レポート問題

（2015/7/10，担当：竹井）

下記の中から２ ～ ３問選んで解答せよ.

[A-1] 複素変数 z の函数 $u = u(z)$ が正則函数であるとはどういう意味か？ 定義を述べよ.

[A-2] 三角函数 $\sin z, \cos z$ の $z = 0$ における Taylor 展開を求めよ.

[A-3] 常微分方程式

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p(z)\frac{du}{dz} + q(z)u = 0 \tag{$*$}$$

において，$p(z)$, $q(z)$ は $z = 0$ で正則であると仮定する．このとき，常微分方程式に対する基本定理（Cauchy の定理）の主張を述べよ.

[A-4] 上記の常微分方程式 $(*)$ が $z = 0$ に確定特異点を持つための条件を述べよ.

[A-5] L: $z = z(t)$ $(0 \le t \le 1)$ を，$z = a$ と $z = b$ を結ぶ (つまり，$z(0) = a, z(1) = b$) ような複素平面内の曲線とし，$u(z)$ を L を含むような領域での正則函数とする．このとき，複素積分

$$\int_L u(z)\, dz$$

の定義を述べよ.

[A-6] 正則函数の複素積分に関する Cauchy の積分定理の主張を述べよ.

[A-7] n を自然数とし，$u(x)$ の n 回不定積分 $u^{[n]}(x)$ を

$$u^{[1]}(x) = \int_0^x u(t)\, dt, \quad u^{[n]}(x) = \int_0^x u^{[n-1]}(t)\, dt \quad (n \ge 2)$$

と定義する．このとき，$\alpha = n$ に対応する Euler 変換

$$(I_0^n[u])(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} u(t)\, dt$$

は上記の不定積分 $u^{[n]}(x)$ と一致する：

$$(I_0^n[u])(x) = u^{[n]}(x).$$

この式を $n = 2$ の場合に確かめよ.

[B-1]　$z = x + iy$ を複素平面を動く変数，$z_0 = x_0 + iy_0$ を複素平面内の 1 点とする．z の函数 $u = u(z) = v(x, y) + iw(x, y)$ が $z = z_0$ において複素微分可能であるとき，Cauchy-Riemann の関係式

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial w}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial w}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

が成り立つことを示せ.

[B-2]　常微分方程式に対する解の存在と一意性の定理を利用して，Euler の公式

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

を証明せよ.

[B-3]　超幾何微分方程式

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)\frac{du}{dz} - \alpha\beta u = 0$$

の解を $z = 0$ での Taylor 展開 $u = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$（ただし $u_0 = 1$ とする）を使って求めれば，超幾何函数

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)\, n!} z^n$$

が得られることを示せ.

[B-4]　n を自然数とする．複素積分

$$\int_L \left(z - \frac{1}{z}\right)^n dz$$

を計算せよ．ただし，L は複素平面内の単位円周 $\{\,|z| = 1\}$（起点および終点は $z = 1$ とする）を表す.

[B-5]　$\alpha = 1/2$ のときの Euler 変換

$$(I_0^{1/2}[u])(x) = \frac{1}{c_{1/2}} \int_0^x (x-t)^{-1/2} u(t)\, dt$$

に対して，

$$\left(I_0^{1/2}\left[I_0^{1/2}[u]\right]\right)(x) = (I_0^1[u])(x) = \int_0^x u(t) dt$$

が成立することを示せ．ただし，$c_{1/2}$ は，$c_{1/2}^2 = \displaystyle\int_0^1 \big(t(1-t)\big)^{-1/2} dt$ により定まる正の定数である（実際には $c_{1/2} = \sqrt{\pi}$）.