

電子計算機による流れの数値実験

東大 理 物理 高 見 類 郎

1. Vortex sheet のまき上り

流体中の薄い vortex layer (渦層)の時間的な形状変化を調べるのに、これを非粘性流体中の無限に薄い vortex sheet で近似し、さらに、この連続的な sheet を多数の不連続的な vortex filament の集りによつておきかえる — これを“discrete-vortex approximation” と呼ぼう — ことがしばしば行われる。このようなモデルは高速電子計算機による数値実験にはとくに都合のよいものであると考えられる。そこで、ここでは、1936年に Westwater によつてとり扱われた「有限幅の vortex sheet のまき上り」の問題を高速電子計算機による数値実験により再検討することにした。

Westwater の計算によると、時間の経過と共に、最初直線的であつた vortex sheet の端がラセン状にまき上り実際の観測によく似た結果を与えるので、この種の簡単なモデルが非常に有効なものであると信じられて来た。しかし、今回の数値実験によると、sheet の端は時間の経過と共にいちじるしい不規則性を示し、Westwater が得たようなスムーズなまき上りは起らないことがわかつた。同じ近似を Westwater の採用した以外の初期 vorticity 分布についても適用してみたが、いずれの場合にも時間の経過と共に sheet の端で不規則性を示すことが確かめられた。しかも vortex filament の数をます — つまりもとの連続 sheet により近いと考えられる — と共にこの不規則性はより早い時間に現れ、よりいちじるしくなることがわかつた。したがつて、このような簡単なモデル (discrete-vortex approximation) によつてもとの連続的な sheet の変形の詳細を追跡することは適当でないように思われる。また、vortex filament の初期配置をわずかに変えて計算すると、後の時刻の small scale の配置がかなりちがつたものになることから、方程式系が初期条件に対して不安定であることもわかつた。

計算は、基礎 (微分) 方程式を差分方程式におきかえ、vortex filament の数は 16, 20, 32, 40, 48 の各々、時間間隔 Δt は 0.002 ~ 0.0001 にわたる種々の場合について試みた。 Δt の相異による結果のバラつきはほとんどみとめられなかつた。初期 vorticity 分布としては、(I) $\kappa(x) = -\frac{d}{dx}(1-x^2)^{1/2}$ (Westwater の分布), (II) $\kappa(x) =$

$-\frac{d}{dx}(1-x^2)$, (III) $\kappa(x) = -\frac{d}{dx}(1-x^2)^{3/2}$ の三種類について行つた。

この研究の full paper は Stanford 大学航空宇宙学教室の報告として公表されている。

2. 平板のまわりの粘性流

よく知られているように, Reynolds 数が普通程度の大きさの時に, Navier-Stokes 方程式の解を解析的にもとめることはほとんど不可能である。したがつて, Slow motion 近似や境界層近似ができないような Reynolds 数の流れを研究するには, 現段階では数値解法によるのがほとんど唯一の方法であると思われる。ここではその典型的な例として, 流れに垂直におかれた平板を過ぎる流れをとりあげる。

無限上流で流れは x 軸方向に流れているものとする。 ψ を一様流からのズレを表わす流れ函数, ω を渦度として, 基礎式は

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \left(1 + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{2}{R} \Delta \omega = 0, \quad \dots \quad (1)$$

$$\omega + \Delta \psi = 0, \quad \dots \quad (2)$$

と書ける。境界条件は,

$$\text{平板上} : \quad \psi = -y, \quad \psi_x = 0, \quad \dots \quad (3)$$

$$\text{無限遠} : \quad \text{有限で切つて asymptotic expression の第1項 (抵抗係数 } C_D \text{ の函数)}, \quad \dots \quad (4)$$

$$\text{対称線} : \quad \psi = 0, \quad \omega = 0,$$

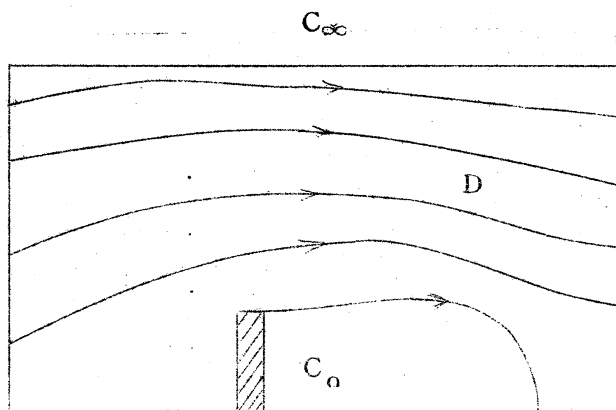
で与えられる。

まず (1), (2) を差分方程式に直おし, square mesh を考え, pointwise に Liebmann 法を適用し, つぎのような反復計算を行う。

- I) $\psi(D, C_\infty)$ を適当に仮定,
- II) (2) により $\omega(D)$ を計算,
- III) (2) および (3) により $\omega(C_0)$ を計算,
- IV) C_0 上の積分により C_D を計算,
- V) (4) により $\psi(C_\infty), \omega(C_\infty)$ を計算,
- VI) (1) により $\omega(D)$ を, (2) により $\psi(D)$ を交互に pointwise に修正,

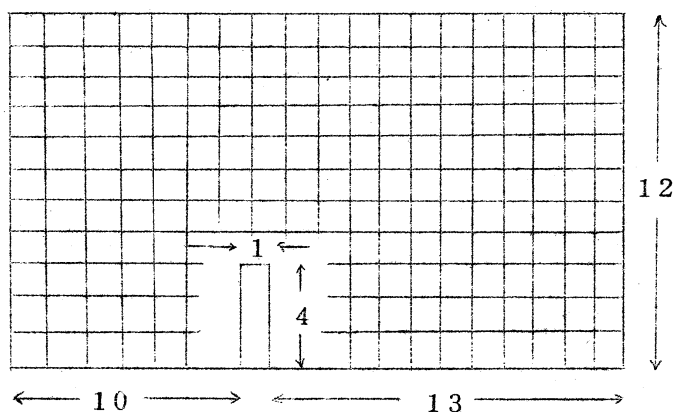
vii) (iii)にもどつてくり返す。

具体的には第2図のような場合について、 $R=20, 30, 40, 50$ で計算した。いずれの場合も約400ステップで収束し、所要時間は2分程度である。流線の形は第1図に図式的に示したように一応もつともらしいものが得られるが、 C_D の値は下表に示すように R と共に増し、しかも C_D の値そのものも小さすぎるといふ不満足な結果しか得られなかつた。そこで、つぎのような改良が考えられる：(1) 抵抗の計算を板から離れたところで行なう、(2) 表面の境界条件の処理(角でsingular なことに目をつぶつて内部領域と同じスキームで計算したのが乱暴であつたかもしれない)。(3) mesh をもつと細かくとる。(4) C_∞ をもつと遠くにとる。(5) asymptotic expression を higher order までとる。以上のことを考慮して目下検討中である。



第 1 図

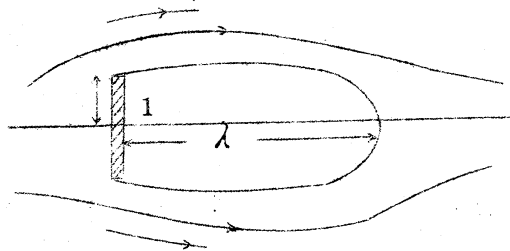
- D : 考えている流れの領域。
- C_∞ : asymptotic expression
につなぐべき境界 (平板より充分遠方にとる)。
- C_0 : 平板表面の境界。



第 2 図

R	C_D	λ	λ/R
20	1.5239	3.1	0.16
30	1.6629	4.5	0.15
40	1.7291	5.4	0.14
50	1.7651	5.8	0.12

表 : $\lambda = (\text{筒の長さ}) / (\text{平板の半幅})$



平板のまわりの流れと平行して、軸が流れに垂直におかれた円柱のまわりの流れについても計算中である。

付記 : 本報告は、著者が海外出張中のため今井功教授がシンポジウムの席で代つて紹介されたものを、角谷典彦が要約したものである。原稿をまとめるにあたり、著者の今井教授宛の私信を参照させて頂いたが、著者の真意が損われていないことを望むものである。