「リー代数とその数論への応用」資料

2019.7.19 玉川安騎男

[定義集]

定義 1

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{Z} = \{\text{ 整数全体 }\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \\
&\cap \\
&\mathbb{Q} = \{\text{ 有理数全体 }\} = \{a/b \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \\
&\cap \\
&\mathbb{R} = \{\text{ 実数全体 }\} \\
&\cap \\
&\mathbb{C} = \{\text{ 複素数全体 }\} = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

定義 2 $(K, 0, 1, +, -, \cdot, {}^{-1})$ が［あるいは、K が］（可換）体 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

K: 集合
$0, 1 \in K$ 元
$+ : K \times K \to K,\ (a, b) \mapsto a + b$
$- : K \to K,\ a \quad \mapsto -a$
$\cdot : K \times K \to K,\ (a, b) \mapsto a \cdot b$
${}^{-1} : K - \{0\} \to K,\ a \mapsto a^{-1}$

であって、次の (i)–(ix) が成立

(i) $(a + b) + c = a + (b + c)$ $(\forall a, b, c \in K)$
(ii) $a + 0 = 0 + a = a$ $(\forall a \in K)$
(iii) $a + (-a) = (-a) + a = 0$ $(\forall a \in K)$
(iv) $a + b = b + a$ $(\forall a, b \in K)$
(v) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $(\forall a, b, c \in K)$
(vi) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ $(\forall a \in K)$
(vii) $a \cdot b = b \cdot a$ $(\forall a, b \in K)$
(viii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ $(\forall a, b, c \in K)$
(ix) $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ $(\forall a \in K - \{0\})$
(x) $1 \neq 0$

が成立するとき、K を体という。

定義 3 K を体とする。$n \in \mathbb{Z},\ n > 0$ で $n \cdot 1 = 0$ となるものが存在するとき、そのような n のうちで最小のものを K の標数という。そのような n が存在しないときは、K の標数を 0 とする。

定義 4 K を体とする。このとき、K は代数閉体 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\forall f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n\ (n > 0, a_1, \dots, a_n \in K),\ \exists \alpha \in K \text{ s.t. } f(\alpha) = 0$$

定義 5 体 K と $n \in \mathbb{Z}, n > 0$ に対し、$M_n(K) \overset{\text{def}}{=} \{$成分を K に持つ n 次正方行列全体$\}$

定義６ $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ が［あるいは、$\mathfrak{g}$ が］K 上の（有限次元）リー代数 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\mathfrak{g}$: K 上の有限次元線形空間
$[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},\ (x, y) \mapsto [x, y]$

であって、次の (i)–(iii) が成立

(i)（双線形性）$[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$, $[z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y]$
$(\forall x, y, z \in \mathfrak{g}, a, b \in K)$
(ii)（交代性）$[x, x] = 0$ $(\forall x \in \mathfrak{g})$
(iii)（ヤコビ恒等式）$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ $(\forall x, y, z \in \mathfrak{g})$

定義７ $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ を（体 K 上の）リー代数とする。リー代数の準同型 $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ とは、線形写像 $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ で、次をみたすもののことをいう。

$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$ $(\forall x, y \in \mathfrak{g})$

さらに、リー代数の準同型 $\psi : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ があって $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}'}$ がみたされるとき、$\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ をリー代数の同型という。
同型 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ が存在するとき、$\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ は同型といい、$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}'$ と表す。

定義８ (i) リー代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ の間に包含関係 $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ があり、$\mathfrak{g}$ の $[\ ,\ ]$ を $\mathfrak{h}$ に制限したものが $\mathfrak{h}$ の $[\ ,\ ]$ になっているとき、$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の部分リー代数であるという。
(ii) リー代数 $\mathfrak{g}$ の部分リー代数 $\mathfrak{h}$ が $[x, y] \in \mathfrak{h}$ $(\forall x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{h})$ をみたすとき、$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであるという。

定義９ $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_r$ をリー代数とする。線形空間としての直和 $\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r$ に

$$[(x_1, \ldots, x_r), (y_1, \ldots, y_r)] \overset{\text{def}}{=} ([x_1, y_1], \ldots, [x_r, y_r])\ (x_1, y_1 \in \mathfrak{g}_1, \ldots, x_r, y_r \in \mathfrak{g}_r)$$

により $[\ ,\ ]$ を定義したものを $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_r$ の直和リー代数という。

定義１０ $(A, \cdot)$ が［あるいは、A が］K 上の（有限次元）結合的代数 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

A: K 上の有限次元ベクトル空間
$\cdot : A \times A \to A,\ (x, y) \mapsto x \cdot y$

であって、次の (i)(ii) が成立

(i)（双線形性）$(ax + by) \cdot z = a(x \cdot z) + b(y \cdot z)$, $z \cdot (ax + by) = a(z \cdot x) + b(z \cdot y)$
$(\forall x, y, z \in A, a, b \in K)$
(ii)（結合性）$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ $(\forall x, y, z \in A)$

定義１１ $\mathfrak{g}$ をリー代数とする。
(i) $\mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ を $\mathfrak{g}$ のイデアルとする。このとき、$[x, y]$ $(x \in \mathfrak{h}, y \in \mathfrak{k})$ で生成される $\mathfrak{g}$ の部分線形空間を $[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}]$ と表す。（$[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}]$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる。）$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ を $D(\mathfrak{h})$ と表す。
(ii) $D^0(\mathfrak{g}) \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{g}$, $D^{n+1}(\mathfrak{g}) \overset{\text{def}}{=} D(D^n(\mathfrak{g}))$
(iii) $\mathfrak{g}$ は可解リー代数 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists n \geq 0$ s.t. $D^n(\mathfrak{g}) = 0$

定義１２ $(G, e, *, \iota)$ が［あるいは、G が］群 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

G: 集合
$e \in G$: 元
$* : G \times G \to G,\ (a, b) \mapsto a * b$
$\iota : G \to G,\ a \mapsto \iota(a)$

であって、次の (i)–(iii) が成立

(i) $(a * b) * c = a * (b * c)$ $(\forall a, b, c \in G)$
(ii) $a * e = e * a = a$ $(\forall a \in G)$
(iii) $a * \iota(a) = \iota(a) * a = e$ $(\forall a \in G)$

定義１３ G, G' を群とする。群の準同型 $\phi : G \to G'$ とは、写像 $\phi : G \to G'$ で、次をみたすもののことをいう。

$\phi(a * b) = \phi(a) * \phi(b)$ $(\forall a, b \in G)$
$\phi(e) = e$
$\phi(\iota(a)) = \iota(\phi(a))$ $(\forall a \in G)$

さらに、群の準同型 $\psi : G' \to G$ があって $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_G,\ \phi \circ \psi = \mathrm{id}_{G'}$ がみたされるとき、$\phi : G \to G'$ を群の同型という。

同型 $G \to G'$ が存在するとき、G, G' は同型といい、$G \simeq G'$ と表す。

定義１４ 群 G, H の間に包含関係 $G \supset H$ があり、G の $(e, *, \iota)$ を H に制限したものが H の $(e, *, \iota)$ になっているとき、H は G の部分群であるという。

定義１５ $Y \subset X \subset \mathbb{R}^N$ を部分集合とする。このとき、Y は X の閉集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

Y 内の点列 $\{y_n\}$ が $x \in X$ に収束するとき、必ず $x \in Y$ となる

[レポート問題]

Q0 (必須)
リー代数とはどんなものか、数学があまり得意でない 1 回生に対して説明するつもりで説明して下さい。

Q∞ (必須) 講義やレポート問題に対する感想・意見などを書いて下さい。

（問題 Q1, Q2, ... は、講義の中で出題します。）