$U = V$ となったので終了

Prim のアルゴリズムの正当性

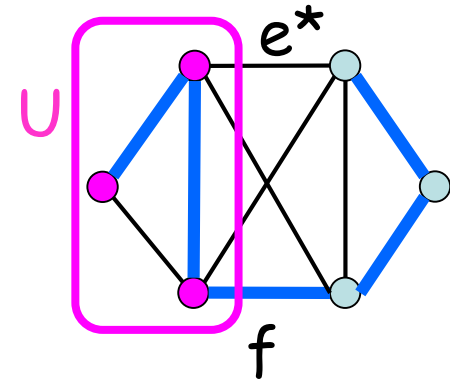
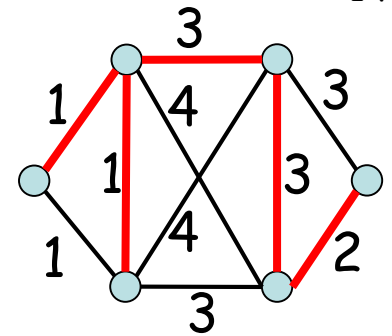
定理

Prim のアルゴリズムは最小全域木 F を出力する

【証明】 $|F|$ に関する帰納法で以下を示す:

アルゴリズム中の F に対し, 常に「 F を含む最小全域木が存在する」

- $|F| = 0$ のときは明らか
 - $|F| = k-1$ のとき成り立つとする
 - H : F を含む最小全域木
 - e^* : アルゴリズムで F に加えた辺
 - $e^* \in H$ ならば, $|F|=k$ のときも成立
 - さもなくば,
 - $F \cup \{e^*\}$ は閉路 C を含む (F は e^* の両端点間に道をもつ)
 - C は U と $V-U$ を繋ぐ e^* 以外の辺 f を含む
 - アルゴリズムのルールから $w(e^*) \leq w(f)$
 - $H \cup \{e^*\} \setminus \{f\}$ も全域木で, H は最小全域木なので $w(f) \leq w(e^*)$
 - $w(e^*) = w(f)$ なので, $H \cup \{e^*\} \setminus \{f\}$ も最小全域木
 - $F \cup \{e^*\} \subseteq H \cup \{e^*\} \setminus \{f\}$ なので, $|F| = k$ でも成立
- 【証明終】



Prim のアルゴリズムの計算時間

初期化: 頂点 $r \in V$ を指定, $U := \{r\}$, $F := \emptyset$

反復: $U = V$ でなければ, 以下を実行:

- $e=uv : \min\{w(e) : e \in E, u \in U, v \in V-U\}$ を達成する辺
- $F := F \cup \{e\}$, $U := U \cup \{v\}$

- 反復: $n - 1$ 回
- 各反復の手間: 高々 m

$$n = |V|$$

$$m = |E|$$

➔ nm に比例する時間でおさえられる

- Prim のアルゴリズムは多項式時間アルゴリズム
- 最小全域木問題はクラス P に属する

Kruskal のアルゴリズム

Kruskal 1956

16

Loberman & Weinberger 1957

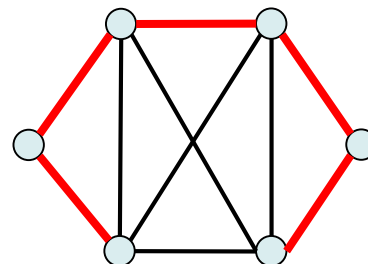
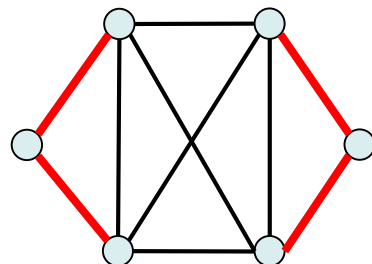
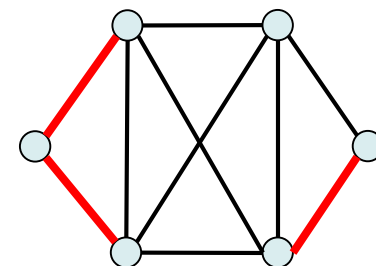
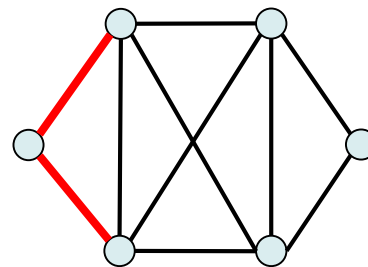
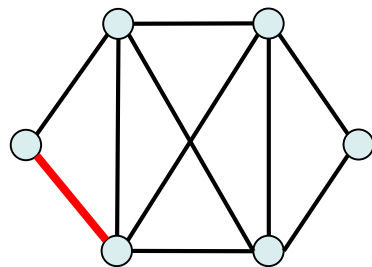
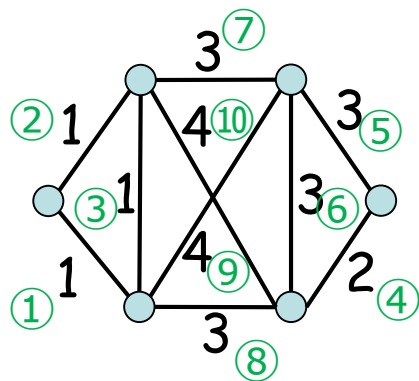
初期化: 辺を重みの小さい順にソート: $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \dots \leq w(e_m)$

$F := \emptyset, i = 0$

反復: $|F| = n - 1$ でなければ, 以下を実行:

➤ $F \cup \{e_i\}$ が閉路を含まないならば $F := F \cup \{e_i\}$

➤ $i := i+1$



➤ 正当性
➤ 計算時間
➔ レポート課題

$|F| = n-1$ となったので終了

- イン트로ダクション
- 離散最適化問題
 - 問題の定式化
 - 離散最適化問題を「解く」とは？
- 最小全域木問題
 - Prim のアルゴリズム
 - Kruskal のアルゴリズム
- 巡回セールスマン問題
 - Christofides のアルゴリズム

巡回セールスマン問題

グラフ $G = (V, E)$

辺重み $w: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

定義

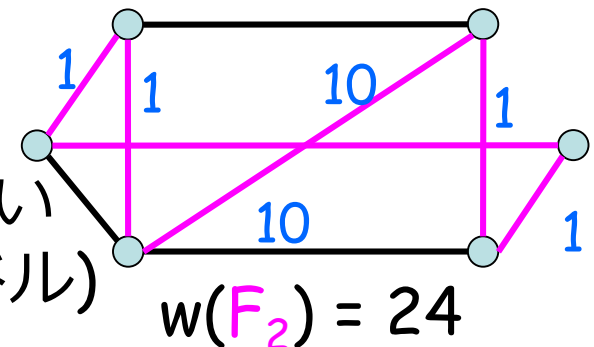
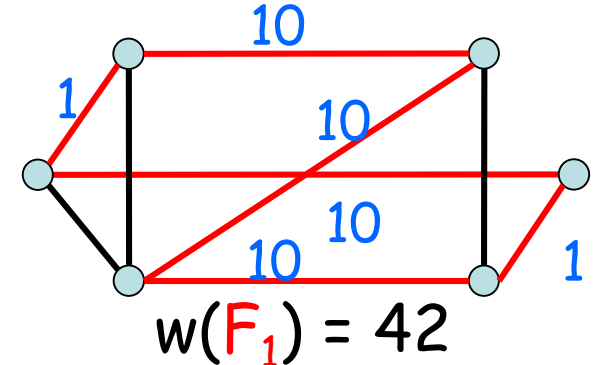
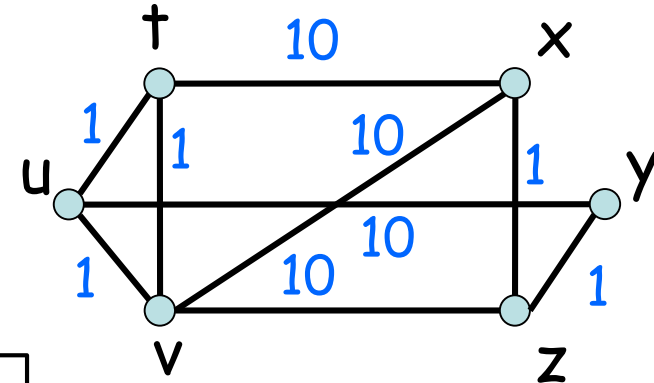
辺部分集合 $F \subseteq E$ が **ハミルトン閉路**

⇔ 全頂点を丁度 1 回通る閉路

巡回セールスマン問題

重み $w(F) = \sum_{e \in F} w(e)$ 最小の
ハミルトン閉路を求めよ

➤ 多項式時間アルゴリズムは作られていない
(作る or 作れないことを示す と 100万ドル)



- 計算時間を妥協する

$n^2 2^n$ に比例する計算時間で最適解を求める

[Bellman 1962, Held-Karp 1962]

- 最適性を妥協する

多項式時間で「ある程度良い解」を求める

α -近似アルゴリズム

最適解が F^* である問題に対し, 必ず

$$w(F) \leq \alpha \cdot w(F^*)$$

をみたす解 F を多項式時間で求めるアルゴリズム

- $\alpha \geq 1$

- α が 1 に近いほど良い

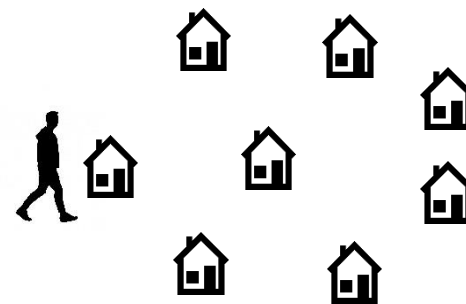
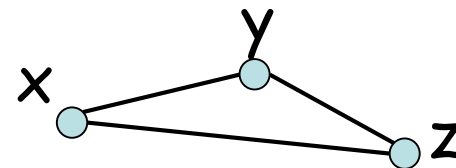
メトリック巡回セールスマン問題

グラフ $G = (V, E)$, 辺重み $w: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

メトリック巡回セールスマン問題

- $E = \{uv : u, v \in V\}$ [G は完全グラフ]
- w は **メトリック**
 - $w(xy) \geq 0$
 - $w(xy) = 0 \iff x = y$
 - $w(xz) \leq w(xy) + w(yz)$ [三角不等式]

例: ユークリッド距離



この仮定の下でも多項式時間アルゴリズムは作られていない

Christofides の 1.5-近似アルゴリズム 21

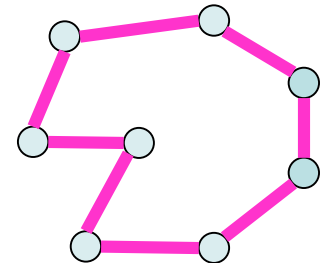
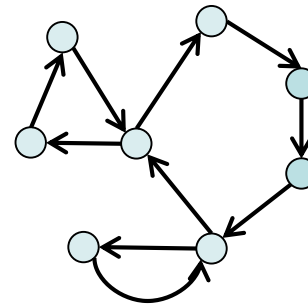
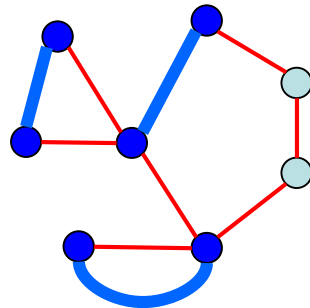
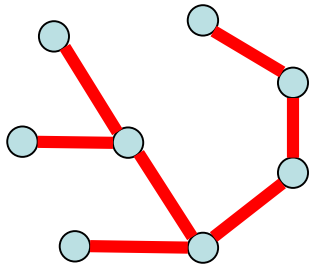
1976年

完全グラフ $G = (V, E)$, メトリック重み $w: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

ステップ1 G と w に対する最小全域木 F を求める

ステップ2 $T \subseteq V$: F の辺が奇数本接続している頂点の集合
 T を端点とする最小重み完全マッチング M を求める
($|T|$ は必ず偶数 $\rightarrow$ レポート課題)

ステップ3 $F + M$: 全頂点を一度以上通る巡回路
 $F + M$ において, 既に通った頂点をスキップ
 $\rightarrow$ ハミルトン閉路 C



近似比の解析

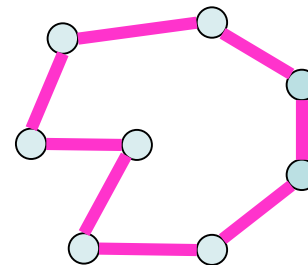
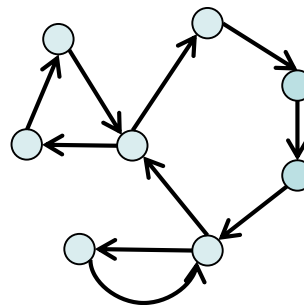
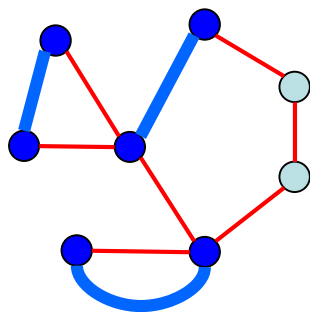
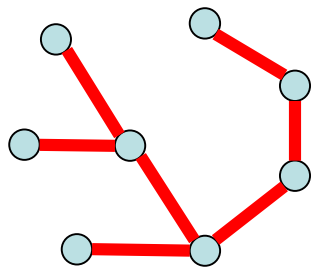
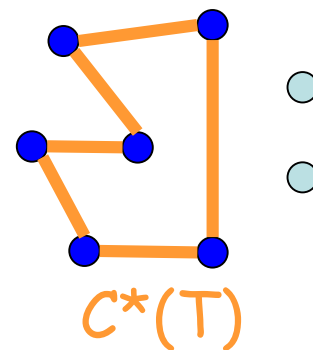
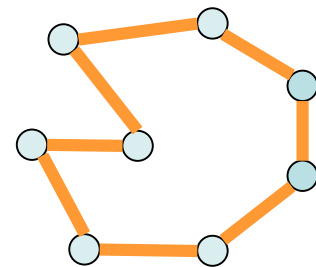
定理 Christofides のアルゴリズムは 1.5-近似

【証明】 ➤ C^* : 最適解

- $w(F) \leq w(C^*)$
- $w(C^*) \geq w(C^*(T)) \geq 2 \cdot w(M)$

$$\Rightarrow w(C) \leq w(F) + w(M) \leq 1.5 \cdot w(C^*)$$

【証明終】



- イン트로ダクション
- 離散最適化問題
 - 問題の定式化
 - 離散最適化問題を「解く」とは？
- 最小全域木問題
 - Prim のアルゴリズム
 - Kruskal のアルゴリズム
- 巡回セールスマン問題
 - Christofides のアルゴリズム

- 離散最適化問題を「解く」 = **多項式時間**で最適解を求める

- **最小全域木問題**: 多項式時間で解ける
- **巡回セールスマン問題**: 多項式時間で解けるかわからない

- **最小全域木問題に対するアルゴリズム設計**

- Prim のアルゴリズム
- Kruskal のアルゴリズム

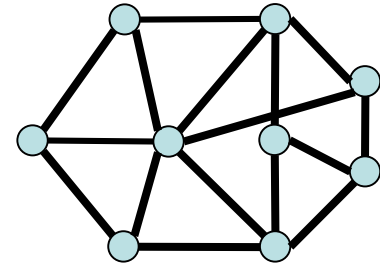
- **巡回セールスマン問題に対する近似アルゴリズム設計**

- Christofides の 1.5-近似アルゴリズム
(メトリック巡回セールスマン問題)

※ 一題以上解いて提出せよ

※ 教科書などを参考にした場合は, 出典を明記せよ

右のグラフにおける 全域木 および ハミルトン閉路 をそれぞれ一つ示せ.



自分で好きなネットワーク (グラフ $G=(V,E)$ と 辺重み $w: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$) を構成し, 最小全域木を Prim のアルゴリズムと Kruskal のアルゴリズムの二通りの方法で求めよ.

その際, 各方法において辺がどの順に選ばれていったかを示せ.

Kruskal の最小全域木アルゴリズムについて,

- 出力が最小全域木であることを証明せよ.
- 計算時間に対し, n, m の多項式の上界を与えよ (ソートの手間は $n \log n$ に比例するとしてよい).

Christofides のアルゴリズムにおいて, $|T|$ が偶数であることを証明せよ
(T : 最小全域木 F の辺が奇数本接続している頂点の集合).

自分で好きなメトリック巡回セールスマン問題の例を作り,
Christofides のアルゴリズムによる 1.5-近似解を求めよ.
その際, どのようにメトリック重みを定義したか, および,
最小全域木 F , 最小重み完全マッチング M を明記せよ.

現実社会に現れる, 最小全域木問題や巡回セールスマン問題の例を挙げよ
(いくつでも).