数理解析研究所講究録
第7巻 1965年 41-44

乱れのエネルギー・スペクトルの数値計算

京大 理 物理　巽　友正

1 緒　論

一様等方性乱れのエネルギー・スペクトルを支配する方程式を導くために，これまでにいろいろな仮説が導入され，その結果が検討された。準正規分布仮説による方程式を数値的に解いて，スペクトルの時間的変化を追跡する試みは，OGURA [1]によつてはじめてなされた。その注目すべき結果の一つとして，比較的高いReynolds 数に対して，ある減衰時間ののち，スペクトルに負エネルギーの波数帯が発生することが示された。同様の傾向は,乱れの中のスカラー量の変動に関するO'BRIEN AND FRANCIS[2] の計算結果においても報告された。

負エネルギーの発生という極めて非物理的な結果は，準正規分布仮説の高Reynolds 数における破綻を示すように思われる。しかし，一方において，この種の問題における初期条件の選定は，慎重な検討を要する問題である。上の計算例においては，スペクトル函数の初期値は低Reynolds数における漸近形が採用され，エネルギー伝達の初期値は0と仮定されている。この初期条件は，低Reynolds数においては勿論正しいが，高Reynolds数において何等の矛盾をひき起さないかどうかは明らかでない。したがつて，これとは違つた初期条件のもとに準正規分布仮説がどのような結果を生ずるかを知るのは興味あることと思われる。

以下では，初期条件としての無矛盾性が厳密に証明されている線スペクトル[3]を，初期形として採用し，エネルギー・スペクトルの時間的変化を数値計算によつて追跡することを試みる。

2 方程式の構成

乱れの場を代表する量として，初期時刻における乱れのエネルギー$\frac{1}{2}(\overline{u^2})_0$，乱れの波数$\kappa_0$を採ることにすれば，そのときの乱れのReynolds数は

$$R=\sqrt{\frac{1}{2}(\overline{u^2})_0}/\nu\kappa_0$$

で表わされる。すべての量をこれによつて無次元化すれば，独立変数は，時間$\tau=\nu\kappa_0^2 t$，波数波数$s=\kappa/\kappa_0$， 従属変数は，スペクトル函数 $\phi(s,\tau)=\left[\kappa_0^3/\frac{1}{2}(\overline{u^2})_0\kappa^2\right]E(\kappa,t)$，エネルギー伝達函数 $\psi(s,s';\tau)$ となる。こゝに，$E(\kappa,t)$ は次元のあるエネルギー・スペクトル函数である。

函数$\phi(s,\tau)$，$\psi(s,s';\tau)$を支配する方程式は，すでに論文 (3) において与えられ

ており，こゝでは数値計算に適した変形だけが問題となる。初期条件は，

$$\phi(s,0)=\delta(s-1), \qquad \psi(s,s';0)=0$$

で与えられる。こゝにδはDIRACのδ函数である。

解はつねにδ函数部分と連続函数部分とに分けて考えることが出来，ϕ，ψはそれぞれ，

$$\phi(s,\tau)=A(\tau)\,\delta(s-1)+F(s,\tau),$$

$$\begin{aligned}\psi(s,s',\tau)=&\left[B(s',\tau)\,\delta(s''-1)-B(s,\tau)\,\delta(s'-1)\right]\delta(s-1)\\&+C(s',s'';\tau)\,\delta(s-1)-C(s,s'';\tau)]\,\delta(s'-1)\\&+\left[C(s,s';\tau)-C(s',s;\tau)\right]\delta(s''-1)\\&+G(s,s',s'';\tau)-G(s',s,s'';\tau)\end{aligned}$$

で表わされる。

5個の函数A，F，B，C，Gに対する方程式を初期条件A＝1，F＝B＝C＝G＝0のもとに解くことが，今回の問題である。

3　数値解

プログラミングおよび計算の遂行は三菱原子力KKに依頼し，計算機はIBM7090を使用した。波数sに関する積分にはSIMPSON の公式を用い，時間τに関する積分にはRUNGE－KUTTA法を使用した。

予備計算の結果，計算のステップは，$\triangle s=1/4$，$\triangle\tau=0.05$ が適当であることがわかつた。積分領域は$s=0\sim4.0$，$\tau=0\sim4.0$ である。 Reynolds数の値としては，今回は$R=3,4,5$をとつた。計算結果は，エネルギーの時間的変化に関しては第1図に示す通りであり，エネルギー・スペクトルの変化の模様は大体文献 (3)において得られたものと類似であつた。

第1図に見られる著るしい結果は$R=4,5$に対して，A(τ)がτのある値以後，負の値をとることである。 これは，線スペクトル部分に含まれるエネルギーが負になることを意味し，さきにOGURAによつて報告されたのと同種の物理的矛盾を表わしている。Rの値の増加に対する曲線の変化の傾向から見て，この矛盾は高Reynolds 数においてさらに強められるものと予想される。

4．議　　論

準正規分布仮説の欠陥が，今回の初期条件の選定においても尚かつ露呈されたことから見て，

仮説の高Reynolds 数における矛盾は覆い難いように思われる。しかし，今回の数値計算の結果は，物理的に矛盾のない解へのまだ一つの可能性を示しているように思われる。例えば，$R=5$を例にとれば，$\tau=0.58$ のとき，A=0となる。このとき，$\phi(s,\tau)$と$\psi(s, s',\tau)$はそれぞれ0でない連続函数形をもつであろう。これらの値を初期値として以後の数値計算を遂行すれば，OGURA の初期条件から出発した解とはまた違つた結果が期待されるのである。この初期条件の変化がどの程度，仮説のもつ矛盾を救うことができるかどうかは今後の計算の課題である。

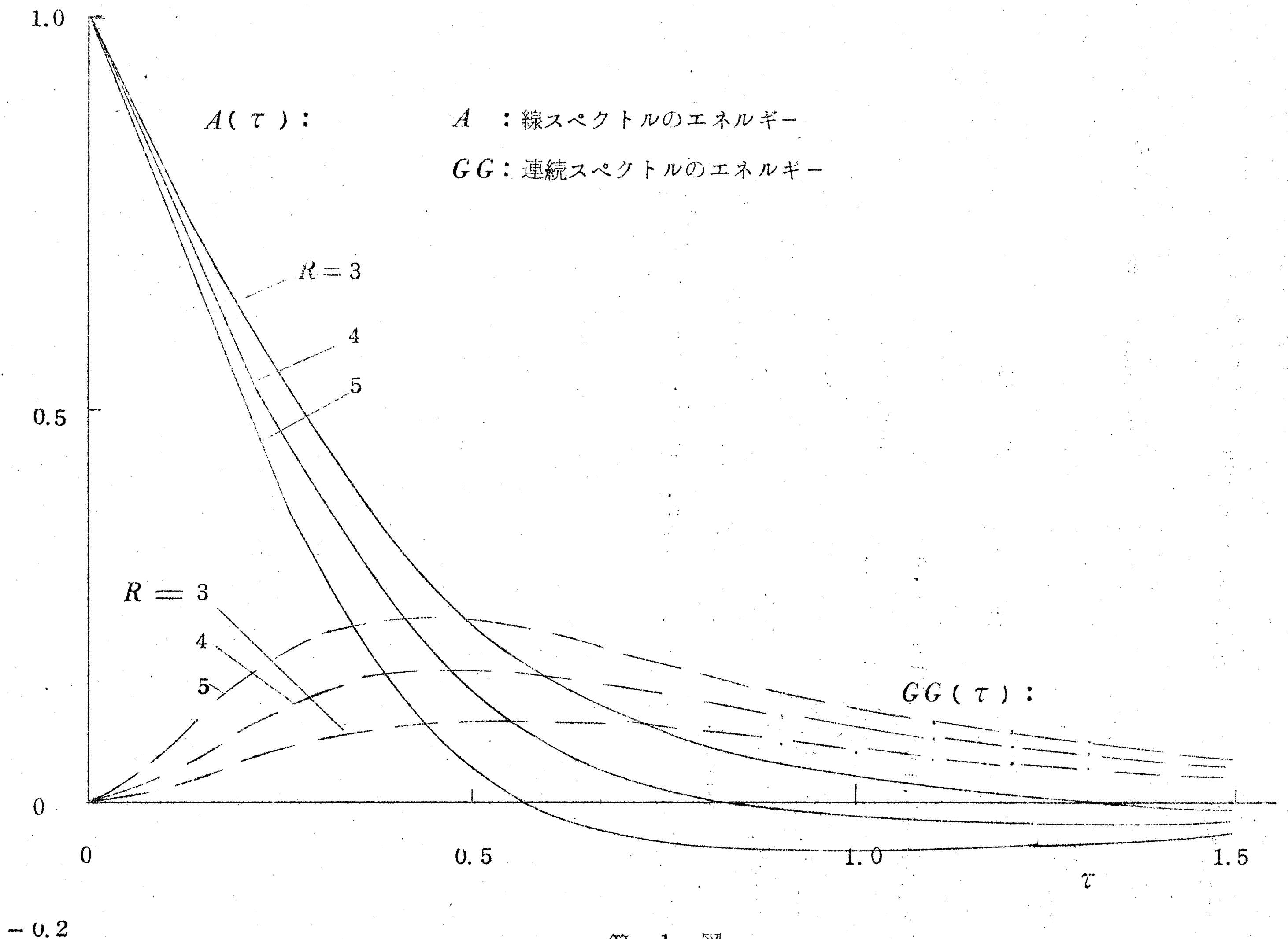
最後に，今回の計算の実行は，三菱原子力KKの吉川竹四郎氏の御協力によるもので，こゝに深甚の感謝の意を表したいと思う。

引 用 文 献

〔1〕 Y. OGURA, Phys. Fluids, 5 (1962) 395,
J. Fluid Mech. 16 (1963) 33.

〔2〕 E. E. O'BRIEN AND G.C. FRANCIS. J. Fluid Mech. 13 (1962) 369.

〔3〕 T. TATSUMI, Proc. Roy. Soc. A, 239 (1957) 16;
Proc. IXth Intern. Congr. Appl. Mech. 3 (1957) 396.


1.0
0.5
0
−0.2
A(τ):
A ：線スペクトルのエネルギー
GG：連続スペクトルのエネルギー
R = 3
4
5
R = 3
4
5
GG(τ):
0
0.5
1.0
1.5
τ

第 1 図