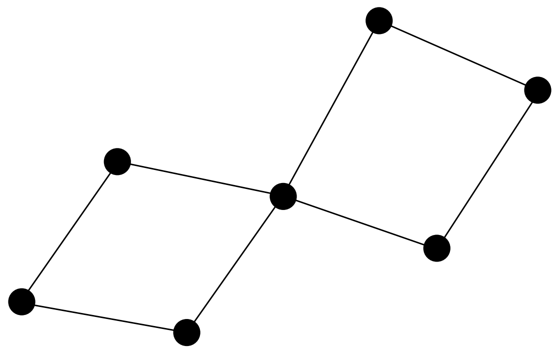
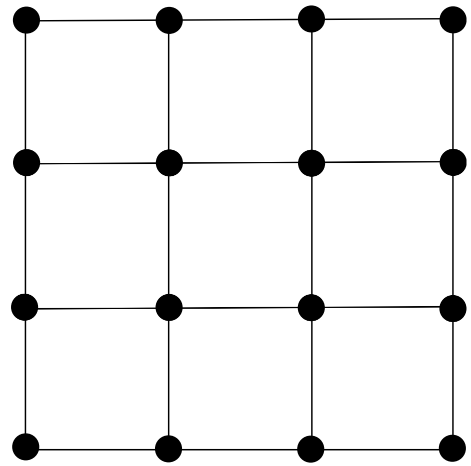
ランダムウォークと調和解析学

熊谷　隆（数理解析研究所）

http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kumagai/

1　有限グラフ上の電気回路

(V,B)：有限グラフ

有限個の点の集合Vと、Vの２つの要素を結んだ線（ボンド）の集合Bのペア

　x,y,z：Vの元、　$\{x,y\}$：$x,y\in V$を結ぶBの元

<u>仮定</u>　a) (V,B)は連結、 b) $x\in V$に対して$\{x,x\}$というボンドはない。

このグラフから電気回路を作る。

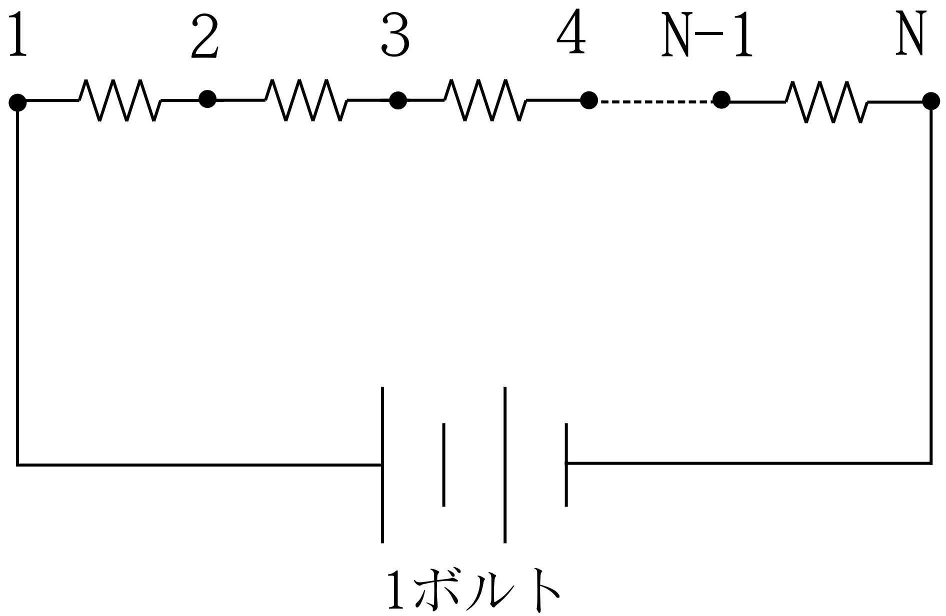
各ボンド $\{x, y\} \in B$ にコンダクタンス $C_{xy} > 0$ を置く。

（抵抗 $R_{xy} = 1/C_{xy}$ を置くと言ってもいい）。

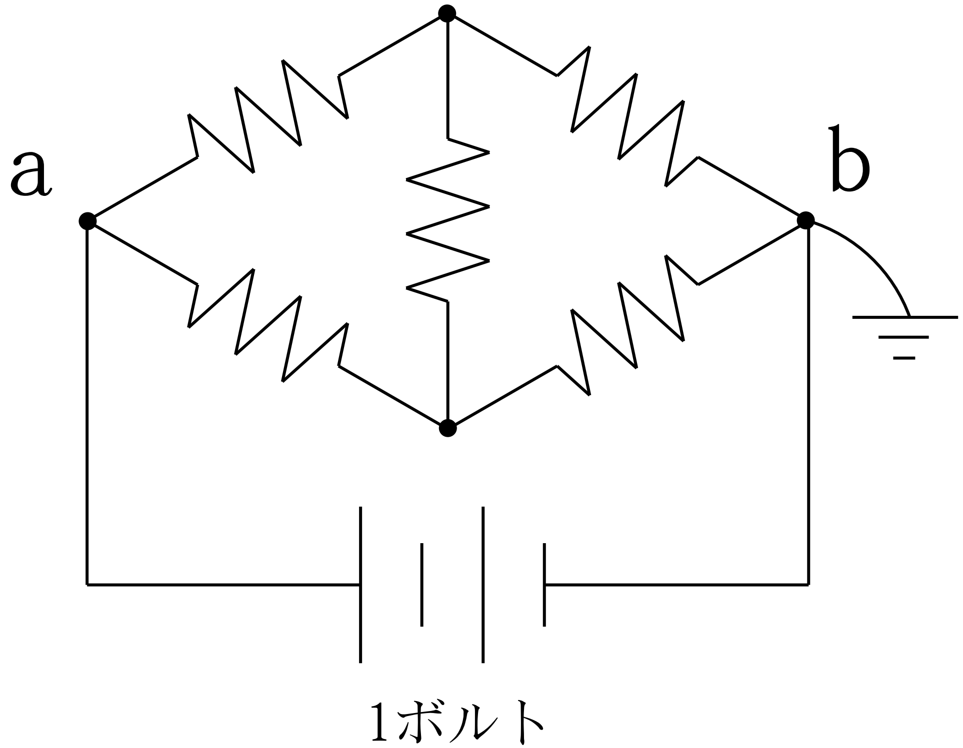
- $\{x, y\} \notin B$ のときは、$C_{xy} = 0$。
- $C_{yx} = C_{xy}$
- $x \in V$ に対して、$C_x = \sum_{y \in V} C_{xy}$ とおく。

このように決めた電気回路を電気回路 (V, C) と呼ぶ。

(Q) $x_0, y_0 \in V$ の間に電圧をかけたとき、各点での電位（$v(x)$ で x の電位を表す）、各ボンドを流れる電流（i_{xy} で x から y への電流を表す）はどうなるか？



例　1



例　2

オーム（Ohm）の法則

２点間の電圧（電位差）は流れる電流と抵抗の積に等しい。

$$v(x) - v(y) = i_{xy} R_{xy} \qquad \text{for all} \;\; \{x, y\} \in B \tag{1.1}$$

キルヒホッフ（Kirchhoff）の法則

x_0, y_0 以外の点では、流入電流量の和と流出電流量の和は等しい。

$$\sum_{\substack{y \in V \\ \{x,y\} \in B}} i_{xy} = 0 \qquad \text{for all} \;\; x \in V, \;\; x \neq x_0, y_0 \tag{1.2}$$

オームの法則を適用すると、(1.2) は次のように表せる。

$$\sum_{\substack{y \in V \\ \{x,y\} \in B}} (v(x) - v(y)) C_{xy} = 0 \qquad \text{for all} \;\; x \in V, \;\; x \neq x_0, y_0 \tag{1.3}$$

定義 1.1 V 上の関数 f（以下では V 上の関数のことを V 上のポテンシャルと呼ぶ）に対して、差分作用素 Δ を次のように定める。

$$\Delta f(x) = \frac{1}{C_x} \sum_{\substack{y \in V \\ \{x,y\} \in B}} (f(y) - f(x)) C_{xy} = \sum_{\substack{y \in V \\ \{x,y\} \in B}} \frac{C_{xy}}{C_x} f(y) - f(x)$$

- $f(x)$ が x の電位を表すとき、$\Delta f(x)$ は x に流れる電流量を C_x で割ったもの。
- $\Delta f(x) = 0$ のとき、f は x で調和であるという。

  x で調和 $\Leftrightarrow$ x で (1.3) の意味でキルヒホッフの法則を満たす。

例 1 の回路の場合、

$$\Delta f(i) = \frac{1}{2}\{f(i+1) + f(i-1) - 2f(i)\} \qquad 1 < i < N$$

定義 1.2 V 上のポテンシャル f が与えられたとき、この回路のエネルギー消費量 を以下のように定義する。

$$\mathcal{E}_C(f,f) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{x\in V\\ y\in V}}(f(x)-f(y))^2 C_{xy}$$

- 中学・高校で習った公式 $E = VI (= V^2/R)$ に合致している。
- $\sum$ によりひとつのボンドを $\{x,y\},\{y,x\}$ と 2 回加えているため、2 で割っている。

V 上のポテンシャル f,g に対して一般に、以下のように定める。

$$\mathcal{E}_C(f,g) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{x\in V\\ y\in V}}(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) C_{xy}$$

命題 1.3 （ガウス-グリーンの公式） V 上のポテンシャル f, g に対して $(f,g)_C = \sum_{x\in V} f(x)g(x)C_x$ とすると、以下が成り立つ。

$$\mathcal{E}_C(f,g) = -(f, \Delta g)_C$$

証明：

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_C(f,g) &= \frac{1}{2}(\sum_{x,y\in V} f(x)g(x)C_{xy} + \sum_{x,y} f(y)g(y)C_{xy}) - \sum_{x,y} f(x)g(y)C_{xy} \\
&= \sum_{x,y} f(x)g(x)C_{xy} - \sum_{x,y} f(x)g(y)C_{xy} \\
&= -\sum_{x} f(x)\sum_{y}(g(y)-g(x))C_{xy} = -\sum_{x} f(x)\Delta g(x)C_x \\
&= -(f, \Delta g)_C
\end{aligned}$$

∎

命題 1.4 （ディリクレの原理 ） V'をVの部分集合とし、V'上のポテンシャルsが与えられたときV上のポテンシャルfを以下で定める。(ディリクレ問題の解)

$$\Delta f(x) = 0 \qquad for\ all\ \ x \in V \setminus V',\ f|_{V'} = s \tag{1.4}$$

このとき、$g|_{V'} = s$ となる V 上の任意のポテンシャルg に対して

$$\mathcal{E}_C(g,g) \geq \mathcal{E}_C(f,f) \tag{1.5}$$

が成り立つ。さらに、(1.4)の解は唯一であり(1.5) を満たす関数 f はこの解に限られる。

「エネルギー消費量が最小となるようにポテンシャルを決めると、それが電位（(1.3)の意味でキルヒホッフの法則を満たすもの）である。」

証明： (1.4)の解の存在を仮定して話を進める。(解の存在については２節で。)

fを(1.4)の解の一つとする。V上のポテンシャルgで$g|_{V'}=s$なるものを任意に取ると、$x\in V\setminus V'$のとき$\Delta f(x)=0$であるから

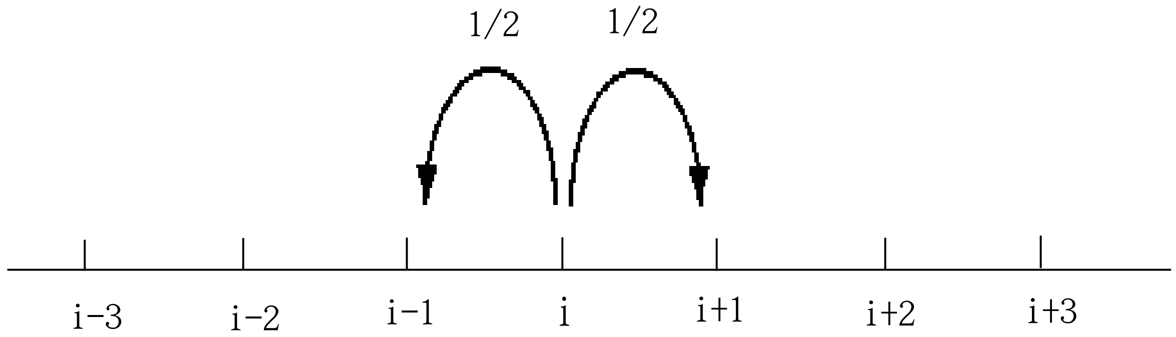
$$\begin{aligned}\mathcal{E}_C(g,f) &= -(g,\Delta f)_C = -\sum_{x\in V} g(x)\Delta f(x)C_x \\ &= -\sum_{x\in V'} g(x)\Delta f(x)C_x = -\sum_{x\in V'} f(x)\Delta f(x)C_x \\ &= -(f,\Delta f)_C = \mathcal{E}_C(f,f)\end{aligned}$$

となる。式変形の中で、(1.4)、$g|_{V'}=s=f|_{V'}$と命題1.3を用いた。よって

$$0\le \mathcal{E}_C(g-f,g-f)=\mathcal{E}_C(g,g)+\mathcal{E}_C(f,f)-2\mathcal{E}_C(f,g)=\mathcal{E}_C(g,g)-\mathcal{E}_C(f,f)$$

となり、fが(1.5)を満たすことがわかった。

$\mathcal{E}_C$の定義と、回路の連結性から、$\mathcal{E}_C(g-f,g-f)=0$となるのは$g-f$が定数のときに限られる。f,gはV'上ともにsとなり一致しているから、結局$g=f$。つまり、(1.5)を満たすのはfに限られる。これは(1.4)の解が唯一であることも示している。 ∎



2　電気回路に対応するマルコフ連鎖

粒子の動きが 現在の粒子の位置と 1 秒後にどこに移るかの確率（推移確率）のみで決まり、それまでの粒子の動き（過去の履歴）によらないとき、このようなランダムな粒子の動きをマルコフ連鎖と呼ぶ。特に、推移確率が（境界点を除いては）点によらないようなマルコフ連鎖を、ランダムウォーク（酔歩）という。

マルコフ連鎖の時刻 n での粒子の位置を X_n で表す。

＊電気回路 (V, C) について、$P_{xy} = C_{xy}/C_x$ とする。推移確率が $\{P_{xy}\}_{x,y\in V}$ で与えられるマルコフ連鎖を、(V, C) に対応するマルコフ連鎖と呼ぶ。

<u>電位の確率論的解釈</u>　(V, C)：電気回路

２点 $a, b \in V$ をとり、a, b 間に電圧 1 ボルトをかけ b を接地する。

1 節の議論から、このときに各点にかかる電位 v は

$$v(a) = 1, \quad v(b) = 0, \qquad \Delta v(x) = 0 \ \text{ for all } \ x \in V \setminus \{a, b\} \tag{2.2}$$

となる。最後の式を変形すると、次のようになる。

$$v(x) = \sum_{y \in V} \frac{C_{xy}}{C_x} v(y) = \sum_y P_{xy} v(y) \tag{2.3}$$

対応するマルコフ連鎖を用いて、次のような量を導入しよう。

$$h(x) = P^x(\tau_a < \tau_b) \qquad \text{for all } x \in V \tag{2.4}$$

P^x：x から出発するマルコフ連鎖（つまり $X_0 = x$）に関する確率

τ_a：マルコフ連鎖が a に初めてたどり着いた時刻

(2.4) は、「x から出発した粒子が b に着く前に a に戻る確率」を表す。

- 明らかに $h(a) = 1, h(b) = 0$
- $x \neq a, b$ のとき、1 秒後に粒子がどの位置に動くかに分けて考えることにより $h(x) = \sum_{y \in V} P_{xy} h(y)$ が分かる。(“マルコフ性” より)

つまり、h は (2.2) を満たす。

命題1.4 より、$h(x)$ がこの回路の x での電位を表すと分かる。

命題 **2.1** $v(a) = 1, v(b) = 0$ としたときの x での電位 $v(x)$ は、対応するマルコフ連鎖で x から出発した粒子が b に着く前に a に戻る確率に等しい。

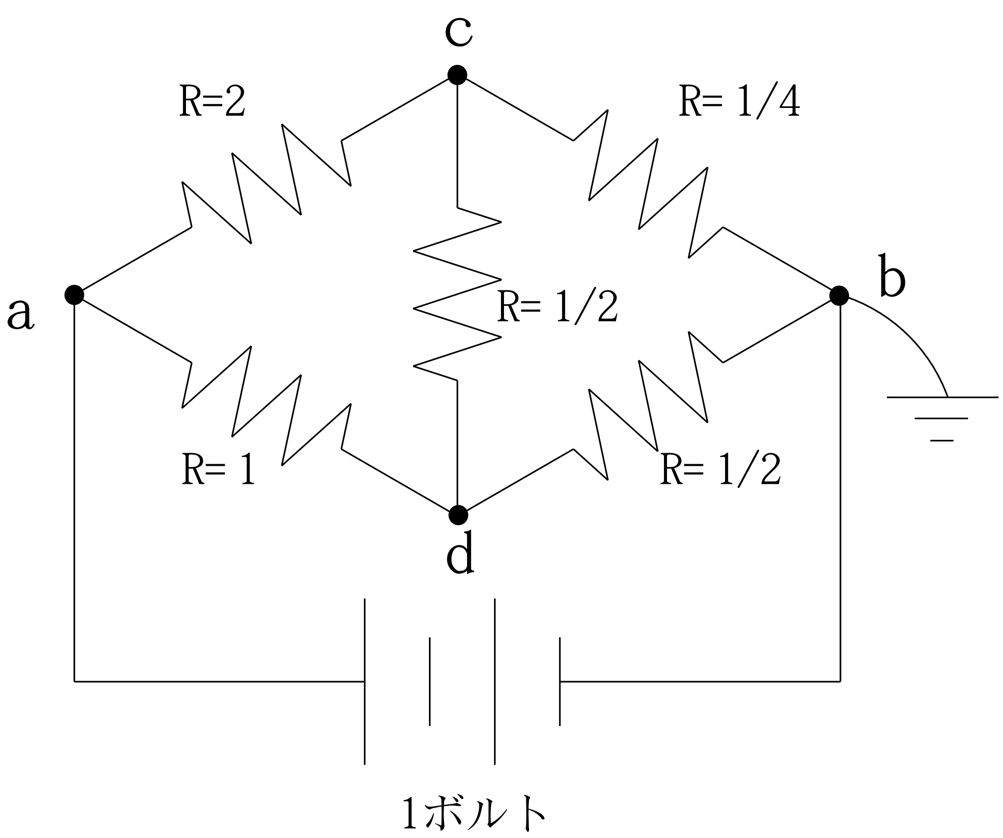
ここで述べた事実を使うと、前節で仮定していた (1.4) の解の存在も示される。

系 **2.2** $h^a(x) = P^x(\tau_a < \tau_{V' \setminus \{a\}})$ とすると、以下は (1.4) の解である。

$$f(x) = \sum_{a \in V'} s(a) h^a(x)$$

証明：　先ほどと同様にして、$h^a(a) = 1,\ h^a(y) = 0\ (y \in V' \setminus \{a\})$、$x \notin V'$のとき、$h^a(x) = \sum_y P_{xy} h^a(y)$ が分かるから、これらをたしあわせて(1.4)を得る。 ∎

（レポート問題１）下図の各点での電位を求め、その確率論的意味を述べよ。
(図中Rは抵抗値を表すものとする。)



電流についても次のようにその確率論的解釈を与えることができる。

命題 2.3 電源から a への流入電流量が 1 （b から電源への流出電流量が 1 ）となるように a と b に電圧をかけたとき、ボンド $\{x,y\}$ を x から y に流れる電流 i_{xy} は、対応するマルコフ連鎖で a から出た粒子が b に着く直前までに $\{x,y\}$ を $x \to y$ 方向に通った回数の平均を表す。

3 ポアソン方程式

(V, C)：電気回路、$\ell(V)$：V 上の関数（ポテンシャル）全体

$\mathrm{Ker}\ \Delta = \{f \in \ell(V) : \Delta f = 0\}$

$\mathrm{Image}\ \Delta = \{f \in \ell(V) : g \in \ell(V)$ で $\Delta g = f$ なるものが存在する$\}$

Δの性質

- $f, g \in \ell(V)$ に対して $(f, \Delta g)_C [= -\mathcal{E}_C(f, g) = -\mathcal{E}_C(g, f)] = (\Delta f, g)_C$
- $f \in \mathrm{Ker}\ \Delta \Leftrightarrow$ 「任意の $g = \Delta h \in \mathrm{Image}\ \Delta$ に対して

$$(f, g)_C [= (f, \Delta h)_C = (\Delta f, h)_C] = 0」\ (4.2)$$

- $\mathrm{Ker}\ \Delta = \{f$ は V 上の定数関数$\}$ (4.3)

命題 3.1 （ポアソン方程式の解）$g \in \ell(V)$ が与えられたとき、

$$\Delta f(x) = g(x) \qquad \textit{for all} \;\; x \in V \tag{3.3}$$

を満たす $f \in \ell(V)$ が存在するための必要十分条件は g が $(g, 1)_C = 0$ を満たすことである。(1 は V 上常に 1 という値をとる定数関数。) さらに、このとき上の方程式の解は定数の違いを除いて一意的に定まる。(つまり f_1, f_2 が共に (3.3) の解ならば $f_1 - f_2$ は定数関数である。)

証明：
$$\begin{aligned} \text{Image } \Delta &= \{g \in \ell(V) : (g, f)_C = 0, \;\; \text{for all } f \in \text{Ker } \Delta\} \\ &= \{g \in \ell(V) : (g, 1)_C = 0\} \end{aligned}$$

より、命題の初めの主張が示せた。また、f_1, f_2 が (3.3) の 2 つの解であるとき $f_1 - f_2 \in \text{Ker } \Delta$ であるから、差は定数関数である。 ∎

4 有効抵抗と脱出確率、無限グラフ上の電気回路と 対応するマルコフ連鎖の再帰性

定義 4.1 a, b間に電圧を加え$v(a) = 1, v(b) = 0$としたとき、$R(a,b) = 1/i_a$ （$i_a = \sum_x i_{ax}$は電源からaへの流入電流量）をa, b間の有効抵抗 (effective resistance) という。

<u>有効抵抗の確率論的意味</u>　次のような脱出確率を考える。

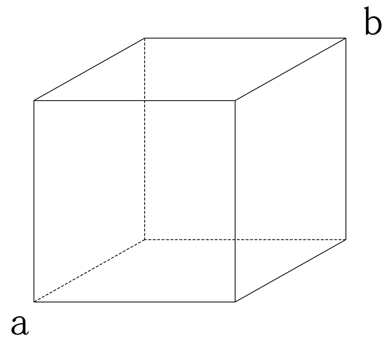
$$P_{\text{esc}}(a,b) = P^a(\tau_b < \min\{n \geq 1 : X_n = a\})$$

言葉で表すと、「aから出る粒子が、aに戻る前にbにたどり着く確率」である。

命題 4.2 $\qquad P_{esc}(a,b) = \frac{1}{C_a R(a,b)}$

証明： $\qquad i_a^1 = \sum_{y \in V} i_{ay}^1 = \sum_y (v^1(a) - v^1(y)) P_{ay} C_a = C_a(1 - \sum_y P_{ay} v^1(y))$ である。

命題2.1より$v^1(y)$はyから出た粒子がbに着く前にaに着く確率であり、従って$\sum_y P_{ay} v^1(y)$はaから出た粒子がbに着く前にaに戻る確率を表す。よって上式の右辺の値は$C_a P_{\text{esc}}(a,b)$に等しいので、命題が証明された。 ∎



（レポート問題２）上図のような立方体の辺上を動く虫がいるとする。虫は立方体の頂点にさしかかるまでは方向転換をすることなく進み続け、頂点では等確率でいずれかの辺上に動いていくものとする。このとき、点aから出発した虫がaに戻る前にbに着く確率を求めよ。

次の法則は、直感的には明らかであり、有効抵抗の定義から数学的にきちんと証明することもできる。(証明は文献[1, 3] などを参照のこと。)

命題 4.3（ショート則）回路内の複数の点をショートすると、有効抵抗は減少する。
（カット則）回路内のボンドを切ると、有効抵抗は増大する。

(V,B)：無限グラフ　「V の元の数が無限個（可算無限個）である連結グラフ」

$*$ (xから出るボンドの数) $< \infty$ for all $x \in V$ を仮定。

このグラフ上の電気回路、対応するマルコフ連鎖を、$1,2$ 節と同様に定める。

X_n：n秒後の粒子の位置、P^x：xから出発する粒子についての確率

定義 4.4 $P^x(\min\{n \geq 1 : X_n = x\} < \infty) = 1$ のとき、このマルコフ連鎖は（xにおいて）再帰的（**recurrent**）であるという。

$P^x(\min\{n \geq 1 : X_n = x\} < \infty) < 1$ のとき、このマルコフ連鎖は（xにおいて）非再帰的（**transient**）であるという。

- 連結なグラフ (V,B) においては、電気回路に対応するマルコフ連鎖が再帰的であるか否かは、初期点$x \in V$ の取り方によらずに定まる。

- 対応するマルコフ連鎖が再帰的$\Rightarrow P^x(\{$ 粒子が無限回xに戻る$\}) = 1\ \forall x$

マルコフ連鎖の型問題：マルコフ連鎖が再帰的か非再帰的かを調べる問題

有限グラフ近似列　無限グラフ (V,B) に対して、

$$(V_1,B_1)\subset(V_2,B_2)\subset\cdots\subset(V,B)$$

となる連結な有限グラフの列で、$n\to\infty$ のとき $V_n\to V, B_n\to B$ となるものを (V,B) の有限グラフ近似列という。

$\partial V_n := \{x\in V_n : \{x,y\}\in B$ で $\{x,y\}\notin B_n$ なるものが存在する $\}$ と定める。

$$R_{\mathrm{eff}}(x) := \lim_{n\to\infty} R(x,\partial V_n),\quad P_{\mathrm{esc}}(x) := \lim_{n\to\infty} P_{\mathrm{esc}}(x,\partial V_n)$$

● 「$P_{\mathrm{esc}}(x)$ が 0 であるか否か」、「$R_{\mathrm{eff}}(x)$ が無限であるか否か」についての議論の場合、単に P_{esc}, R_{eff} と書くことにすると、

$$\text{マルコフ連鎖が再帰的} \Leftrightarrow P_{\mathrm{esc}}=0 \Leftrightarrow R_{\mathrm{eff}}=\infty \tag{4.1}$$

5　再帰性についてのポーヤの問題

$\mathbf{Z}^d$：d次元ユークリッド空間の格子点全体を頂点の集合とし、これらの点のうち距離が 1 のものを結んだ線分をボンドの集合とする無限グラフ。

$\mathbf{Z}^d$ のシンプルランダムウォーク：各点からボンドでつながった点への推移確率がいずれも $1/(2d)$ であるもの。

定理 5.1（ポーヤ 1921）$\mathbf{Z}^d$ 上のシンプルランダムウォークは $d = 1, 2$ のとき再帰的であり、$d \geq 3$ のとき非再帰的である。

（証明 1：直接的証明）　m：原点から出発した粒子が原点を通る回数の平均

u_n：時刻 n で粒子が原点にいる確率、　$m = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$。

このとき、「再帰的」$\Leftrightarrow$「$m = \infty$」

理由：$\mathbf{Z}_N^d = \mathbf{Z}^d \cap [-N, N]^d$ とすると、

$$m_N = \sum_{k=1}^{\infty} k(1 - P_{\mathrm{esc}}(0, \partial \mathbf{Z}_N^d))^{k-1} P_{\mathrm{esc}}(0, \partial \mathbf{Z}_N^d) = \frac{1}{P_{\mathrm{esc}}(0, \partial \mathbf{Z}_N^d)}$$

となるから、$N \to \infty$ として $m = 1/P_{\mathrm{esc}}(0)$。(4.1) と合わせ、結論を得る。

そこで u_n を計算する。$u_{2n+1} = 0$ なので、u_{2n} を計算する。

$d = 1$ の場合

$$u_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} {}_{2n}C_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} n! n!}$$

ここで $n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$（スターリングの公式）を用いて上の式を計算すると、

$u_{2n} \sim 1/\sqrt{\pi n}$。従って $m = \sum_n u_{2n} \asymp \sum_n 1/\sqrt{\pi n} = \infty$ となり、再帰的である。

（注）$f_n \sim g_n$：　$\lim_{n\to\infty} f_n/g_n = 1$ となること。

$f_n \asymp g_n$：　$c_1, c_2 > 0$ が存在して、任意の n について $c_1 \leq f_n/g_n \leq c_2$ となること。

$d=2$の場合

$$
\begin{aligned}
u_{2n} &= \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{4^{2n}} {}_{2n}C_n \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \ {}_nC_{n-k} = (\frac{1}{2^{2n}} {}_{2n}C_n)^2 \sim \frac{1}{\pi n}
\end{aligned}
$$

となり、$m \asymp \sum_n 1/(\pi n) = \infty$を得るので、これも再帰的である。

$d = 3$ の場合

$$u_{2n} = \frac{1}{6^{2n}} \sum_{\substack{0 \le j,k \\ j+k \le n}} \frac{(2n)!}{j!j!k!k!(n-j-k)!(n-j-k)!}$$

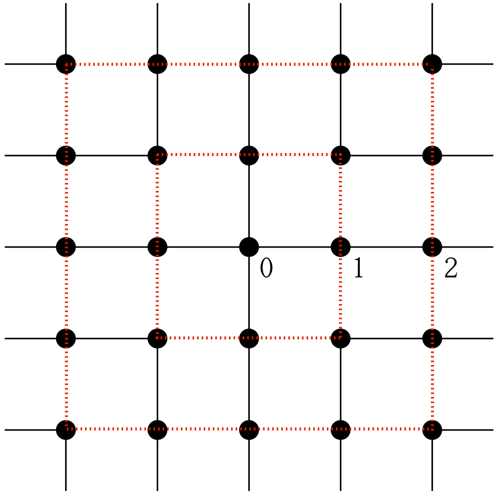
となる。計算は略すが（[2] などを参照のこと)、整理すると、ある定数 M を使って

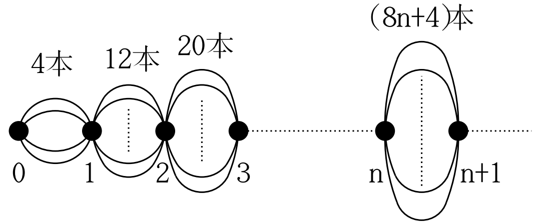
$u_{2n} \le M/n^{3/2}$ となる。従って $m \le \sum_n M/n^{3/2} < \infty$ となり、今度は非再帰的になる。

$d \ge 4$ の場合　$d = 3$ より "戻りにくい" $d \ge 4$ でも非再帰的である。

$\mathbf{Z}^d$ の再帰性、非再帰性では、

$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ の収束発散（$s > 1$ のとき収束、$s \le 1$ のとき発散） が鍵になっている。





（証明２：電気回路を使った証明：$d = 1, 2$ の場合のみ紹介）

$\mathbf{Z}^2$ をショートして、上図のような電気回路 (V_2, B_2) を作る。

n と $n+1$ の間の抵抗値は $1/(8n+4)$。よってこの回路の 0 から ∞ への有効抵抗は

$$R_{\text{eff}}^{V_2}(0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{8k+4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{8k+4} = \infty$$

ショート則より $R_{\text{eff}}^{V_2}(0) \le R_{\text{eff}}^{\mathbf{Z}^2}(0)$。従って、(4.1) より $\mathbf{Z}^2$ では再帰的である。

$d = 1$ の場合　カット則より $\infty = R_{\text{eff}}^{\mathbf{Z}^2}(0) \le R_{\text{eff}}^{\mathbf{Z}^1}(0)$。従って $\mathbf{Z}^1$ でも再帰的である。

６　熱核の評価、調和関数の性質

マルコフ連鎖$\{X_n\}_n$の熱核は$p_n(x,y) := P^x(X_n = y)/C_y$と表される。

このとき、$p_n(x,y) = p_n(y,x)$である。　$\mu(A) = \sum_{x\in A} C_x$とおく。

$f : V \to \mathbb{R}$に対して、熱方程式

$$u(n+1,x) - u(n,x) = \Delta u(n,\cdot)(x), \quad u(0,x) = f(x)$$

の解$u : (\mathbb{N} \cup \{0\}) \times V \to \mathbb{R}$は、

$$u(n,x) = \sum_{y\in V} p_n(x,y) f(y) C_y$$

と表される。

定理 6.1 （ナッシュ不等式）$d > 0$ とする（自然数でなくてもよい)。$p_n(x,y)$ が

$$p_n(x,y) \le c_1 n^{-d/2} \qquad \textit{for all} \;\; x,y \in V, n \ge 1 \tag{6.1}$$

を満たすための必要十分条件は、２次形式 $\mathcal{E}$ が

$$\|u\|_{L^2}^{2+\frac{4}{d}} \le c_2\, \mathcal{E}_C(u,u) \cdot \|u\|_{L^1}^{\frac{4}{d}} \qquad \textit{for all} \;\; u : V \to \mathbb{R} \tag{6.2}$$

を満たすことである。ただし、 $\|u\|_{L^p} = (\sum_{x\in V} |u(x)|^p C_x)^{1/p}$ とする。

(6.1) が成り立つ時、$d \le 2$ ならばマルコフ過程は再帰的、$d > 2$ ならば非再帰的である。

$d(\cdot,\cdot)$ を (V,C) 上のグラフ距離とし、$B(x,R)=\{y\in V: d(x,y)\le R\}$ とする。

$\underline{(HK(2))}$: $x,y\in V, n\ge d(x,y)$ について

$$
\begin{aligned}
p_n(x,y) &\le \frac{c_1}{\mu(B(x,n^{\frac{1}{2}}))}\exp[-(\frac{d(x,y)^2}{c_1 n})],\\
p_n(x,y)+p_{n+1}(x,y) &\ge \frac{c_2}{\mu(B(x,n^{\frac{1}{2}}))}\exp[-(\frac{d(x,y)^2}{c_2 n})].
\end{aligned}
$$

$(HK(2))$ からマルコフ連鎖の様々な性質が導き出せる。例えば

- $c_1\sqrt{n}\le E^x[d(x,X_n)]\le c_2\sqrt{n}$
- 調和関数のリウビユ性（V 上の有界な調和関数は、定数関数に限る。）
- グリーン関数の評価　　　　　　　　など

では、$(HK(2))$ はどのような時に成り立つのか？

p_0条件：ある$p_0 > 0$があって、$P(x,y) = \frac{C_{xy}}{C_x} \geq p_0$ for all $x \sim y$。

(VD): volume doubling 条件：

$\mu(B(x,2R)) \leq c_1 \mu(B(x,R)) \qquad \forall \ x \in V, R \geq 1$

$(PI(2))$: ポアンカレ不等式：$x_0 \in V, R \geq 1$に対して、$B_R = B(x_0, R)$とおくと、

$$\sum_{x \in B_R} (f(x) - \bar{f}_{B_R})^2 C_x \leq c_1 R^2 \sum_{\substack{x \in B_R \\ y \in B_R}} (f(x) - f(y))^2 C_{xy}, \quad \text{for all} \quad f : B_R \to \mathbb{R}$$

ここで、$\bar{f}_B = \mu(B)^{-1} \sum_{x \in B} f(x) C_x$。

定理 6.2 (Grigor'yan 1992, Saloff-Coste 1992, Delmotte 1999)

(V,C)にp_0条件を仮定すると、以下は同値。– 特に、$(HK(2))$は"安定性"を持つ。

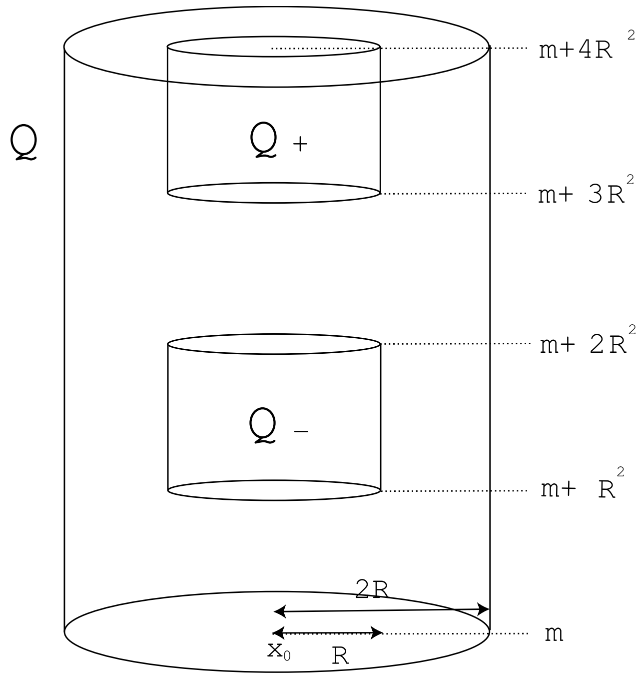
$$(HK(2)) \Leftrightarrow (VD) + (PI(2)) \Leftrightarrow (PHI(2)).$$

$(PHI(2))$: 放物型ハルナック不等式： $x_0 \in V$、$Q := [m, m+4R^2] \times \bar{B}(x_0, 2R)$,

$Q_- = (m+R^2, m+2R^2) \times B(x_0, R)$, $Q_+ = (m+3R^2, m+4R^2) \times B(x_0, R)$ とする。

このとき、Q 上熱方程式を満たす任意の $u : Q \to \mathbb{R}_+$ について、以下が成立する。

$$\Rightarrow \sup_{(n,y)\in Q_-} u(n,y) \le c_1 \inf_{(n,y)\in Q_+} (u(n,y) + u(n+1,y))$$

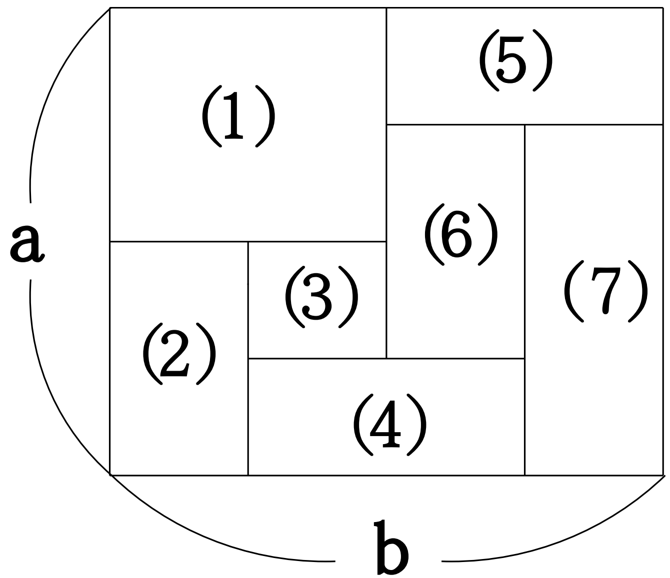


Appendix　ポアソン方程式の応用（時間があれば話す）

定理 7.1　（応用：デーンの定理、[3, 4] 参照）

K を縦の長さ a、横の長さ b の長方形とする。K が、縦横の比が有理数であるような有限個の長方形に分割されるならば、a, b の比は有理数（つまり $a/b \in \mathbf{Q}$）である。

特に、K が有限個の正方形に分割されれば a, b の比は有理数である。



補題 **7.1** (V,C)：コンダクタンスの値がすべて有理数（$C_{xy}\in\mathbf{Q}\ \ \textit{for all}\ \ \{x,y\}\in B$）

$g\in\ell(V)$ ：任意の $x\in V$ について $g(x)\in\mathbf{Q}$ かつ $(g,1)_C=0$ を満たす。

$\Rightarrow$ ポアソン方程式 $\Delta f=g$ の解 f は常に $f(x)-f(y)\in\mathbf{Q}\ \textit{for all}\ x,y\in V$ を満たす。

証明：V の各元の値を成分として f,g をベクトルで、Δ を行列で表示したものを $A\mathbf{f}=\mathbf{g}$ とすると、仮定から A の成分、$\mathbf{g}$ の成分はいずれも有理数である。この式から左基本変形と列の入れ替えを繰り返すことにより

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & & \bar{\mathbf{v}} \\ \mathbf{0} & & 1 & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)\tilde{\mathbf{f}}=\left(\begin{array}{c} \\ \bar{\mathbf{g}} \\ \\ \hline 0 \end{array}\right)$$

（$\tilde{\mathbf{f}}$ は、A の変形に応じて $\mathbf{f}$ の成分の順序を入れ替えたもの。）ここで、基本変形は

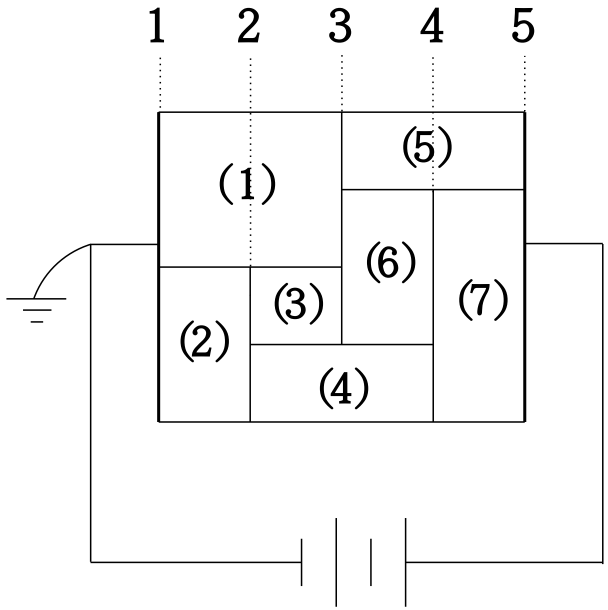
有理数の四則演算で行えるから、$\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{g}}$ の取る値は有理数である。

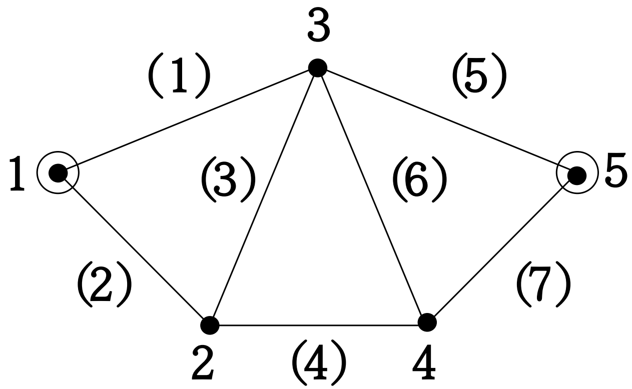
これにより、解の一つとして ${}^t(\ \bar{\mathbf{g}}\ |0)$（^{t} は転置行列）を取ることができ、命題3.1より２つの解の差が定数関数であるから、一般の解は、

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \\ \bar{\mathbf{g}} \\ \\ \hline 0 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \hline 1 \end{pmatrix}$$

（α は任意の実数）となる。（従って、上の $\bar{\mathbf{v}}$ の成分はすべて -1 であることがわかる。）

よって結論を得る。 ∎





定理7.1の証明：　$a = 1$としてよい。各ボンド(i)にコンダクタンスとして

$$(\text{ 小長方形}(i)\text{の縦の長さ })/(\text{ 小長方形}(i)\text{の横の長さ })$$

を与える。仮定からこの値は有理数である。

さて、このようにして作られた電気回路(V, C)に対して、$f \in \ell(V)$を

$f(i) = ($ 線分1から線分iまでの距離 $)$と定義すると、$f(1) = 0, f(n) = b$である。

さらに、$\{i,j\}\in B$ に対して

$$C_{ij}(f(j)-f(i)) = \mathrm{sgn}(i,j)\cdot(\{i,j\}\text{に対応する小長方形の縦の長さ}\,(\text{の和})\,)$$

（但し $\mathrm{sgn}(i,j)=1$ if $j>i$, $\mathrm{sgn}(i,j)=-1$ if $j<i$ と定める）となるから、これを用いると、$i\in\{2,3,\cdots,n-1\}$ のとき

$$\begin{aligned}
\Delta f(i) &= \frac{1}{C_i}\sum_{j\in V} C_{ij}(f(j)-f(i)) \\
&= \frac{1}{C_i}\{(i\text{を左辺とする小長方形の縦辺の長さの和}) \\
&\qquad\qquad - (i\text{を右辺とする小長方形の縦辺の長さの和})\} = 0
\end{aligned}$$

（但し $C_i=\sum_j C_{ij}$）となり、さらに

$$\Delta f(1)=1/C_1, \qquad \Delta f(n)=-1/C_n$$

となる。

つまり f は

$$g(x) = \begin{cases} 1/C_1 & x = 1, \\ -1/C_n & x = n, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

としたときの $\Delta f = g$ の解である（$(g, 1)_C = C_1/C_1 - C_n/C_n = 0$ であるから、このポアソン方程式の解は定数の違いを除いて唯一である）。今、C_{ij} はすべて有理数であり g の取る値も有理数であるから、補題 7.1 よりすべての $i, j \in V$ に対して $f(i) - f(j) \in \mathbf{Q}$、特に $f(n) = f(n) - f(1) = b \in \mathbf{Q}$ である。 ∎

結び：　本講義では、電気回路を題材として、離散調和解析学、離散確率過程論の初歩を学び、関連した最近の研究の一部を紹介した。電気回路のもつエネルギー（二次形式）が差分作用素と関係し、対応するランダムウォークの再帰性などの諸性質と結びつくところに、数学の奥深さの一端を垣間見ていただければ何よりである。

（レポート問題３）講義の内容に関する感想や、講義に関連したテーマについて各自で勉強した内容を記せ。（レポート用紙に 1 枚以上書くこと。）

参考文献

[1] P.G. Doyle and J.L. Snell, Random walks and electrical networks, 1984
Available at http://front.math.ucdavis.edu/math.PR/0001057

[2] フェラー 著, 河田龍夫監訳, 確率論とその応用I, II (上・下), 紀伊国屋書店

[3] 熊谷隆, 確率論, 共立出版, 2003

[4] 砂田利一, 分割の幾何学 -デーンによる２つの定理-, 日本評論社, 2000