数理解析研究所講究録
第 13 巻 1966 年 21-29

解析空間上の有理型函数

名古屋大学
工学部　岡野　節

解析空間（特に解析的多様体）の上の有理型函数の間の従属性についての研究は古くから多くの人々によって進められて来たが，ここでStein の最近の論文〔6〕における " meromorphic base" の存在を用いてのこの種の問題への一つの方法を紹介するのが主な目的である。

§1. Meromorphic mapping

X，Yをcomplex space とし，$X\times Y$のsubset Γを一つ考える。$x\in X$に対して $f(x)=:\{y\in Y;\ (x,y)\in\Gamma\}$を考える事によりXからYへの対応 f が得られる。今 $\Gamma=G[f]$とおき，$\check{f}$をG〔f〕からXへの$\hat{f}$をG〔f〕からYへのそれぞれprojection とする。このとき，

Def　f がmeromorphic mapping であるとは

(i) G〔f〕は$X\times Y$の analytic subset である。

(ii) $\check{f}: G[f]\to X$はproper map である。

(iii) X'をXの任意のirrducible component とすると$\check{f}^{-1}(X')$はG〔f〕の一つのirreducible component である。

(iv) Xのthin analytic set M があって $G[f]-\check{f}^{-1}(M)\to X-M$ は biholomorphic map である。

。特に$Y=\mathbb{P}^1$（リーマン球）のとき f はmeromorphic function（つまりlocalに正則函数の比）になっている。

。又MとしてMの各点では f はholomorphic map にならない様な集合をとる事が出来る。つまり f が正則でない点の全体はXのthin analytic set になっている。このset を非正則点の集合という。

$X \xrightarrow{f_1} Y_1$, $X \xrightarrow{f_2} Y_2$ を各々meromorphic map とするとき f_1 , f_2 の正則点のところの極限として，Xから $Y_1 \times Y_2$ へのmeromorphic map が natural に決る。これを $\{f_1 , f_2\}$ とかく。

又 $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} Z$ をmeromorphic map とするとき，$x \in X$ に対して $g(f(x)) \subset Z$ としてXからZへの応対づけ $g \circ f$ が決るが，今Xの各 irreducible component X_i に対して X_i の open set U_i があつて U_i ではこの $g \circ f$ が一価であるならば $g \circ f$ のグラフから各 X_i に対して U_i では $g \circ f$ のグラフと一致する様に $g \circ f$ の graph の irreducible component を取る事により，XからZへのmeromorphic map が決る。これを $g \triangle f$ とかく

Def. $X \xrightarrow{\varphi} Y$ をholomorphic map とする。
$y \in Y$ に対して $\varphi^{-1}(y)$ を φ のfibre といい，fibre の connected component をlevel set という。

これから先meromorphic (holomorphic) map $X \to Y$ 等を考えるとき，便宜上Xの方は irreducible complex space と仮定して話しをすすめる。

Def. (i) $X \xrightarrow{\varphi} Y$ を hol map とするとき

$$r_x(\varphi) =: \dim X - \dim_x(\varphi^{-1}(\varphi(x)))$$

$$r(\varphi) =: \sup_{x \in X} r_x(\varphi)$$

$$E_\varphi =: \{x \in X ; r_x(\varphi) < r(\varphi)\}$$ とする。

(ii) $X \xrightarrow{f} Y$ をmeromorphic map とするとき，$r(\hat{f}) =: r(f)$ とする。
($\hat{f}$ は $G[f] \to Y$ なる proj)

。 Remmert によつて E_φ はXの thin analytic set である事が証明されている。

Def. $X \xrightarrow{f} Y$, $X \xrightarrow{g} Z$ をholomorphic mapping とするとき，
(i) gがfにdepend しているとは任意の $x \in X$ に対して $r_x(f) = r_x((f, g))$

ということ。

(ii) fとgがrelated とはfとgが互に他にdepend しているということ。

。 gがfにdepend する事を言いかえればfの各level set 上でgがconstant map であるというに等しく，″fとgがrelated〃を言いかえればfのlevel set 全体がgのlevel set 全体に一致するのに等しい。

Def. $X \xrightarrow{f} Y$, $X \xrightarrow{g} Z$ を meromorphic map とする。

(i) gがfに m−depend するとは

$r(f) = r(\{f, g\})$ということ。

(ii) fとgがm−related とは，fとgが互にm−depend しているということ。

次に後で用いられる用語，記号，及びmeromorphic map についての一つの基本的性質を述べておく。$X \xrightarrow{f} Y$ をmeromorphic map とするとき，

Def. ① $A \subset X$ に対して

$$f(A) =: \hat{f}(\check{f}^{-1}(A))$$

② $B \subset X$ に対して

$$f^{-1}(B) =: \check{f}(\hat{f}^{-1}(B))$$

③ fがproper とは $\hat{f}$ がproper のこと。

Prop A. $X \xrightarrow{f} Y$ をmeromorphic map とし，$\dim X = \dim Y$，fはonto かつproper とするとYのthin analytic set Nがあって$X - f^{-1}(N) \to Y - N$はunramified holomorphic covering map である。

§2. holomorphic 及び meromorphic base

Def. $\varphi : X \to Y$

$\varphi^* ; X \to Y^*$を各々holomorphic map とするとき，(Y^*, f^*)がφの

holomorphic base (以下h－base と記す) であると次の3条件をみたすこと。

① φ^* はonto map である。

② φとφ^* はrelated

③ φにdepend する任意のholomorphic map $\psi : X \to Z$ に対してα (ψ) なる

なるY* からZへのholomorphic map があり

$\alpha(\psi) \circ \varphi^* = \psi$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, "\varphi^*"] & Y \\ Z & Y^* \arrow[l, "\alpha(\psi)"] \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

◦ φ^* がonto であることからα (ψ) は一意的であり，又φはφ自身にdepend するから $Y^* \to Y$ なるholomorphic map が一つ決る。これをαとかく。

◦ $X \xrightarrow{\varphi} Y$に対してのbase は，定義から，あるとすれば唯一つに限る事は明らかである (biholomorphic なものを同一視して)

◦ Y*としてφのlevel set 全体の集合をとつてそこへcompex structure を入れて上記の性質をみたす様に出来ればよいのであるが多くの場合これは不可能である。本来level set 全体でcomplex space を作れないので，base というものがそれに代る有用な対象として研究されるのである。

<u>Def</u>. $X \xrightarrow{f} Y$，$X \xrightarrow{f^*} Y^*$ をともに meromorphic map とする。(Y^*，f^*) がfのmeromorphic base (以下これをm－base と記す) であるとは

① f^*はonto map，つまり$f^*(X) = Y^*$

② fとf^* はm－related

③ fにm－depend する任意のmeromorphic map $g : X \to Z$ にしてY*から Zへのmeromorphic map β (g)

があつて $\beta(g) \triangle f^* = g$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "f^*"] & Y \\ Z & Y^* \arrow[l, "\beta(g)"] \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

。 β（g）は f^* が onto であるから一通りであり，又 f は f 自身に m−dep するから Y^* から Y へのmeromorphic map β が唯一つ決つて $f=\beta\triangle f^*$

。 meromorphic map $X\xrightarrow{f}Y$ に対して f の m−base は，あるとすれば，bimeromorphic なものを同一視して唯一つしかないのは def から明らか。

次に h−base，m−base が存在するための十分条件として今まで得られているものの主なものをあげてみる。

。 $X\xrightarrow{\varphi}Y$ を holomorphic map とするとき，次の①〜④の条件の一つをみたせば φ の h−base が存在する。

(1) X が normal で $E_\varphi=\phi$ 〔4〕

この拡張として

(2) X が normal で E_φ に含まれる φ の level set は compact 〔8〕

(3) $X\xrightarrow{\varphi}Y$ が proper map 〔1〕

この拡張として

(4) X に analytic set A があって $f\,|\,A$ は proper かつ $r(f)=r(f\,|\,A)$ をみたす。 〔5〕

。 $X\xrightarrow{f}Y$ を meromorphic map とするとき，f が次の条件をみたせば f の m−base がある。

(5) f は proper。 〔6〕

この拡張として

(6) X の analytic set A があって $\check{f}^{-1}(A)\subset G\,[f]$ が A' なる irreducible component をもつていて，

$\hat{f}\,|\,A'\ ;\ A'\to Y$ は proper でかつ $r(f)=r(f\,|\,A')$ をみたす。

。 (3)，(4)の場合 $\alpha: Y^*\to Y$ は proper map であり，$f(X)=Y'$ とすれば Y' は X の irreducible analytic set であり，$Y'=\alpha(Y^*)$ で，$\alpha'; Y^*\to Y'$ は proper ramified covering map になつている。さらに(4)のとき，$Y'=\varphi(A)$ ともなつている。

。 (3)の場合 φ の level set 全体に X から natural な topology と complex structure を入れて complex space にできることが Cartan 〔1〕により示されており，この場合の Y^* と一致する。

。 (5)，(6)の場合，β は proper map であり，$Y' = f(X)$ とおけば Y' は Y の analytic set になつており，$\beta(Y^*) = Y'$ そして $\dim Y^* = \dim Y'$ であるから $\beta' : Y^* \to Y'$ は prop A により covering map になつている。さらに(6)の場合には $r(\hat{f}|A') = f(X)$ でもある。

ここで(6)の証明の道すじを述べておく。

Xからある complex space Z_i への onto meromorphic map ψ_i で f と m-related であり左の図が可換になる様な meromorphic map $\sigma_i : Z_i \to Y$ がある。そういう (ψ_i, Z_i) の全体を $\mathcal{R}$ とする。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & Y \\ & Z_i \arrow[ur, "\sigma_i"'] & \end{tikzcd}$$

$(\psi_i, Z_i) \in \mathcal{R}$，$(\psi_j, Z_j) \leftarrow \mathcal{R}$ のとき，"Z_i から Z_i への meromorphic map τ_{ji} があり，$\psi_i = \tau_{ji} \triangle \psi_j$ となつているならば $(\psi_j, Z_j) \geqq (\psi_i, Z_i)$" として $\mathcal{R}$ に順序を入れる。この　は A の存在することにより有向集合であり，さらに τ_{ji} は proper covering map となり，ある大きな j_0 から先では $j_0 \leq i \leq j$ に対して τ_{ji} は bimeromorphic になつてしまう。この j_0 に対応する $X \xrightarrow[\psi_{j_0}]{} Z_{j_0}$ が求める m-base になつている。

なお上記の論法において主要な役割をはたしているのは次の Lemma である。

<u>Lemma.</u> $f : X \to Y$ を meromorphic map，A を X の irreducible analytic set とし，X は A の各点で irreducible とする。さらに f は A で define されている（つまり $A \xrightarrow{i} X$ を injection とするとき，$f \triangle i$ が define されている）とする。（この $f \triangle i$ を $f \underset{m}{|} A$ とかく）さらに $r(f) = r(f \underset{m}{|} A)$ とする。

以上の仮定のもとに f に m-depend する任意の meromorphic map g に対して $g \underset{m}{|} A$ が必ず define される。さらに $f \underset{m}{|} A$ が proper ならば

① $f_0 \underset{m}{|} A$ は $f \underset{m}{|} A$ に m-depend し，

② $(f_0 \underset{m}{|} A)(A) = f_0(A) = f_0(X)$

③ $r(f_0) = r(f_0 \,|_m\, A)$ である。

§ 3. meromorphic functions.

meromorphic base の存在条件 (6) の応用を述べる。 〔6〕

Def. $f_1, f_2 \cdots\cdot f_s$ を irreducible complex space X 上の meromorphic function とするとき，

① $f_1 \cdots\cdot f_s$ が independent とは $r(\{f_1, \cdots\cdot, f_s\}) = s$

② $f_1 \cdots\cdot f_s$ が dependent とは

$r(\{f_1 \cdots\cdot, f_s\}) < s$

Def. X を irreducible analytic space とするとき，

① $K(X) =: \{X$ 上の有理型函数全体$\}$

② f を X 上の meromorphic map とするとき，

$K_f(X) =: \{f$ に m−depend する $K(X)$ の元全体$\}$

今 $X \xrightarrow{f} Y$ を meromorphic map とし f に m−base $\{Y^*, f^*\}$ があつたとする。

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f^*"] & Y \\ \mathbb{P}^1 & & Y^* \arrow[ll, "\beta(g)"] \end{tikzcd}$$

このとき $K_f(X)$ の元に対して $\beta(g) \in K(Y^*)$ を対応させる事により $K_f(X)$ と $K(Y^*)$ は体として同型である。さらに $f = \{f_1, \cdots\cdot, f_s\}$ (f_1 は X 上の meromorphic function) なる形の時を考える。$f(X) = \mathbb{P}^s$ ($= \mathbb{P}^1$ の s 個の直積) になつておりかつ β が proper covering map ならば，(〔6〕をみたせばそうなつている) $K(Y^*)$ の元は $K(\mathbb{P}^s)$ 上代数的でその次数はこの covering の枚数 d 以下である。ところが $K(\mathbb{P}^s)$ は，C 上独立変数 s 個の有理函数体だから $K(Y^*) \cong K_f(X)$ は degree of transcendence s の代数函数体である。

今 X を compact とし，$f_1, \cdots\cdot f_s$ を X 上の有理型函数の system で independent なものの最多数のものとすると

$$f = \{f_1 \cdots\cdot, f_s\} \text{として，} f(X) = \mathbb{P}^s$$

であり，X = A とおくことにより，(6)の条件をみたすから次の Chow−Thimm−Remmert の結果を得る。

(I) Xをcompactな irreducible complex space とすればK (X) はdegree of transcendence がdimX を越さない代数函数体である。

次にfをX → Y なるmeromorphic map とし，Xのある点でxで$\check{f}^{-1}$ (x) が irreducible component A′を持つていてr ($\hat{f}$ | A′) = r (f) となつておれば，$\check{f}^{-1}$ (x) はcnmpactだから(6)の条件をみたしm−base (Y^*, f^*) があるが，Y^*は compact だからK_f (X) $\cong$ K (Y^*) によって

(II) X $\xrightarrow{f}$ Y をmeromorphic map とし，x ∈ Xで$\check{f}^{-1}$ (x) がirreducible component A′を持ちr ($\hat{f}$ | A′) = r (f) ならばK_f (X) はdegree of transcendence が dim X をおこさない代数函数体である。

(II)のCor としてThimm の結果〔7〕を得る。

Cor. $f = \{f_1 \cdots\cdots f_s\}$ (f_iはmeromorphic function) でf (x) = $\mathbb{P}^s$なる x ∈ XがあればK_f (X) はdegree of transcendence s の代数函数体である。

文　　献

(1) H, Cartan : Quotients of Complex Analytic Spaces, Contribution to Function Theory, Tata Institute (1960)

(2) R, Remmert : Meromorphe Funktionen in Kompakten Komplexen Räumen, Math Ann. Bd.132(1956)

(3) K, Stein : Analytische Zerlegungen Komplexer Räume, Math Ann, Bd.132 (1956)

(4) K, Stein : Die Existenz Komplexer Basen zu holomorphen Abbildungen, Math Ann, Bd.136 (1958)

(5) K, Stein : Maximal holomorphe und meromorphe Abbildungen I, Am, J. of Math.Vol.85 (1963)

(6) K, Stein : Maximal holomorphe und meromorphe Abbildungen II, Am, J. of Math.Vol.86 (1964)

(7) W, Thimm : Untersuchungen über ausgeartete meromorphe Abbildugen, Math Ann, Bd.127 (1954)

(8) K, Wolffhardt : Existenzätze für maximale holomorphe und meromophe Abbildungen, Math Zeitschr, Bd.85 (1964)