NASH 村とスライム退治：整列擬順序入門

照井一成・京都大学数理解析研究所

1　はじめに

小説家 Ursula K. Le Guin (1929 - 2018) は、代表作の 1 つ『オメラスから歩み去る人々』を心の神話 (*psychomyth*) と呼んだ。それに倣い、以下 2 つの論理の神話 (*logicomyth*) を考える。

問題 1.1

ある世界には、n スライムなる生命体が任意の自然数 n について存在する (総称して単にスライムと呼ぶ)。0 スライムを攻撃すると単に消滅するが、$(n+1)$ スライムを攻撃すると何匹かの n スライムに分裂する（何匹に分裂するかは攻撃してみるまでわからない)。さて、あなたの前に何匹かのスライムがあらわれた！ あなたは有限回の攻撃でスライムたちをせん滅することができるだろうか？

問題 1.2

人名をひらがなで表す。名前 u が t に埋め込めるとは、t からいくつか文字を取り除くと u になることをいう。たとえば「ゆか」は「ゆうか」や「かゆかゆ」に埋め込めるが「かゆゆ」には埋め込めない。あるところに NASH 村と呼ばれる村があった[1]。NASH 村では次々と子供が生まれていくが、新生児の命名にはひとつきまりがあり、過去に生まれた子の名前が新生児の名前に埋め込めてはならないとする。この命名規則は いつまでも維持可能だろうか？ それともいつかは新生児に名前をつけられない事態が生じるだろうか？

本稿では 0 を自然数に含め、自然数全体の集合 $\{0, 1, 2, \dots\}$ を $\mathbb{N}$ と書く。

2　整列順序と多重集合

まずは順序集合の基礎事項を説明し、問題 1.1 について考える。

X を集合とする。直積集合 $X \times X := \{(a, b) : a, b \in X\}$ の部分集合 $R \subseteq X \times X$ を X 上の**関係**という。$(a, b) \in R$ のことを $a\ R\ b$ とも書く。X 上の関係 R_1, R_2 が $R_1 \subseteq R_2$ を満たすとき、R_2 を R_1 の**拡張**という。

[1] この問題はフィクションであり、米国の都市 Nashville とは一切関係ない。村名は数学者 Crispin St. John Alvah Nash-Williams にちなんでいる。

以下を満たす関係 $\leq$ を X 上の**半順序**という (組 $\langle X, \leq\rangle$ のことを半順序 (集合) ともいう)。

$$\begin{array}{llll} a \leq a & & & \text{(反射性)} \\ a \leq b \quad \text{かつ} \quad b \leq a & \Longrightarrow & a = b & \text{(反対称性)} \\ a \leq b \quad \text{かつ} \quad b \leq c & \Longrightarrow & a \leq c & \text{(推移性)} \end{array}$$

ここで a, b, c は X の任意の要素である[2]。さらに

$$a \leq b \quad \text{または} \quad b \leq a$$

が任意の $a, b \in X$ について成り立つとき、$\leq$ を**全順序**という。

半順序と全順序の関係を示すために補題を 1 つ証明する。X 上の関係 R で、任意の $n \in \mathbb{N}$ と $a_0, \ldots, a_n \in X$ について

$$a_0 \; R \; a_1 \; R \; a_2 \cdots a_n \; R \; a_0 \quad \Longrightarrow \quad a_0 = a_1 = \cdots = a_n$$

を満たすものを**非循環**という。明らかに半順序は非循環である。

補題 2.1

集合 X 上のどんな非循環関係も全順序に拡張できる。とくにどんな半順序も全順序に拡張できる。

証明. 非循環関係 R が与えられたとき、集合

$$\{R' \subseteq X \times X : R \subseteq R',\ R' \text{は非循環}\}$$

に対して Zorn の補題を適用すれば極大な関係 $\overline{R}$ が得られる。この $\overline{R}$ は全順序である。 □

定義 2.2

$\langle X, \leq\rangle$ を全順序とする。X に無限下降列

$$a_0 > a_1 > a_2 > \cdots \qquad (a_i \in X)$$

が存在しないとき、$\langle X, \leq\rangle$ を**整列順序**という。

別の言い方をすれば、整列順序とは空でないどんな部分集合 $Y \subseteq X$ も最小元を持つような全順序のことである。どんな集合上にも整列順序を入れられるというのが Zermelo の**整列定理**である。これは**選択公理**と同値である。

次に多重集合を定義し、($\mathbb{N}$ 上の) 多重集合の間に自然な順序関係を定める。集合 X の各要素 $a \in X$ について重複度 $t(a) \in \mathbb{N}$ が定まっているとき、関数 $t : X \longrightarrow \mathbb{N}$ のことを X 上の**多重集合**という。$t(a) = m$ のとき、t は要素 a を m 個含むと考える。多重集合 t は、$\sum_{a \in X} t(a)$ が有限のとき**有限**であるという。有限多重集合を $t = [a, a, a, b, b, c]$ のように書く。これは a を 3 個, b を 2 個, c を 1 個, その他の要素は 0 個ずつ含む多重集合である。X 上の有限多重集合全体を $\mathsf{M}(X)$ と書く。

[2]反射性、推移性のみを満たす関係を**擬順序**または**前順序**という。表題にある整列擬順序 (well quasi-order) はこれに由来するものであるが、本稿では半順序に制限して話を進めるので擬順序は明示的には出てこない。

$\mathbb{N}$ 上の有限多重集合 $t, u \in \mathsf{M}(\mathbb{N})$ について考える。t に 1 個以上含まれる要素 n について、t から n を 1 つ取り除き、複数個の $n-1 \in \mathbb{N}$ (0 個でもよい) を加えると u が得られるとき $u \preceq t$ と書く。とくに t から 0 を 1 つ取り除くと u が得られるとき $u \preceq t$ である。この操作を複数回繰り返すと t から u が得られるときも $u \preceq t$ と書く (0 回の場合も含める)。関係 $\preceq$ は**多重集合順序**と呼ばれる。

各 $t \in \mathsf{M}(\mathbb{N})$ はスライムの集団に対応する。たとえば $[7,7,7,6,0,0]$ は 7 スライム 3 匹、6 スライム 1 匹、0 スライム 2 匹からなる集団を表す。また関係 $\preceq$ はスライムに対する攻撃を模している。したがって問題 1.1 に対する解は以下の定理により与えられる。

定理 2.3

$\langle \mathsf{M}(\mathbb{N}), \preceq \rangle$ は整列順序である。

証明. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\langle \mathsf{M}(\{0, \ldots, n\}), \preceq \rangle$ が整列順序であることをいえばよい。証明は n についての帰納法による。

$n = 0$ のときは明らかなので $n > 0$ とする。無限下降列

$$t_0 \succ t_1 \succ t_2 \succ \cdots \qquad (t_i \in \mathsf{M}(\{0, \ldots, n\}))$$

が存在すると仮定して矛盾を導く。t_i に含まれる n の個数を $t_i(n)$ とすれば、$\preceq$ の定義より $t_0(n) \geq t_1(n) \geq t_2(n) \geq \cdots$ が成り立つ。よって十分大きな $k \in \mathbb{N}$ をとれば $t_k(n) = t_{k+1}(n) = t_{k+2}(n) = \cdots$ となる。そこで t_i から n を全部取り除いて得られる多重集合を u_i とおけば無限下降列

$$u_k \succ u_{k+1} \succ u_{k+2} \succ \cdots \qquad (u_i \in \mathsf{M}(\{0, \ldots, n-1\}))$$

が得られるが、これは帰納法の仮定に反する。 □

上では $\mathsf{M}(\mathbb{N})$ 上の多重集合順序について考えたが、実際にはどんな整列集合 $X = \langle X, \leq \rangle$ が与えられても $\mathsf{M}(X)$ 上の多重集合順序 $\leq^m$ を自然に定めることができる。それには、多重集合 $t \in \mathsf{M}(X)$ から要素 $a \in X$ を 1 つ取り除き、a より真に小さい要素 $b_1, \ldots, b_k$ ($k = 0$ でもよい) を加えると u が得られるとき $u \leq^m t$ と書くことにすればよい。この操作を複数回繰り返すと t から u が得られるときにも $u \leq^m t$ と書く。このとき次が成り立つ。

定理 2.4

$\langle X, \leq \rangle$ が整列順序ならば $\langle \mathsf{M}(X), \leq^m \rangle$ も整列順序である。

証明は整列順序 $\leq$ についての超限帰納法による。König の補題を用いた直感的にわかりやすい証明もよく知られている。

3　整列半順序と Higman の補題

次に問題 1.2 について考える。

定義 3.1

$\langle X, \leq \rangle$ を半順序とする。X 上の無限列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ で以下を満たすものを**悪列**という。

$$i < j \quad \Longrightarrow \quad a_i \not\leq a_j \qquad (i, j \in \mathbb{N})$$

悪列を含まない半順序を**整列半順序**という。

言い換えれば、$a_0, a_1, a_2, \ldots$ が悪列であるとは、$i < j$ かつ $a_i \leq a_j$ となる $i, j \in \mathbb{N}$ が存在しないことである。悪列の部分列はふたたび悪列になることに注意。

$\langle X, \leq \rangle$ が全順序のとき、悪列とは無限下降列のことに他ならない。よって定義 3.1 は定義 2.2 と一致する。より一般に、整列順序と整列半順序の関係は次のようになっている。

定理 3.2

半順序 $X = \langle X, \leq \rangle$ が整列半順序であることの必要十分条件は、どのように全順序に拡張しても整列順序になることである。

証明. 仮に $\leq$ を拡張する全順序 $\preceq$ で無限下降列 $a_0 \succ a_1 \succ a_2 \succ \cdots$ を含むものがあったとする。このとき $a_0, a_1, a_2, \ldots$ は $\langle X, \leq \rangle$ の悪列である。実際、ある $i < j$ について $a_i \leq a_j$ が成り立つならば、$a_i \preceq a_j$ であり $a_i \succ a_j$ に矛盾する。

逆に $\langle X, \leq \rangle$ が悪列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ を含むとする。このとき関係 R' を

$$b \; R' \; c \quad \Longleftrightarrow \quad b \leq c \text{ または } (b, c) \in R, \qquad R := \{(a_j, a_i) : i < j\}$$

により定めると R' は非循環である。実際もし循環があるなら、ある $(a_{j_0}, a_{i_0}), \ldots, (a_{j_n}, a_{i_n}) \in R$ が存在し

$$a_{j_0} \; R \; a_{i_0} \leq a_{j_1} \; R \; a_{i_1} \leq a_{j_2} \; R \; a_{i_2} \cdots a_{j_n} \; R \; a_{i_n} \leq a_{j_0}$$

となる。R の定義より $j_0 > i_0,\ j_1 > i_1,\ \ldots,\ j_n > i_n$ だから、ある $0 \leq k < n$ について $i_k < j_{k+1}$ (または $i_n < j_0$) であるが、そうすると上より $a_{i_k} \leq a_{j_{k+1}}$ (または $a_{i_n} \leq a_{j_0}$) となり $a_0, a_1, a_2, \ldots$ が悪列であることに反する。

補題 2.1 より $\langle X, R' \rangle$ は全順序 $\langle X, \preceq \rangle$ に拡張できるが、$a_0 \succ a_1 \succ a_2 \succ \cdots$ となるので整列順序にはならない。 □

整列半順序には他にも有用な特徴づけがいくつもある。そのうち 2 つを以下で紹介する。最初のものは (Nash-Williams 1963) による。

補題 3.3

半順序 $X = \langle X, \leq \rangle$ が整列半順序であることの必要十分条件は、X 上のどんな無限列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ も広義単調増加な無限列

$$a_{i_0} \leq a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \cdots \qquad (i_0 < i_1 < i_2 < \cdots)$$

を部分列として含むことである。

証明. 十分性は明らかなので必要性を示す。X を整列半順序とする。無限列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ が与えられたとき、以下を満たす a_m を末端と呼ぶ。

$$m < j \implies a_m \not\leq a_j \quad (j \in \mathbb{N})$$

もしも末端の a_m が無限に多くあれば、それらを集めると悪列ができてしまうので X が整列半順序であることに反する。それゆえ末端の a_m は有限個しかない。それら全部より後の要素を 1 つとり a_{i_0} とおけば、$a_{i_0} \leq a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \cdots$ を満たすよう a_{i_k} を次々にとっていくことができる。 □

半順序 $X = \langle X, \leq \rangle$ と要素 $a \in X$ が与えられたとき、$L(a) := \{b \in X : a \not\leq b\}$ と定める。X 上の関係 $\leq$ を $L(a)$ 上に制限したものをふたたび $\leq$ と書く。

補題 3.4

X が整列半順序であるためには、任意の $a \in X$ について $\langle L(a), \leq \rangle$ が整列半順序であることが必要十分である。

証明. 必要性は明らか。十分性は次のことから従う。$a_0, a_1, a_2, \ldots$ が X 上の悪列ならば $a_1, a_2, a_3, \ldots$ は $L(a_0)$ 上の悪列である。 □

以上で準備が整ったので、問題 1.2 について考える。Σ を文字の有限集合とするとき、Σ に含まれる文字の個数を $|\Sigma|$ により表す。また、Σ の要素からなる有限列全体の集合を Σ^* と書く。とくに空列 ε は Σ^* の要素である。文字列 t, u について、t から 1 文字取り除くと u が得られるとき $u \sqsubseteq t$ と書く。これはつまり $t = t_1 x t_2$, $u = t_1 t_2$ が成り立つということである ($x \in \Sigma$, $t_1, t_2 \in \Sigma^*$)。この操作を複数回繰り返すと t から u が得られるときにも $u \sqsubseteq t$ と書く。これはつまり t から何文字か取り除くと u が得られる場合である。関係 $\sqsubseteq$ を (文字列の) **埋め込み順序**という。

Σ をひらがな全部の集合とすれば、Σ^* は名前全部の集合になる。この場合悪列とは、NASH 村の掟にのっとって命名された名前の列のことに他ならない。それゆえ以下の定理が問題 1.2 に対する解答になる。

定理 3.5(Higman 1952)

任意の有限集合 Σ について $\langle \Sigma^*, \sqsubseteq \rangle$ は整列半順序である。

証明は $|\Sigma|$ に関する帰納法による。$|\Sigma| = 1$ の場合は明らか。以下 $|\Sigma| > 1$ とし、それより少ない文字数の場合には定理が成り立つと仮定する。帰納法をうまくまわすためには、Σ についての議論を Σ より一文字少ない場合に還元しなければならない。以下のアイデアは (Jullien 1968) による。

文字集合 Σ から一文字 $a \in \Sigma$ を取り除いて得られる集合を $\Sigma_a := \Sigma \backslash \{a\}$ とおく。文字列 $t = x^{(0)} \cdots x^{(n)}$ を固定すれば、どんな $u \in L(t)$ も以下のように表すことができる。

$$u = u^{(0)} x^{(0)} u^{(1)} x^{(1)} \cdots u^{(m)}, \qquad (m \leq n,\ u^{(k)} \in \Sigma^*_{x^{(k)}})$$

実際 $u \in L(t)$ が与えられたとき、$x^{(0)}$ を含まないよう出来るだけ長く $u^{(0)}$ をとり、$x^{(1)}$ を含まないよう出来るだけ長く $u^{(1)}$ をとり、そうやって $u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots$ を順次定めていけば、

遅くとも $u^{(n)}$ までに u 全体を覆い尽くせるはずである（さもなくば $t \sqsubseteq u$ となってしまう)。すると $|\Sigma_{x^{(k)}}| = |\Sigma| - 1$ なので、帰納法の仮定より $\Sigma_{x^{(k)}}$ に対して補題 3.3 を用いることが可能になる。

補題 3.6

任意の $t \in \Sigma^*$ について $\langle L(t), \sqsubseteq\rangle$ は整列半順序である。

証明. $t = x^{(0)} \cdots x^{(n)}$ とする。仮に $L(t)$ 上の悪列 $u_0, u_1, u_2, \dots$ が与えられたとして矛盾を導く。上に述べたとおり各 u_i は

$$u_i = u_i^{(0)} x^{(0)} u_i^{(1)} x^{(1)} \cdots u_i^{(m_i)}, \qquad (m_i \le n,\ u_i^{(k)} \in \Sigma^*_{x^{(k)}})$$

と表すことができる。するとある $m \le n$ が存在して、無限に多くの m_i が m に一致するはずである。悪列の部分列は悪列なので、そのような u_i だけを集めればふたたび悪列をつくることができる。番号をつけかえて $u_0, u_1, u_2, \dots$ とすると、次のような配列を考えることができる。

$$\begin{array}{cccc}
u_0 & u_1 & u_2 & \cdots \\
\parallel & \parallel & \parallel & \\
u_0^{(0)} & u_1^{(0)} & u_2^{(0)} & \cdots \\
x^{(0)} & x^{(0)} & x^{(0)} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
u_0^{(m)} & u_1^{(m)} & u_2^{(m)} & \cdots
\end{array}$$

補題 3.3 を $u_0^{(0)}, u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots$ に適用すれば、広義単調増加列 $u_{i_0}^{(0)} \sqsubseteq u_{i_1}^{(0)} \sqsubseteq u_{i_2}^{(0)} \sqsubseteq \cdots$ が得られる。$u_{i_0}, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots$ は依然として悪列である。そこで番号 $i_0, i_1, i_2, \dots$ を $0, 1, 2, \dots$ とつけかえて同様の議論を $k = 1, \dots, m$ についても行えば、悪列 $u_0, u_1, u_2, \dots$ でありながら、各 $k = 0, \dots, m$ について $u_0^{(k)} \sqsubseteq u_1^{(k)} \sqsubseteq u_2^{(k)} \sqsubseteq \cdots$ が広義単調増加なものが得らるはずである。だがそうすると $u_0 \sqsubseteq u_1$ となり矛盾である。 □

定理 3.5 は補題 3.4 と補題 3.6 から従う。

上では有限の文字集合 Σ から出発して議論を始めたが、より一般に任意の整列半順序 $X = \langle X, \le\rangle$ から出発して X^* 上の埋め込み順序を定めることができる。この場合、関係 $\le^*$ を次のように定める。$u \le^* t$ が成り立つのは、$u = x_0 \cdots x_k$ であり、t から何文字か取り除いて $y_0 \cdots y_k$ とすると $x_0 \le y_0, \dots, x_k \le y_k$ が成り立つ場合である。

定理 3.7(Higman の補題)

$\langle X, \le\rangle$ が整列半順序ならば $\langle X^*, \le^*\rangle$ も整列半順序である。

4 整列 (半) 順序の比較

問題 1.1 と問題 1.2 は、どちらも列の有限性をうったえるものである。そうなると両者を量的に比較したくなってくるのだが、たとえば最長の有限列の長さを比較することに意

味はない。なぜならどちらの場合も、いくらでも長い有限列が存在するからである (それでも無限列は存在しない)。1 つの手段は順序数を用いることである。

$X = \langle X, \leq \rangle$ を整列順序とする。整列順序なので、空でないどんな部分集合 $Y \subseteq X$ にも最小元がある。とくに：

- X が空でないなら X 全体の最小元がある。これを 0 と書く。
- どんな要素 $a \in X$ についても、集合 $\{b \in X : a < b\}$ は空でないならば最小元を持つ。これを $a + 1$ と書く。
- どんな無限上昇列 $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ についても、集合

$$\{b \in X : \text{すべての } i \in \mathbb{N} \text{ について } a_i < b\}$$

は空でないなら最小元を持つ。これを $\sup_{i \in \mathbb{N}} a_i$, $\sup\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ 等と書く。

定理 4.1

以下を満たす整列順序 $\langle \mathsf{O}(\omega_1), \leq \rangle$ が同型を除いてただ 1 つ存在する。

(i)	$0 \in \mathsf{O}(\omega_1)$			(ゼロ)
(ii)	$\alpha \in \mathsf{O}(\omega_1)$	$\Longrightarrow$	$\alpha + 1 \in \mathsf{O}(\omega_1)$	(後続順序数)
(iii)	$\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots \in \mathsf{O}(\omega_1)$	$\Longrightarrow$	$\sup_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i \in \mathsf{O}(\omega_1)$	(可算極限順序数)
(iv)	$\mathsf{O}(\omega_1)$ の要素はすべて (i), (ii), (iii) のいずれかにあてはまる。			

$\mathsf{O}(\omega_1)$ の要素 α を**可算順序数**という。また集合 $\{\beta \in \mathsf{O}(\omega_1) : \beta < \alpha\}$ を $\mathsf{O}(\alpha)$ と書く。たとえば $\mathsf{O}(\omega_1)$ の中には以下のような順序数が存在する。

$$\begin{array}{lcl} \omega & := & \sup\{0, 1, 2, \ldots\} \\ \omega \cdot 2 & := & \sup\{\omega,\ \omega + 1,\ \omega + 2, \ldots\} \\ \omega^2 & := & \sup\{\omega,\ \omega \cdot 2,\ \omega \cdot 3, \ldots\} \\ \omega^\omega & := & \sup\{\omega,\ \omega^2,\ \omega^3, \ldots\} \\ \varepsilon_0 & := & \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots\} \end{array}$$

ちなみに ω_1 は最小の非可算順序数を表す。どんな実数にも $\mathsf{O}(\omega_1)$ の要素を 1 対 1 に対応させることはできるだろうか？「できる」というのが Cantor の**連続体仮説**であるが、その成否は **ZFC 集合論**から独立である。

n を 2 以上の自然数とするとき、どんな自然数も n 進法により表すことができる。たとえば

$$324 \;=\; 10^2 \cdot 3 + 10^1 \cdot 2 + 10^0 \cdot 4 \;=\; 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^1 + 10^1 + 10^0 + 10^0 + 10^0 + 10^0$$

n を大きくとればとるほど、大きな数を少ない桁数で表すことができる。つまり情報圧縮が生じる。同様にして、(可算に限らず) どんな順序数も ω 進法により表すことができる。

定理 4.2(Cantor 標準形)

どんな順序数 α も次の形に一意に表すことができる。

$$\alpha \ = \ \omega^{\beta_0} + \cdots + \omega^{\beta_k}, \qquad \alpha \geq \beta_0 \geq \cdots \geq \beta_k.$$

$\alpha = \beta_0$ が成り立つのは $\alpha = \omega^\alpha$ のときに限る。

ε_0 未満の順序数に限っていえば、ω 進法はかなりうまく働く。実際、上の定理を再帰的に適用すればどんな $\alpha \in \mathsf{O}(\varepsilon_0)$ にも単一の有限表示を与えることができる。しかし $\varepsilon_0 = \omega^{\varepsilon_0}$ となってしまうので、ε_0 以上の順序数を扱うには、さらなる工夫が必要になる。

次の定理により整列順序の量的比較が可能になる。ここで半順序 $\langle X, \leq \rangle$ が**可算**であるとは、集合 X の各要素を自然数と 1 対 1 に対応づけられることをいう。半順序 $X_1 = \langle X_1, \leq_1 \rangle$ と $X_2 = \langle X_2, \leq_2 \rangle$ が**同型**であるとは、X_1 から X_2 への全単射 $f : X_1 \longrightarrow X_2$ で順序を保つものが存在することをいう。

$$a \leq_1 b \quad \Longleftrightarrow \quad f(a) \leq_2 f(b).$$

このとき $X_1 \cong X_2$ と書く。$\mathsf{O}(\alpha) \cong \mathsf{O}(\beta)$ となるのは $\alpha = \beta$ のときに限られる。

定理 4.3

$X = \langle X, \leq \rangle$ を半順序とする。X が可算整列順序であることの必要十分条件は、ある $\alpha \in \mathsf{O}(\omega_1)$ が存在し $X \cong \mathsf{O}(\alpha)$ が成り立つことである。

上の α のことを $\langle X, \leq \rangle$ の**順序型**といい、本稿では $o(X, \leq)$ で表す。

さて、問題 1.1 に特徴的な順序数は比較的簡単に求めることができる。$\mathbb{N}$ 上の多重集合 $t = [n_0, \ldots, n_k] \in \mathsf{M}(\mathbb{N})$ に対して順序数

$$t^\bullet \ := \ \omega^{n_0} + \cdots + \omega^{n_k} \qquad (n_0 \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k)$$

を割り当てる。定理 4.2 により

$$\beta < \omega^\omega \quad \Longleftrightarrow \quad \beta = \omega^{n_0} + \cdots + \omega^{n_k} \quad (n_0, \ldots, n_k \in \mathbb{N}, n_0 \geq \cdots \geq n_k)$$

なので、この対応は $\mathsf{O}(\omega^\omega)$ への全単射である。さらに

$$\omega^{n+1} \ = \ \omega^n \cdot \omega \ > \ \omega^n \cdot k \ = \ \omega^n + \cdots + \omega^n \quad (k \text{ 回})$$

が任意の $k \in \mathbb{N}$ について成り立つので、$u \preceq t \Longleftrightarrow u^\bullet \leq t^\bullet$ となることもわかる。よって次のことが結論できる。

定理 4.4

$$o(\mathsf{M}(\mathbb{N}), \preceq) = \omega^\omega.$$

整列半順序の場合にはこれほど直接的な対応はない。そこで定理 3.2 を用い、可算整列半順序 $\langle X, \leq \rangle$ の**極大順序型**を以下で定める。

$$o(X, \leq) \ := \ \sup\{o(X, \leq') : \leq' \text{ は } \leq \text{ を拡張する全順序 } \} \quad \in \mathsf{O}(\omega_1).$$

定理 4.5(De Jongh and Parikh 1977)

集合 Σ は n 個の要素からなるとする。

$$o(\Sigma^*, \sqsubseteq) = \omega^{\omega^{n-1}}.$$

証明は大変なので省略する。

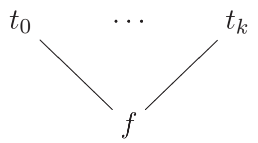
5 もしも名前が木だったら—Kruskal の定理

Higman の補題にはいくつかの拡張が知られている。中でも最も有名であり、コンピュータ科学で大事な役割を果たすのが Kruskal の定理 (1960) である。NASH 村の寓話でいえば、これは新生児につける名前が文字列ではなく文字 “木” の場合に相当する。以下ではこの定理の特別な場合について説明する。

Σ を文字の有限集合とする。以下を満たす最小の集合を $\mathsf{T}(\Sigma)$ とおく。

$$f \in \Sigma,\ \boldsymbol{t} \in \mathsf{T}(\Sigma)^* \quad \Longrightarrow \quad f(\boldsymbol{t}) \in \mathsf{T}(\Sigma).$$

各 $t \in \mathsf{T}(\Sigma)$ は Σ でラベル付けされた**木**を表す。たとえば空列 ε は $\mathsf{T}(\Sigma)^*$ に属するので、$f \in \Sigma$ ならば $f(\varepsilon) \in \mathsf{T}(\Sigma)$ である。これは単一の節点からなる木を表す。また木の列 $\boldsymbol{t} = t_0 \cdots t_k \in \mathsf{T}(\Sigma)^*$ が与えられたとき、$u = f(\boldsymbol{t})$ は



の形の木を表す。$S(u) := \{t_0, \ldots, t_k\}$ とおく。また木 u の大きさ (節点の数) を自然数 $|u|$ で表す。$t_i \in S(u)$ ならば $|t_i| < |u|$ となることに注意。

$\mathsf{T}(\Sigma)$ 上の半順序で以下を満たす最小のものを (木の) **埋め込み順序**といい、$\trianglelefteq$ で表す。

$$\begin{array}{lll} 0 \leq i \leq k & \Longrightarrow & t_i \trianglelefteq f(t_0 \cdots t_k) \\ \boldsymbol{u} \trianglelefteq^* \boldsymbol{t} & \Longrightarrow & f(\boldsymbol{u}) \trianglelefteq f(\boldsymbol{t}) \end{array}$$

ただし $\boldsymbol{u} \trianglelefteq^* \boldsymbol{t}$ が成り立つのは、$\boldsymbol{u} = u_0 \cdots u_k$ であり、木の列 $\boldsymbol{t}$ からいくつかの木を取り除いて $t_0 \cdots t_k$ とすれば $u_0 \trianglelefteq t_0, \ldots, u_k \trianglelefteq t_k$ が成り立つ場合である (定理 3.7 を参照)。第一の性質より、$t_i \in S(u)$ ならば $t_i \trianglelefteq u$ となることに注意。

定理 5.1(Kruskal 1960)

任意の有限集合 Σ について $\langle \mathsf{T}(\Sigma), \trianglelefteq \rangle$ は整列半順序である。

一見 Higman の補題の簡単な一般化に見えるが、この整列半順序の極大順序型はとてつもなく大きくなる (Γ_0 以上)。証明は (Nash-Williams 1963) の**最悪列論法**による[3]。

[3]最悪列の原語は minimal bad sequence である。本来なら極小悪列と訳すべきであるが、語呂がよいので最悪列とした。

補題 5.2

もしも $\langle \mathsf{T}(\Sigma), \trianglelefteq \rangle$ が整列半順序でないならば、以下の性質を満たす悪列 $t_0, t_1, t_2, \ldots$ (**最悪列**) が存在する。任意の悪列 $u_0, u_1, u_2, \ldots$ について $|t_0| \leq |u_0|$. また各 $n \in \mathbb{N}$ と $t_0, \ldots, t_n$ から始まる任意の悪列 $t_0, \ldots, t_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots$ について $|t_{n+1}| \leq |u_{u+1}|$.

証明. 仮定より悪列が存在する。その中で第一項の大きさが最小となるものを 1 つ選び、その第一項を t_0 とおく。すると t_0 から始まる悪列が存在するので、その中で第二項の大きさが最小となるもの 1 つを選び、その第二項を t_1 とおく。以下同様。 □

補題 5.3

$\langle \mathsf{T}(\Sigma), \trianglelefteq \rangle$ は整列半順序でないと仮定し、その最悪列を $t_0, t_1, t_2, \ldots$ とする。$S := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S(t_i)$ とすると、$\langle S, \trianglelefteq \rangle$ は整列半順序である。

証明. 仮に S が悪列 $s_0, s_1, s_2, \ldots$ を含むとする。このとき、すべての $i, n \in \mathbb{N}$ について $s_i \notin S(t_n)$ となることを n についての帰納法で示す。

まず $s_i \in S(t_0)$ ならば $|s_i| < |t_0|$ となるが、$s_i, s_{i+1}, s_{i+2}, \ldots$ は悪列なので、これは最悪列の定義に反する。

次に $s_i \in S(t_{n+1})$ と仮定すると、

$$t_0, \ldots, t_n, s_i, s_{i+1}, s_{i+2}, \ldots$$

は悪列である。実際、ある t_k と s_j について $t_k \trianglelefteq s_j$ となったとすると、$s_j \in S(t_l)$ なる t_l について $t_k \trianglelefteq t_l$ となり、$t_0, t_1, t_2, \ldots$ が悪列であることに反する (帰納法の仮定より $s_j \notin S(t_0) \cup \cdots \cup S(t_n)$ なので $k \leq n < l$ となることに注意)。しかし $|s_i| < |t_{n+1}|$ なので、これは最悪列の定義に反する。よって $s_i \notin S(t_{n+1})$.

以上から $s_0 \notin S(t_n)$ がすべての n について成り立つことになるが、これは $s_0 \in S$ に矛盾する。 □

以上で定理 5.1 を証明する準備が整った。仮に $\langle \mathsf{T}(\Sigma), \trianglelefteq \rangle$ が整列半順序でないとすると、最悪列 $t_0, t_1, t_2, \ldots$ と整列半順序 $\langle S, \trianglelefteq \rangle$ が存在する。Σ は有限なので、ある $f \in \Sigma$ が存在し、最悪列 $t_0, t_1, t_2, \ldots$ は

$$f(\boldsymbol{u}_0), f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \ldots \qquad (\boldsymbol{u}_i \in S^*)$$

の形の部分列を含む。これは悪列の部分列なので、ふたたび悪列である。しかし定理 3.7 より $\langle S^*, \trianglelefteq^* \rangle$ は整列半順序なので、$\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots$ は悪列ではない。よってある $i < j$ について $\boldsymbol{u}_i \trianglelefteq^* \boldsymbol{u}_j$ が成り立つ。だがそうすると $f(\boldsymbol{u}_i) \trianglelefteq f(\boldsymbol{u}_j)$ となり矛盾である。よって $\langle \mathsf{T}(\Sigma), \trianglelefteq \rangle$ は整列半順序である。

最悪列論法は背理法を何度も入れ子にして用いるので、構成的な観点からいえば非常にわかりにくい。もっとわかりやすく、もっと “構成的” な証明はないだろうか？

さらに学ぶために. 参考文献を 3 つ挙げておく。

- Jean H. Gallier. What's so special about Kruskal's theorem and the ordinal Γ_0? A survey of some results in proof theory. *Annals of Pure and Applied Logic*, 53(3): 199 - 260, 1991. 非常に丁寧に書かれたサーヴェイ。予備知識なしでも読める。

- Franz Baader and Tobias Nipkow. *Term rewriting and all that.* Cambridge, 1998. コンピュータ科学における項書き換え系の教科書。Kruskal の定理はとくにこの分野で重要な役割を果たす。

- 新井敏康. 数学基礎論. 岩波書店, 2011. 数学基礎論に関する重厚な入門書。整列順序や順序数は数学基礎論においても重要な役割を果たす。

レポート課題. 以下 4 問のうち 2 ～ 3 問を選択して答えよ。

1. 全順序ではないが半順序である $\langle X, \leq \rangle$ の具体例を挙げよ。ただし X は無限集合でなければならない。

2. X 国には無限個のサッカーチーム $X = \{a, b, c, \dots\}$ が存在する。リーグ戦を行った結果、各チーム $a \in X$ について勝ち点 $w(a) \in \mathbb{N}$ と総得点 $s(a) \in \mathbb{N}$ が定まった。ただし $w(a) = w(b)$, $s(a) = s(b)$ を共に満たす 2 チーム $a, b \in X$ はなかったとする。順位付けを以下のように行う。

$$a \leq b \quad \Longleftrightarrow \quad w(a) < w(b) \quad \text{または} \quad (w(a) = w(b) \quad \text{かつ} \quad s(a) \leq s(b)).$$

   このとき $\langle X, \leq \rangle$ は全順序であり、さらに整列順序であることを証明せよ。

3. 整列半順序 $\langle X_1, \leq_1 \rangle, \langle X_2, \leq_2 \rangle$ が与えられたとき、$X_1 \times X_2$ 上の半順序 $\leq$ を以下のように定める。

$$(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2) \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 \leq_1 b_1 \quad \text{かつ} \quad a_2 \leq_2 b_2 \qquad (a_1, b_1 \in X_1,\ a_2, b_2 \in X_2)$$

   このとき $\langle X_1 \times X_2, \leq \rangle$ が整列半順序であることを証明せよ (ヒント：補題 3.3 を用いよ)。

4. あなたはオメラスから歩み去りますか？ 歩み去りませんか？できるだけ納得のいく論拠を挙げて自分の選択を正当化してください（20 行程度）。