現代の数学と数理解析

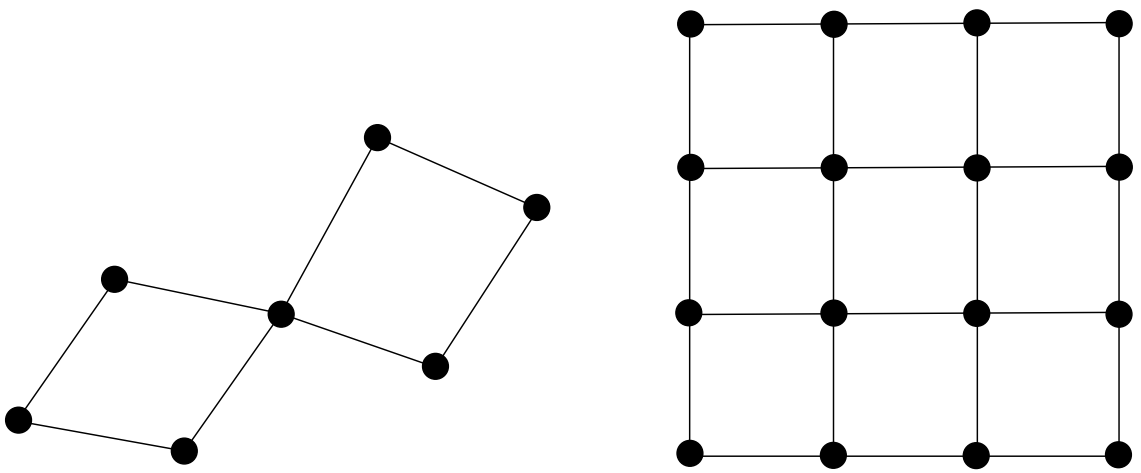
ランダムウォークと電気回路

熊谷　隆

(京都大学数理解析研究所)

http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kumagai/Lectures.html

2014年6月27日



1　有限グラフ上の電気回路

(V, B)：有限グラフ

有限個の点の集合Vと、Vの２つの要素を結んだ線（ボンド）の集合Bのペア

x, y, z：Vの元、　$\{x, y\}$：$x, y \in V$を結ぶBの元

仮定　a) (V, B)は連結（つながっている）

b) $x \in V$に対して$\{x, x\}$というボンドはない。

このグラフから電気回路を作る。

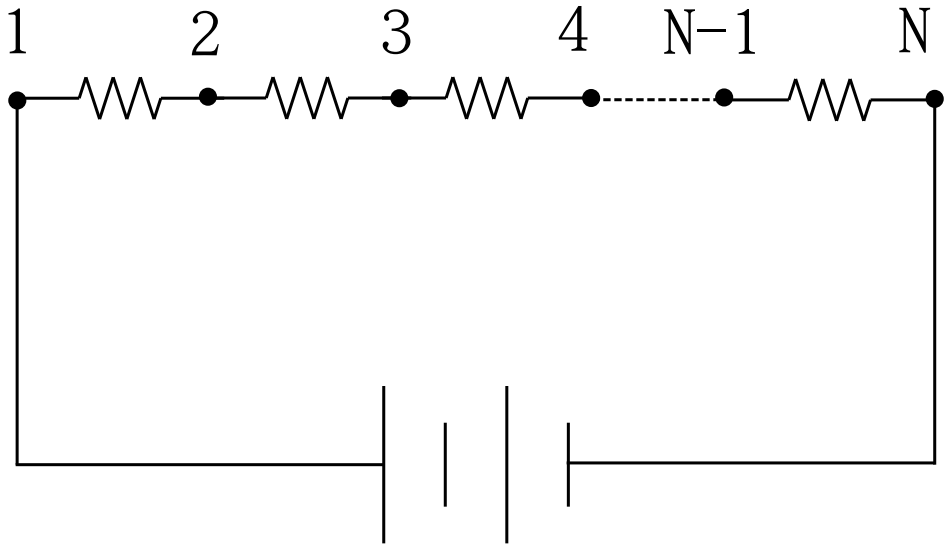
各ボンド $\{x,y\} \in B$ にコンダクタンス $C_{xy} > 0$ を置く。

（抵抗 $R_{xy} = 1/C_{xy}$ を置くと言ってもいい）。

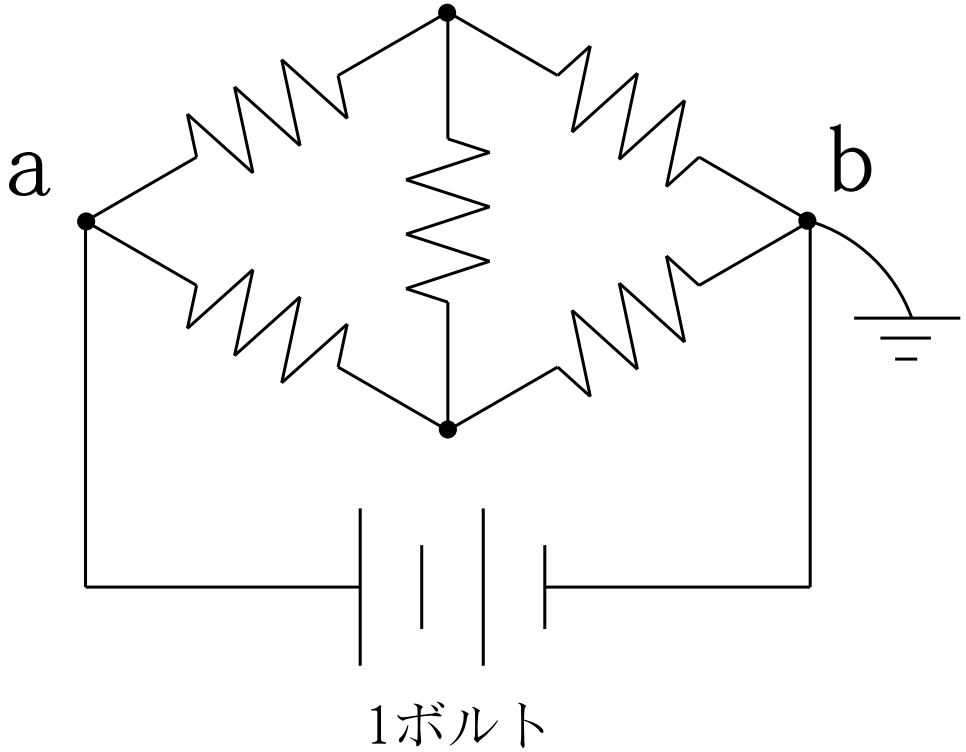
- $\{x,y\} \notin B$ のときは、$C_{xy} = 0$。
- $C_{yx} = C_{xy}$
- $x \in V$ に対して、$C_x = \sum_{y \in V} C_{xy}$ とおく。

このように決めた電気回路を電気回路 (V,C) と呼ぶ。

(Q) $x_0, y_0 \in V$ の間に電圧をかけたとき、各点での電位（$v(x)$ で x の電位を表す）、各ボンドを流れる電流（i_{xy} で x から y への電流を表す）はどうなるか？



例　1



例　2

オーム（Ohm）の法則

２点間の電圧（電位差）は流れる電流と抵抗の積に等しい。

$$v(x) - v(y) = i_{xy} R_{xy} \qquad \text{for all } \{x, y\} \in B \tag{1.1}$$

キルヒホッフ（Kirchhoff）の法則

x_0, y_0 以外の点では、流入電流量の和と流出電流量の和は等しい。

$$\sum_{\substack{y \in V \\ \{x,y\} \in B}} i_{xy} = 0 \qquad \text{for all } x \in V,\ x \neq x_0, y_0 \tag{1.2}$$

オームの法則を適用すると、(1.2) は次のように表せる。

$$\sum_{\substack{y \in V \\ \{x,y\} \in B}} (v(x) - v(y)) C_{xy} = 0 \qquad \text{for all } x \in V,\ x \neq x_0, y_0 \tag{1.3}$$

定義 **1.1** V 上の関数 f（以下では V 上の関数のことを V 上のポテンシャルと呼ぶ）に対して、差分作用素 Δ を次のように定める。

$$\Delta f(x) = \frac{1}{C_x} \sum_{\substack{y \in V \\ \{x,y\} \in B}} (f(y) - f(x)) C_{xy} = \sum_{\substack{y \in V \\ \{x,y\} \in B}} \frac{C_{xy}}{C_x} f(y) - f(x)$$

- $f(x)$ が x の電位を表すとき、$\Delta f(x)$ は x に流れる電流量を C_x で割ったもの。
- $\Delta f(x) = 0$ のとき、f は x で調和であるという。

  x で調和 $\Leftrightarrow$ x で (1.3) の意味でキルヒホッフの法則を満たす。

例 1 の回路の場合、

$$\Delta f(i) = \frac{1}{2}\{f(i+1) + f(i-1) - 2f(i)\} \qquad 1 < i < N$$

定義 **1.2** V 上のポテンシャル f が与えられたとき、この回路のエネルギー消費量 を以下のように定義する。

$$\mathcal{E}_C(f,f) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{x\in V\\ y\in V}}(f(x)-f(y))^2 C_{xy}$$

- 中学・高校で習った公式 $E = VI(= V^2/R)$ に合致している。
- $\sum$ によりひとつのボンドを $\{x,y\},\{y,x\}$ と 2 回加えているため、2 で割っている。

V 上のポテンシャル f,g に対して一般に、以下のように定める。

$$\mathcal{E}_C(f,g) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{x\in V\\ y\in V}}(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) C_{xy}$$

命題 **1.3** （ガウス-グリーンの公式 ） V 上のポテンシャル f, g に対して

$(f,g)_C = \sum_{x\in V} f(x)g(x)C_x$ とすると、以下が成り立つ。

$$\mathcal{E}_C(f,g) = -(f,\Delta g)_C$$

証明：

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_C(f,g) &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{x,y\in V} f(x)g(x)C_{xy} + \sum_{x,y} f(y)g(y)C_{xy}\Big) - \sum_{x,y} f(x)g(y)C_{xy} \\
&= \sum_{x,y} f(x)g(x)C_{xy} - \sum_{x,y} f(x)g(y)C_{xy} \\
&= -\sum_{x} f(x)\sum_{y}(g(y)-g(x))C_{xy} = -\sum_{x} f(x)\Delta g(x)C_x \\
&= -(f,\Delta g)_C
\end{aligned}$$

命題 **1.4**（ディリクレの原理）　V' を V の部分集合とし、V' 上のポテンシャル s が与えられたとき V 上のポテンシャル f を以下で定める。(ディリクレ問題の解)

$$\Delta f(x) = 0 \qquad for\ all\ \ x \in V \setminus V',\ \ f|_{V'} = s \tag{1.4}$$

このとき、$g|_{V'} = s$ となる V 上の任意のポテンシャル g に対して

$$\mathcal{E}_C(g, g) \geq \mathcal{E}_C(f, f) \tag{1.5}$$

が成り立つ。さらに、(1.4) の解は唯一であり (1.5) を満たす関数 f はこの解に限られる。

「エネルギー消費量が最小となるようにポテンシャルを決めると、それが電位（(1.3) の意味でキルヒホッフの法則を満たすもの）である。」

証明（飛ばす）： (1.4) の解の存在を仮定して示す（解の存在は２節で）。f を (1.4) の解の一つとし、$g|_{V'} = s$ なる g を任意に取ると、$x \in V \setminus V'$ のとき $\Delta f(x) = 0$ なので

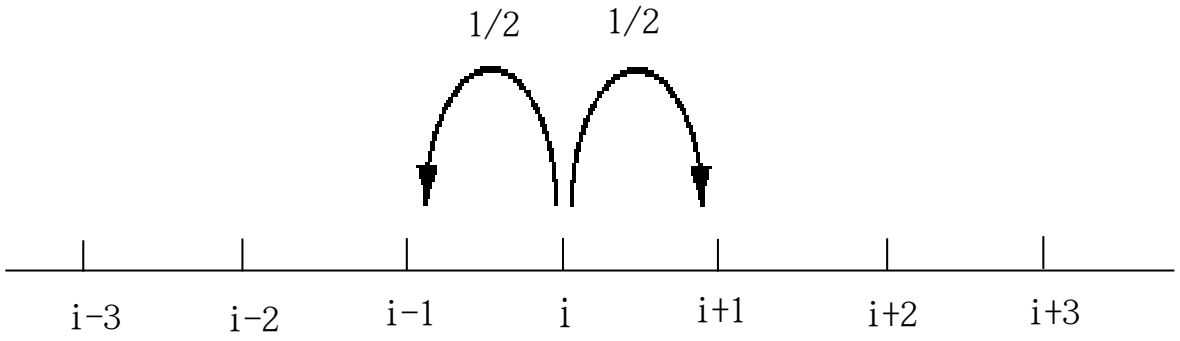
$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_C(g, f) &= -(g, \Delta f)_C = -\sum_{x \in V} g(x)\Delta f(x)C_x \\
&= -\sum_{x \in V'} g(x)\Delta f(x)C_x = -\sum_{x \in V'} f(x)\Delta f(x)C_x \\
&= -(f, \Delta f)_C = \mathcal{E}_C(f, f)
\end{aligned}$$

となる。式変形の中で、(1.4)、$g|_{V'} = s = f|_{V'}$ と命題 1.3 を用いた。よって

$$0 \leq \mathcal{E}_C(g - f, g - f) = \mathcal{E}_C(g, g) + \mathcal{E}_C(f, f) - 2\mathcal{E}_C(f, g) = \mathcal{E}_C(g, g) - \mathcal{E}_C(f, f)$$

となり、f が (1.5) を満たすことがわかった。

$\mathcal{E}_C$ の定義と、回路の連結性から、$\mathcal{E}_C(g-f, g-f) = 0$ となるのは $g - f$ が定数のときに限られる。f, g は V' 上ともに s となり一致しているから、結局 $g = f$。つまり、(1.5) を満たすのは f に限られる。これは (1.4) の解が唯一であることも示している。 ∎



2　電気回路に対応するマルコフ連鎖

粒子の動きが 現在の粒子の位置と 1 秒後にどこに移るかの確率（推移確率）のみで決まり、それまでの粒子の動き（過去の履歴）によらないとき、このようなランダムな粒子の動きをマルコフ連鎖と呼ぶ。特に、推移確率が（境界点を除いては）点によらないようなマルコフ連鎖を、ランダムウォーク（酔歩）という。

マルコフ連鎖の時刻 n での粒子の位置を X_n で表す。

＊電気回路 (V, C) について、$P_{xy} = C_{xy}/C_x$ とする。推移確率が $\{P_{xy}\}_{x,y\in V}$ で与えられるマルコフ連鎖を、(V, C) に対応するマルコフ連鎖と呼ぶ。

電位の確率論的解釈　(V, C)：電気回路

２点 $a, b \in V$ をとり、a, b 間に電圧１ボルトをかけbを接地する。

1 節の議論から、このときに各点にかかる電位vは

$$v(a) = 1, \quad v(b) = 0, \qquad \Delta v(x) = 0 \ \text{ for all } \ x \in V \setminus \{a, b\} \tag{2.2}$$

となる。最後の式を変形すると、次のようになる。

$$v(x) = \sum_{y \in V} \frac{C_{xy}}{C_x} v(y) = \sum_y P_{xy} v(y) \tag{2.3}$$

対応するマルコフ連鎖を用いて、次のような量を導入しよう。

$$h(x) = P^x(\sigma_a < \sigma_b) \qquad \text{for all } x \in V \tag{2.4}$$

P^x：xから出発するマルコフ連鎖（つまり $X_0 = x$）に関する確率

σ_a：マルコフ連鎖がaに初めてたどり着いた時刻

(2.4) は、「xから出発した粒子がbに着く前にaに戻る確率」を表す。

- 明らかに $h(a) = 1, h(b) = 0$
- $x \neq a, b$ のとき、1 秒後に粒子がどの位置に動くかに分けて考えることにより $h(x) = \sum_{y \in V} P_{xy} h(y)$ が分かる。(“マルコフ性”より)

つまり、h は (2.2) を満たす。命題 1.4 より、$h(x)$ がこの回路の x での電位を表す。

命題 **2.1** $v(a) = 1, v(b) = 0$ としたときの x での電位 $v(x)$ は、対応するマルコフ連鎖で x から出発した粒子が b に着く前に a に戻る確率に等しい。

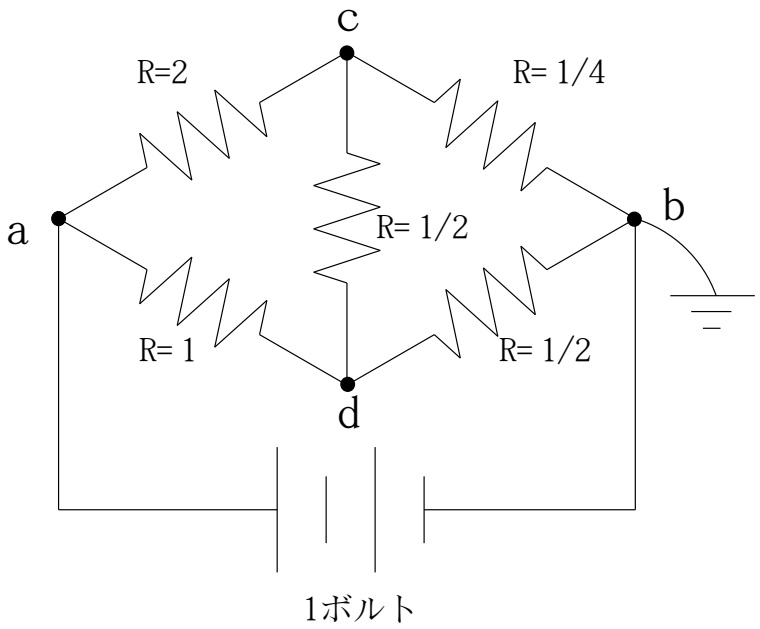
この事実を使うと、(1.4) の解の存在も示される。

系 **2.2** $h^a(x) = P^x(\sigma_a < \sigma_{V' \setminus \{a\}})$ とすると、以下は (1.4) の解である。

$$f(x) = \sum_{a \in V'} s(a) h^a(x)$$

（レポート問題１）下図の点c, dでの電位を求め、その確率論的意味を述べよ。

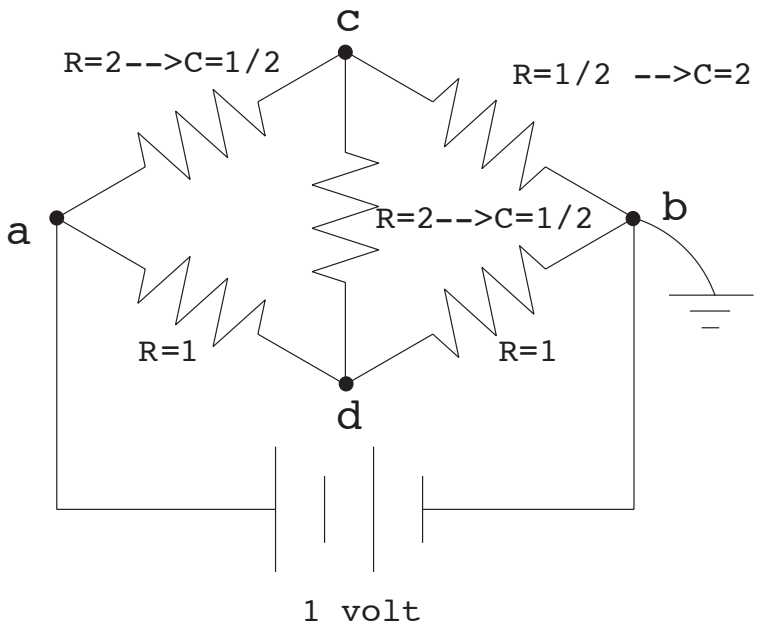
（図中Rは抵抗値を表すものとする。）



電流についても、次のようにその確率論的解釈を与えることができる。

命題 2.3 電源からaへの流入電流量が 1 となるようにaとbに電圧をかけたとき、ボンド$\{x, y\}$をxからyに流れる電流i_{xy}は、対応するマルコフ連鎖でaから出た粒子がbに着く直前までに$\{x, y\}$を$x \to y$方向に通った回数の平均を表す。

（例題１）下図の点c, dでの電位を求め、その確率論的意味を述べよ。



（解答）　求める電位をfで表すと、$f(a) = 1, f(b) = 0$であり、

$$\Delta f(c) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} f(d) + 2 \times 0)/3 - f(c) = 0,$$

$$\Delta f(d) = (1 + \frac{1}{2} f(c) + 0)/(5/2) - f(d) = 0$$

これを解いて、$f(c) = 7/29, f(d) = 13/29$を得る。

$f(x)$は、xから出発した粒子がbに着く前にaに戻る確率を表す。

3 有効抵抗と脱出確率、無限グラフ上の電気回路と 対応するマルコフ連鎖の再帰性

定義 **3.1** a, b間に電圧を加え$v(a) = 1, v(b) = 0$としたとき、$R(a,b) = 1/i_a$（$i_a = \sum_x i_{ax}$は電源からaへの流入電流量）をa, b間の有効抵抗 (effective resistance) という。

（注意）抵抗値R_1とR_2の二つの抵抗を直列につなぐと、両端の有効抵抗は$R_1 + R_2$、並列につなぐと、両端の有効抵抗は$(1/R_1 + 1/R_2)^{-1}$になる。

有効抵抗の確率論的意味　次のような脱出確率を考える。

$$P_{\mathrm{esc}}(a,b) = P^a(\sigma_b < \min\{n \geq 1 : X_n = a\})$$

言葉で表すと、「aから出る粒子が、aに戻る前にbにたどり着く確率」である。

命題 **3.2**　　$P_{esc}(a,b) = \frac{1}{C_a R(a,b)}$

証明：　$i_a^1 = \sum_{y \in V} i_{ay}^1 = \sum_y (v^1(a) - v^1(y)) P_{ay} C_a = C_a(1 - \sum_y P_{ay} v^1(y))$ である。

命題2.1より $v^1(y)$ は y から出た粒子が b に着く前に a に着く確率であり、従って

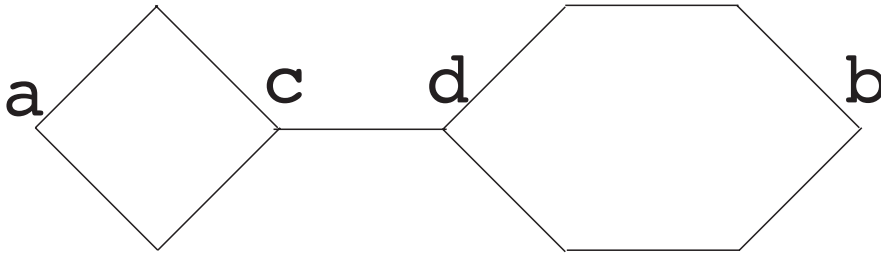
$\sum_y P_{ay} v^1(y)$ は a から出た粒子が b に着く前に a に戻る確率を表す。よって上式の

右辺の値は $C_a P_{\mathrm{esc}}(a,b)$ に等しいので、命題が証明された。

次の法則は、直感的には明らか（数学的にきちんと証明することもできる）。

命題 **3.3**　（ショート則）回路内の複数の点をショートすると、有効抵抗は減少する。

（カット則）回路内のボンドを切ると、有効抵抗は増大する。



（例題）上図の辺上を動く虫がいるとする。虫は図形の頂点にさしかかるまでは方向転換をすることなく進み続け、頂点では等確率でいずれかの辺上に動いていくものとする。このとき、点aから出発した虫がaに戻る前にbに着く確率を求めよ。

（解答）直列つなぎ、並列つなぎによって有効抵抗がどうなるかを考えると、ac間の有効抵抗は1、db間の有効抵抗は$3/2$となり、従ってab間の有効抵抗は$7/2$である。$c_a = 2$だから、命題3.2より求める確率は$\frac{1}{2\times 7/2} = \frac{1}{7}$となる。

(V, B)：無限グラフ　「V の元の数が無限個（可算無限個）である連結グラフ」

＊(xから出るボンドの数) $< \infty$ for all $x \in V$ を仮定。

このグラフ上の電気回路、対応するマルコフ連鎖を、1, 2 節と同様に定める。

X_n：n秒後の粒子の位置、P^x：xから出発する粒子についての確率

定義 **3.4** $P^x(\min\{n \geq 1 : X_n = x\} < \infty) = 1$ のとき、このマルコフ連鎖は

（xにおいて）再帰的（**recurrent**）であると言い、

$P^x(\min\{n \geq 1 : X_n = x\} < \infty) < 1$ のとき、非再帰的（**transient**）であると言う。

- 連結なグラフ (V, B) においては、電気回路に対応するマルコフ連鎖が再帰的であるか否かは、初期点$x \in V$ の取り方によらずに定まる。
- 対応するマルコフ連鎖が再帰的 $\Leftrightarrow P^x(\{$ 粒子が無限回xに戻る $\}) = 1,\ \forall x$

マルコフ連鎖の型問題：マルコフ連鎖が再帰的か非再帰的かを調べる問題

有限グラフ近似列　無限グラフ (V, B) に対して、

$$(V_1, B_1) \subset (V_2, B_2) \subset \cdots \subset (V, B)$$

となる連結な有限グラフの列で、$n \to \infty$ のとき $V_n \to V, B_n \to B$ となるものを (V, B) の有限グラフ近似列という。

$\partial V_n := \{x \in V_n : \{x, y\} \in B$ で $\{x, y\} \notin B_n$ なるものが存在する $\}$ と定める。

$$R_{\mathrm{eff}}(x) := \lim_{n\to\infty} R(x, \partial V_n), \quad P_{\mathrm{esc}}(x) := \lim_{n\to\infty} P_{\mathrm{esc}}(x, \partial V_n)$$

- 「$P_{\mathrm{esc}}(x)$ が 0 であるか否か」、「$R_{\mathrm{eff}}(x)$ が無限であるか否か」についての議論の場合、単に P_{esc}, R_{eff} と書くことにすると、

$$\text{マルコフ連鎖が再帰的} \Leftrightarrow P_{\mathrm{esc}} = 0 \Leftrightarrow R_{\mathrm{eff}} = \infty \tag{3.1}$$

4　再帰性についてのポーヤの問題

$\mathbb{Z}^d$：d次元ユークリッド空間の格子点全体を頂点の集合とし、これらの点のうち距離が 1 のものを結んだ線分をボンドの集合とする無限グラフ。

$\mathbb{Z}^d$のシンプルランダムウォーク：各点からボンドでつながった点への推移確率がいずれも$1/(2d)$であるもの。

定理 4.1（ポーヤ 1921）$\mathbb{Z}^d$上のシンプルランダムウォークは$d = 1, 2$のとき再帰的であり、$d \geq 3$のとき非再帰的である。

（証明 1 ：直接的証明）　m：原点から出発した粒子が原点を通る回数の平均

u_n：時刻nで粒子が原点にいる確率、　$m = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$。

このとき、「再帰的」$\Leftrightarrow$「$m = \infty$」なので、以下mを計算する。

$d=1$の場合

$$u_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} {}_{2n}C_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} n! n!}$$

ここで$n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$（スターリングの公式）を用いて上の式を計算すると、

$u_{2n} \sim 1/\sqrt{\pi n}$。従って$m = \sum_n u_{2n} \asymp \sum_n 1/\sqrt{\pi n} = \infty$となり、再帰的である。

（注）$f_n \sim g_n$：　$\lim_{n\to\infty} f_n/g_n = 1$となること。

$f_n \asymp g_n$：　$c_1, c_2 > 0$が存在して、任意のnについて$c_1 \le f_n/g_n \le c_2$となること。

$d=2$の場合

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} \\ &= \frac{1}{4^{2n}} {}_{2n}C_n \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \ {}_nC_{n-k} = \left(\frac{1}{2^{2n}} {}_{2n}C_n\right)^2 \sim \frac{1}{\pi n} \end{aligned}$$

となり、$m \asymp \sum_n 1/(\pi n) = \infty$を得るので、これも再帰的である。

$d = 3$の場合

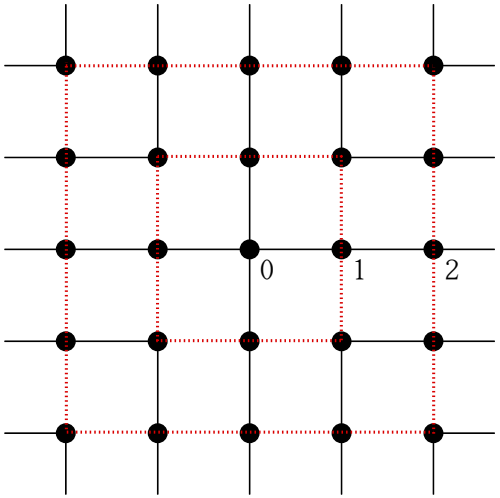
$$u_{2n} = \frac{1}{6^{2n}} \sum_{\substack{0 \le j,k \\ j+k \le n}} \frac{(2n)!}{j!j!k!k!(n-j-k)!(n-j-k)!}$$

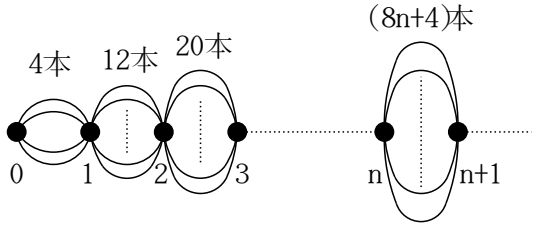
となる。計算は略すが（[1] などを参照のこと）、整理すると、ある定数Mを使って$u_{2n} \le M/n^{3/2}$となる。従って$m \le \sum_n M/n^{3/2} < \infty$となり、今度は非再帰的になる。

$d \ge 4$の場合　$d = 3$より“戻りにくい”$d \ge 4$でも非再帰的である。

$\mathbb{Z}^d$の再帰性、非再帰性では、

$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$の収束発散（$s > 1$のとき収束、$s \le 1$のとき発散）　が鍵になっている。





(証明２：電気回路を使った証明：$d=1,2$の場合のみ紹介)

$\mathbb{Z}^2$をショートして、上図のような電気回路(V_2, B_2)を作る。

nと$n+1$の間の抵抗値は$1/(8n+4)$。よってこの回路の0から∞への有効抵抗は

$$R_{\mathrm{eff}}^{V_2}(0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{8k+4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{8k+4} = \infty$$

ショート則より$R_{\mathrm{eff}}^{V_2}(0) \le R_{\mathrm{eff}}^{\mathbb{Z}^2}(0)$。従って、(3.1)より$\mathbb{Z}^2$では再帰的である。

$d=1$の場合　カット則より$\infty = R_{\mathrm{eff}}^{\mathbb{Z}^2}(0) \le R_{\mathrm{eff}}^{\mathbb{Z}^1}(0)$。従って$\mathbb{Z}^1$でも再帰的である。

5　ポアソン方程式とその応用

(V, C)：電気回路、$\ell(V)$：V 上の関数（ポテンシャル）全体

命題 5.1　（ポアソン方程式の解 ）$g \in \ell(V)$ が与えられたとき、

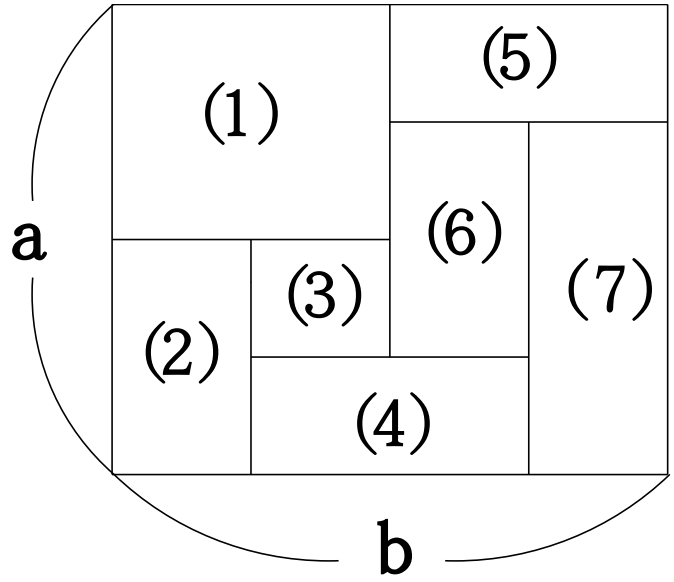
$$\Delta f(x) = g(x) \qquad for\ all\ \ x \in V \tag{5.6}$$

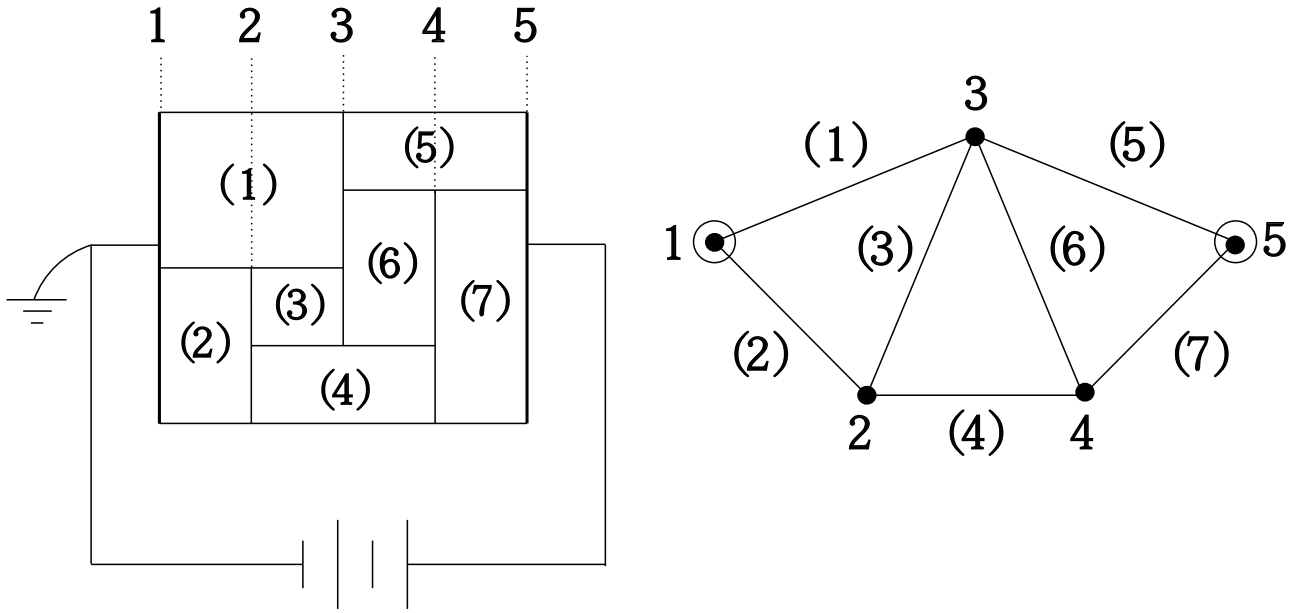
を満たす $f \in \ell(V)$ が存在するための必要十分条件は g が $(g, 1)_C = 0$ を満たすことである。（1 は V 上常に 1 という値をとる定数関数。）さらに、このとき上の方程式の解は定数の違いを除いて一意的に定まる。（つまり f_1, f_2 が共に (5.6) の解ならば $f_1 - f_2$ は定数関数である。）

証明：　$\text{Image}\ \Delta = \{g \in \ell(V) : (g, f)_C = 0,\ \ \forall\ f \in \text{Ker}\ \Delta\} = \{g \in \ell(V) : (g, 1)_C = 0\}$ より、命題の初めの主張が示せた。また、f_1, f_2 が (5.6) の 2 つの解であるとき $f_1 - f_2 \in \text{Ker}\ \Delta$ であるから、差は定数関数である。

定理 5.2 （応用：デーンの定理 *1903*年、[2, 3] 参照）

K を縦の長さ a、横の長さ b の長方形とする。K が、縦横の比が有理数であるような有限個の長方形に分割されるならば、a, b の比は有理数（つまり $a/b \in \mathbf{Q}$）である。特に、K が有限個の正方形に分割されれば a, b の比は有理数である。





定理5.2の証明：　$a=1$としてよい。各ボンド(i)にコンダクタンスとして

$$(\text{ 小長方形}(i)\text{の縦の長さ })/(\text{ 小長方形}(i)\text{の横の長さ })$$

を与える。仮定からこの値は有理数である。

さて、このようにして作られた電気回路(V,C)に対して、$f\in\ell(V)$を

$f(i)=(\text{ 線分}1\text{から線分}i\text{までの距離 })$と定義すると、$f(1)=0, f(n)=b$である。

さらに、$\{i,j\} \in B$ に対して

$$C_{ij}(f(j)-f(i)) = \mathrm{sgn}(i,j)\cdot(\{i,j\}\text{に対応する小長方形の縦の長さ(の和)})$$

(但し $\mathrm{sgn}(i,j)=1$ if $j>i$, $\mathrm{sgn}(i,j)=-1$ if $j<i$ と定める) となるから、これを用いると、$i \in \{2,3,\cdots,n-1\}$ のとき

$$\begin{aligned}\Delta f(i) &= \frac{1}{C_i}\sum_{j\in V} C_{ij}(f(j)-f(i)) \\ &= \frac{1}{C_i}\{(i\text{を左辺とする小長方形の縦辺の長さの和}) \\ &\qquad -(i\text{を右辺とする小長方形の縦辺の長さの和})\} = 0\end{aligned}$$

(但し $C_i = \sum_j C_{ij}$) となり、さらに

$$\Delta f(1) = 1/C_1, \qquad \Delta f(n) = -1/C_n$$

となる。

つまり f は

$$g(x) = \begin{cases} 1/C_1 & x = 1, \\ -1/C_n & x = n, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

としたときの $\Delta f = g$ の解である（$(g,1)_C = C_1/C_1 - C_n/C_n = 0$ であるから、このポアソン方程式の解は定数の違いを除いて唯一である）。今、C_{ij} はすべて有理数であり g の取る値も有理数であるから、以下の補題5.1よりすべての $i, j \in V$ に対して $f(i) - f(j) \in \mathbf{Q}$、特に $f(n) = f(n) - f(1) = b \in \mathbf{Q}$ である。 ∎

補題 **5.1** (V, C)：コンダクタンスの値がすべて有理数（$C_{xy} \in \mathbf{Q}$ *for all* $\{x, y\} \in B$）

$g \in \ell(V)$ ：任意の $x \in V$ について $g(x) \in \mathbf{Q}$ かつ $(g,1)_C = 0$ を満たす。

$\Rightarrow$ ポアソン方程式 $\Delta f = g$ の解 f は常に $f(x) - f(y) \in \mathbf{Q}$ *for all* $x, y \in V$ を満たす。

結び：　本講議では、電気回路を題材として、離散調和解析学、離散確率過程論の初歩を学んだ。電気回路のもつエネルギー（二次形式）が差分作用素と関係し、対応するランダムウォークの再帰性などの諸性質と結びつくところに、数学の奥深さの一端を垣間見ていただければ何よりである。

（レポート問題２）講議の内容に関する感想や、講議に関連したテーマについて各自で勉強した内容を記せ。（レポート用紙に１枚以上書くこと。ネットからの丸写しは禁止。）

参考文献

[1]　舟木直久, 確率論, 朝倉書店, 2004

[2]　熊谷隆, 確率論, 共立出版, 2003

[3]　砂田利一, 分割の幾何学 -デーンによる２つの定理-, 日本評論社, 2000