数理解析研究所講究録
第19巻 1967年 101-125

クリフォード代数について

京都大学数理解析研究所　荒木不二洋

§0 序

この講演では主としてDavid ShaleとW. Forrest Steinspringによる次の二つの論文を紹介する。

[1] States of the Clifford Algebra, Ann. of Math. 80 (1964) 365 − 381.

[2] Spinor Representations of Infinite Orthogonal Group, J. Math. Mech. 14 (1965), 315 − 322.

この二つの論文の内容は、物理的に新しいものではなく，フェルミー粒子の自由場として比較的よく知られたものであるが，数学的な見方には興味深いものがあるように思われる。

紹介にあたっては、各事項についてできる限り次の三つの角度から眺めることにする。　第1は無論著者達の見方，第2は有限次元の場合行列代数としてどういうことになっているかということ，第3に物理の人が慣れている記号になおすこと。

§1 クリフォード代数

(1°) 定義

M：実 pre Hilbert space

$\mathcal{H}$：実ヒルベルト空間

(3°)により一般のMは$\mathcal{H}$の場合に帰着。

$C_0(M)$ ：M上の複素クリフォード代数

$$\equiv \frac{\text{Mから生成される複素係数テンソル代数}}{\text{反交換関係}\{xy+yx=2(x,y)\,;\ x,y\in M\}}$$

又Mの元が self adjoint であるように定義する。

Remark 1. 反交換関係は $x^2=\|x\|^2 1$ と同値。

Remark 2. NがMの部分空間ならば，$C_0(M)$ の中でNにより生成される部分代数は自然に $C_0(N)$ と同型で，今後それをも $C_0(N)$ と書く。

Remark 3. $M=M_1+M_2$, $M_1\perp M_2$ ならば，$C_0(M)=C_0(M_1)C_0(M_2)$.

ここで AB は有限和 $\sum a_j b_j$, $a_j\in A$, $b_j\in B$ の全体を表わす。

(2°) 有限偶数次元の場合

Mの次元を $2n$ とすると，$C_0(M)$ は $\mathcal{M}_{2^n}(C)$ [$2^n\times 2^n$ の複素行列全体の作る代数] と同型である。

文献は

(3) R. Brauer and H. Weyl, Amer. J. Math. 57 (1935), 425–449.

特に $n=1$ の時，Pauli行列 $\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$, $\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

を使うと，例えば

$$\pi:\ (a,b)\in M\longrightarrow a\sigma_1+b\sigma_2\in\mathcal{M}_2(C)$$

により $C_0(M)\to\mathcal{M}_2(C)$ の同型対応を生成できる。 一般の n の場合は，

$e_1\cdots e_{2n}$ を正規直交基底とした時，$C^{2^n}=(C^2)^{\otimes n}$ 上で各 C^2 に働く

$\sigma^{(k)}_{1,2,3}$; $k=1,\cdots n$ を使って，例えば

$$\pi:\ \begin{array}{l} e_{2k+1}\to\sigma_3^{(1)}\cdots\sigma_3^{(k)}\,\sigma_1^{(k+1)}\\ e_{2k+2}\to\sigma_3^{(1)}\cdots\sigma_3^{(k)}\,\sigma_2^{(k+1)}\end{array}$$

により $C_0(M)\to\mathcal{M}_{2^n}(C)$ の同型対応を生成できる。

(3°) C^* 代数化

$C(M)$: $C_0(M) \subset C$, M : *elementwise selfadjoint* のような C^* 代数 C のうち最小のもの.

$\| \ \|_\infty$: $C(M)$ のノルム

M が無限次元のとき, $C(M)$ が存在して一意的であることは, 次のようにしてわかる。 N を M の任意の有限偶数次元部分空間とすると, $C_0(N) \subset C_0(M)$ で $C_0(N)$ は単純代数 $\mathfrak{M}_{2^n}(C)$ と同型である。 したがって行列代数としてのノルムを $C_0(N)$ に一意的に定義できる。 これを $\| \ \|_\infty$ と書く。 N_1, N_2 に対し $N \supset N_1 + N_2$ をとることにより, $C_0(N_1) \cap C_0(N_2)$ の元に対し N_1 を使って定義したものと N_2 を使って定義したものが同一であることは明らか。 [$C_0(N)$ が単純であることを使っても明らか。] この $\| \ \|$ について $C_0(M)$ を完備化したものを $C(M)$ と定義する。 $\| \ \|_\infty$ が $C(M)$ において C^* ノルムの條件を満していることは作り方からただちに言える。

Lemma 1 M の次元が偶または無限なら $C(M)$ は単純である。

(証明) M の次元が有限偶については known. 無限次元の場合については, $N \subset M$, $\dim N$ even に対して $C(M)$ の任意の 0 でない表現で $C_0(N)$ の表現の演算子ノルムは $\| \ \|_\infty$ と一致する。 したがって $C_0(M)$ 故に $C(M)$ の元についても同一のことが成立する。

Remark (1°) Remark 1 により, $x \in M$ に対し $\|x\|_\infty = \|x\|$.
($\| \ \|$ は M のノルム。)

Proposition 2 M が $\mathcal{H}$ で稠密なら $C(M) = C(\mathcal{H})$.
(上記 Remark より明らか。)

(4°) Central state E_0 — 有限次元の場合

$C_0(M)$ の状態 E とは $C_0(M)$ 上線形汎関数で $E(u^* u) \geq 0$, $E(1) = 1$ を満たすもの。$C_0(M)$ の状態 E_0 に対する次の條件は互に同値で，$C_0(M)$ の central state E_0 を一意的に定める。

(i) $E_0(u\ v) = E_0(v\ u)$, $u \in C_0(M)$, $v \in C_0(M)$

(ii) $E_0(u) = tr(\pi(u))/tr\,1$。ここに π は $C_0(M)$ から $\mathcal{M}_{2^n}(C)$ への同型写像，tr は trace。

(iii) $e_1 \cdots e_n$ を M の正規直交基底とすると，$C_0(M)$ は互に一次独立な $e_{j_1} \cdots e_{j_k}$, $j_1 < \cdots < j_k$, $k = 1, 2, \cdots n$ および 1 で張られるが，そのとき

$$E_0(e_{j_1} \cdots e_{j_k}) = 0, \quad E_0(1) = 1.$$

(iv) M の直交変換全体を $O(M)$ とする。$T \in O(M)$ は反交換関係を不変にするから，$C_0(M)$ の自己同型写像に拡大できるので，それを α_T とする。このとき任意の $T \in O(M)$ に対し

$$E_0(\alpha_T\ u) = E_0(u)$$

(証明) (i) $\Leftrightarrow$ (ii) が E_0 を一意的に定めることは well known. (iii) は (2°) の π と (ii) から明らか。(i) $\rightarrow$ (iv) : $E_0(\alpha_T\ u) \equiv E_1(u)$ とおく。$x \in M$, $u \in C_0(M)$ に対し，$E_1(x u x^{-1}) = E_0((\alpha_T x)(\alpha_T u)(\alpha_T x^{-1}))$ $= E_0(\alpha_T u) = E_1(u)$。すなわち $E_1(x v) = E_1(v x)$. $(v = u x^{-1})$ これを繰返し，E_1 の線形性も考えると，$E_1(v w) = E_1(w v)$, $w \in C_0(M)$. (i) より $E_1 = E_0$. (iv) $\rightarrow$ (i) : $x, y \in M$ に対し，$y \in M \rightarrow x y x^{-1} \in M$ は M の直交変換で，それを T_x と仮りに書くと (iv) から $E_0(\alpha_{T_x}\ u) = E_0(u)$，すなわち $E_0(x u x^{-1}) = E_0(u)$. これから (i) がでる。

(5°) Central state E_0 — 無限次元の場合

E_0 : (4°) の (i), (iii) with $n=\infty$, (iv) が互に同値で, $C_0(M)$ の (し
がって $C(M)$ の) 状態 E_0 を一意的に定義する. [有限偶数次元の
部分空間 $N\subset M$ を考えることにより明らか。]

$\|\ \|_2$: $\|u\|_2 = E_0(u^* u)^{1/2}$

$C^2(M)$: $C_0(M)$ の $\|\ \|_2$ による完備化. $C^2(M)\supset C(M)$.

L_v : $C^2(M)$ の有界対称作用素で $u\in C_0(M)$ に対し $L_v u = vu$.

R_v : $C^2(M)$ の有界対称作用素で $u\in C_0(M)$ に対し $R_v u = uv$.

Ω : $C^2(M)$ の有界対称作用素で $x_j\in M$, $j=1\cdots k$ に対し
$\Omega(x_1\cdots x_k) = (-1)^k(x_1\cdots x_k)$

Remark 1. $T\in O(M)\to \alpha_T u$, $u\in C_0(M)$ は $O(M)$ の strong operator topology から $C_0(M)$ の $\|\ \|_\infty$ 位相への連続写像. [$C_0(M)$ の $\|\ \|_\infty$ ノルムがMのノルム $\|\ \|$ とM上で一致することから明らか。]

Remark 2. $\|R_v\| = \|L_{v^*}\|$. 特に $x\in M$ に対しては $\|R_x\| = \|L_x\| = \|x\|$. 何故なら $\|uv\|_2^2 = E_0(v^*u^*uv) = E_0(uvv^*u^*) = \|v^*u^*\|_2^2$ および $\|u\|_2 = \|u^*\|_2$ より明らか。

§2. Fock 表示と生成消滅演算子

(1°) 非相対論的 Fermi 場

M : 物理では R^3 上の複素関数のある class, 例えば $\mathcal{S}$, $\mathcal{D}$, etc.
以下の目的には複素内積をもつ線型空間ならよい.

$(\ )_c$: Mの複素内積. 物理の場合

$$(f,g)_c = \int f(x)^* g(x)\,dx$$

$(\ )_R$: Mの実内積, $(f,g)_R = \mathrm{Re}\,(f,g)_c$

$\mathcal{H}$: Mの $(\ )_c$ による完備化。$(\ )_c$ に関して複素ヒルベルト空間であり，$(\ )_R$ に関して実ヒルベルト空間である。

Λ : $\mathcal{H}$を実ヒルベルト空間と考えたとき $f \in \mathcal{H} \longrightarrow if \in \mathcal{H}$ という$\mathcal{H}$の有界作用素。 iと書くとまぎらわしいことがあるので Λ と書く。

$$(f, g)_c = (f, g)_R + i(\Lambda f, g)_R$$

K : $K^* = K$, $K^2 = 1$, $K\Lambda = -\Lambda K$ をみたす$\mathcal{H}$上の有界実線形作用素。 物理では $(Kf)(x) = f(x)^*$.

$\psi(f)$: 消滅演算子。 物理では $\int \psi(x) f(x)\, dx$ と書く。

$\psi^+(f)$: 生成演算子。 物理では $\int \psi^+(x) f(x)\, dx$ と書く。 $\psi(f)$, $\psi^+(f)$ をまとめて Fermi 場とよぶ。 ともにfについて複素線形。

$\psi(f)^* = \psi^+(Kf)$.

反交換関係: 記号 $\{A, B\} = AB + BA$ を使うと

$$\{\psi(f_1), \psi(f_2)\} = \{\psi^+(f_1), \psi^+(f_2)\} = 0$$

$$\{\psi(f_1), \psi(f_2)^*\} = (f_2, f_1)_c\ 1$$

$f \in \mathcal{H}$ に対応する $f \in C_0(\mathcal{H})$ は，この記号では $(\psi(f) + \psi(f)^*)$ である。 これを仮りに $f \in \mathcal{H}$ と区別して $A(f)$ と書くと， $A(f)^* = A(f)$, $A(f)^2 = \|f\|^2\ 1$ をみたし

$$\psi(f) \equiv (A(f) - iA(\Lambda f))/2$$

$$\psi^+(Kf) \equiv (A(f) + iA(\Lambda f))/2$$

Remark 1. 物理では上記のψの代りにaまたはbと書くこともある。その時 Aをψと書くこともある。

Remark 2. 私自身は $(\psi^+, f) \equiv \psi^+(f)$, $(f, \psi) \equiv \psi(Kf)$ のような記号を使う。 そして $A(f)$ の代りに $(\psi^+, f) + (f, \psi)$ を使う。

Remark 3. $\mathcal{H}$を実ヒルベルト空間と捉えた場合，Λは $\Lambda^* = -\Lambda$，$\Lambda^2 = -1$ で特徴ずけられる。

(2°) Fock 空間

$\mathrm{Asym}\,\mathcal{H}^{\otimes n}$: $\mathcal{H}$のn個のテンソル積$\mathcal{H}^{\otimes n}$のうち完全反対称テンソルの部分。テンソル積としては代数的テンソル積を完備化したものを複素ヒルベルト空間として考える。$\mathcal{H} = L_2(R^3)$ なら $f(x_1 \cdots x_n) \in L_2(R^{3n})$，$(x_i \in R^3)$ のうち $x_1 \cdots x_n$ について完全反対称なものの作るヒルベルト空間が $\mathrm{Asym}\,\mathcal{H}^{\otimes n}$.

$|f_1 \cdots f_n\rangle$: $\mathrm{Asym}\,\mathcal{H}^{\otimes n}$ のベクトルで次の形のもの。

$$n!^{-1/2} \sum_P (\mathrm{sign}\, P)\, f_{P(1)} \otimes \cdots \otimes f_{P(n)}$$

ただしPは順列，$f_i \in \mathcal{H}$。f_iが一次独立でなければ0。物理ではn個の粒子がそれぞれ $f_1, \cdots, f_n$ という状態にあるような状態を表すと考える。

$\mathcal{F}(\mathcal{H})$: $\mathcal{H}$上の Fock 空間（with Fermi 統計）と呼ばれる複素ヒルベルト空間

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) \equiv C \oplus \mathcal{H} \oplus \mathrm{Asym}\,\mathcal{H}^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Asym}\,\mathcal{H}^{\otimes n} \oplus \cdots$$

Φ_F : $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ の summand C の中の単位ベクトル，例えば1，をΦ_Fと書きFock真空と呼ぶ。$|\rangle$ とも書く

N : Number operator と呼ばれ粒子の総数を意味する。$N\Phi_F = 0$，$N = n$ on $\mathrm{Asym}\,\mathcal{H}^{\otimes n}$ で定義される $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ の非有界対称作用素.

Ω : $(-1)^N$.

(3°) Fock 表示

$\psi_F(f)$: Fock表示の消滅演算子と呼ばれる $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ の有界線形作用素.

Kf の状態にある粒子を1個消す意味をもつ。その定義は

$$\psi_F(f)|f_1\cdots f_n> = \sum(-1)^j (Kf,f_j)|f_1\cdots\hat{f_j}\cdots f_n>$$

$$\psi_F(f)\ |> = 0$$

$\psi_F^+(f)$: Fock 表示の生成演算子と呼ばれる $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ の有界線形作用素。

f の状態にある粒子を一個作り出す意味をもつ。定義は

$$\psi_F^+(f)\ |f_1\cdots f_n> = |f\ f_1\cdots f_n>$$

$$\psi_F^+(f)\ |> = |f>$$

$|g_1\cdots g_m>$ と $|f_1\cdots f_n>$ の内積を $<g_m\cdots g_1|f_1\cdots f_n>$ と書く。その値は $n\neq m$ で 0, $n=m$ なら $\det[(g_i,f_j)]$ 。これから $\psi_F^+(f)^* = \psi_F(Kf)$ がわかる。また反交換関係も簡単に検証できる。

$$f\in\mathcal{H}\ \rightarrow\ \psi_F(f)+\psi_F^+(Kf)\equiv A_F(f)$$

はクリフォード代数 $C(\mathcal{H})$ の一つの表現を生成する。これを仮に Fock 表現と呼ぶことにする。

$$f\in\mathcal{H}\ \longrightarrow\ \psi_F(Kf)+\psi_F^+(f)\equiv A_F'(f) = A_F(Kf)$$

を考えるとこれもクリフォード代数 $C(\mathcal{H})$ の一つの表現を生成する。これを Anti Fock 表現と呼ぶことにする。実は上の二つの表現のいずれを Fock 表現と呼びいずれを Anti Fock 表現と呼ぶかは本質的ではない。

$i\longleftrightarrow -i$ で互に移る。別の見方をすると,

$$\psi_F(f) = (A_F(f) - iA_F(\Lambda f))/2$$
$$\psi_F(f)^* = \psi_F^+(Kf) = (A_F(f) - iA_F(\Lambda f))/2$$
$$\psi_F^+(f) = (A_F'(f) - iA_F'(\Lambda f))/2$$

だから ψ_F と ψ_F^+ が入れ代るとも言える。

どちらの表現も既約である。[証明: Ψ_F は巡回ベクトル, かつ $\psi_F(f)\Psi_F = 0$ for all $f\in\mathcal{H}$ で Ψ_F が phase を除いて定まる。これより既約性は明らか。]

(4°) 自由 Fermi ガスの平衡状態と central state E_0

Fock 空間2個を使って次のような構成を行う。

$$\mathfrak{h} \equiv \mathcal{F}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}(\mathcal{H})$$

$$\Phi_0 \equiv \Phi_F \otimes \Phi_F$$

$$\Omega_1 \equiv \Omega \otimes 1 \quad , \qquad \Omega_2 \equiv 1 \otimes \Omega$$

$$\psi_1(f) \equiv \psi_F(f) \otimes 1 \qquad \psi_2(f) \equiv 1 \otimes \psi_F(f)$$

$$\psi_1^+(f) \equiv \psi_F^+(f) \otimes 1 \qquad \psi_2^+(f) \equiv 1 \otimes \psi_F^+(f)$$

ρ を $\rho \geq 0$, $1-\rho \geq 0$, $[\Lambda, \rho] = 0$ のような $\mathcal{H}$ の任意の有界対称作用素とすると，次式で生成される二組の表現 π_ρ, π_ρ' が得られる。

$$\pi_\rho : \quad f \in \mathcal{H} \longrightarrow \pi_\rho(f) \equiv \psi_{\rho 1}(f) + \psi_{\rho 1}(f)^*$$

$$\psi_\rho(f) \equiv \psi_1(\rho^{1/2} f) + \psi_2^+((1-\rho)^{1/2} f)\Omega_1$$

$$\pi_\rho' : \quad f \in \mathcal{H} \longrightarrow \pi_\rho'(f) \equiv \psi_{\rho 2}(f) + \psi_{\rho 2}(f)^*$$

$$\psi_{\rho 2}(f) \equiv [\psi_1((1-\rho)^{1/2} f) - \psi_2^+(\rho^{1/2} f)\Omega_1](i\Omega_1\Omega_2)$$

あるいは

$$A_1(f) \equiv \psi_1(f) + \psi_1(f)^* \quad , \qquad A_2'(f) \equiv \psi_2^+(f) + (\psi_2^+(f))^*$$

を用いれば

$$\pi_\rho(f) = A_1(\rho^{1/2} f) + A_2'((1-\rho)^{1/2} f)\Omega_1$$

$$\pi_\rho'(f) = [A_1((1-\rho)^{1/2} f) - A_2'(\rho^{1/2} f)\Omega_1](i\Omega_1\Omega_2)$$

これらの表現で Φ_0 に対応するベクトル状態を計算すると，π_ρ と $\pi_{1-\rho}'$ では全く同じ状態が得られ

$$E^\rho(f_1 \cdots f_n) = 0 \quad \text{for odd } n$$

$$\sum_{\substack{P(i) < P(n-i) \\ P(1) < \cdots < P(n/2)}} \mathrm{sign}\, P \prod_{i=1}^{n/2} [(f_{P(i)}\rho f_{P(n-i)})^* + (f_{P(i)}(1-\rho) f_{P(n-i)})]_{i=1\cdots} \quad \text{for even } n$$

となる。ただし和は $P(i) < P(n-i)$, $P(1) < \cdots < P(n/2)$ をみたす

すべての順列 P についてとる。したがって π_ρ と $\pi_{1-\rho}'$ は equivalent である。

$\rho=0, 1$ は Fock 表現および Anti Fock 表現に帰着し，また $\rho=1/2$ のときは central state E_0 が得られる。次の Lemma により，$\rho>0$，$1-\rho>0$ ならば Φ_0 は $\pi_\rho(C(\mathcal{H}))$ の巡回ベクトルとなり従って E^ρ から construct した巡回表現は π_ρ となる。また Φ_0 は $\pi_\rho(C(\mathcal{H}))$ の separating ベクトルになり，従って $C^2(\mathcal{H}) \supset C(\mathcal{H})$ がわかる。

<u>補助定理</u> $\pi_\rho(C(\mathcal{H}))$，$\pi_\rho'(C(\mathcal{H}))$ は factorization である。また $\rho>0$，$1-\rho>0$ ならば Φ_0 はそれぞれの cyclic and separating ベクトルである。

（証明） $\pi_\rho(C(\mathcal{H}))' \supset \pi_\rho'(C(\mathcal{H}))$ は明らか。

$(\pi_\rho(C(\mathcal{H})) \cup \pi_\rho'(C(\mathcal{H})))''$ の既約性は

$$[\pi_\rho(\rho^{1/2}f)-i\pi_\rho'((1-\rho)^{1/2}f)-i\pi_\rho(\rho^{1/2}\Lambda f)-\pi_\rho'((1-\rho)^{1/2}\Lambda f)]\Phi_0=0$$

$$[\pi_\rho((1-\rho)^{1/2}f)+i\pi_\rho'(\rho^{1/2}f)+i\pi_\rho((1-\rho)^{1/2}\Lambda f)-\pi_\rho'(\rho^{1/2}\Lambda f)]\Phi_0=0$$

で Φ_0 が phase を除き定まることと，Φ_0 が $\pi_\rho \cup \pi_\rho'$ の cyclic vector（後述）であることから出る。

（上の Φ_0 が一意的であることの証明は $\Omega_1\Omega_2=-1$ の空間の部分が少し面倒であるが，省略する。）

$\rho>0$，$1-\rho>0$ のとき Φ_0 の cyclicity は次のようにして出る。$\pi_\rho(C(\mathcal{H}))$ を考える。まず $\{\pi_\rho(f)+i\pi_\rho(\Lambda f)\}/2 \equiv \psi_\rho^+(Kf)$ を使って $\psi_\rho^+(f_1)\cdots\psi_\rho^+(f_n)\Phi_0$ を作ると $|\rho^{1/2}f_1\cdots\rho^{1/2}f_n\rangle\otimes\Phi_F$ が得られるから，$\mathcal{T}(\mathcal{H})\otimes A_{sym}\mathcal{H}^{\otimes n}$，$n=2,3,\cdots$ が順次得られる。同様にして Φ_0 は $\pi_\rho'(C(\mathcal{H}))$ の巡回ベクトルでもある。従って $\pi_\rho(C(\mathcal{H}))$，$\pi_\rho'(C(\mathcal{H}))$ それぞれの separating vector である。

$(\pi_\rho(C(\mathcal{H})) \cup \pi'_\rho(C(\mathcal{H})))''$ について Φ_0 が cyclic であることは（$\rho > 0$，$1-\rho > 0$ が成立しなくても）π_ρ と π'_ρ の両方を使うことにより同じようにして得られる。

§3. 文献[1]の結果

(1°) 状態 E_ρ

定理1　$\mathcal{H}$ が複素ヒルベルト空間，A と B は $\mathcal{H}$ の実線形作用素（i. e. $\mathcal{H}$ を実ヒルベルト空間と考えた時の線形作用素）で $A^*A + B^*B = 1$ を満たすものとする。写像

$$F : x \in \mathcal{H} \longrightarrow L_{Ax} + iR_{\wedge Bx}\Omega$$

は $C^2(\mathcal{H})$ における $C_0(\mathcal{H})$ の *-表現を与える。

ただし L, R, Ω は §1 (5°) で定義されたもの。

（証明）

$$(L_{Ax} + iR_{\wedge Bx}\Omega)^* = L_{Ax} + iR_{\wedge Bx}\Omega$$

$$(L_{Ax} + iR_{\wedge Bx}\Omega)^2 = \|x\|^2 1$$

（証終）

特に

$$A = (1/2)[(1+T)^{1/2} + (1-T)^{1/2}]$$

$$B = (1/2)[(1+T)^{1/2} - (1-T)^{1/2}]$$

とおいたものを F_T と書く。そして

$$E_T(u) = E_0(F_T(u))$$

で E_T を定義する。

Remark. §2 の具体的な construction を使うと

$$\Omega = \Omega_1\Omega_2$$

$$L_x = \pi_{1/2}(x) = (A_1(x) + A'_2(x)\Omega_1)/\sqrt{2}$$

$$iR_{\wedge y}\Omega = \pi'_{1/2}(y)(-i\Omega) = (A_1(x) - A'_2(x)\Omega_1)/\sqrt{2}$$

第2の等式は次のようにしてわかる。

$$\begin{aligned} R_{\Lambda y}\, u\, \Phi_0 &= u\, \pi_{1/2}(\Lambda y)\, \Phi_0 \\ &= u(\psi_1(\Lambda y)^* + \psi_2^+(\Lambda y))\, \Phi_0/\sqrt{2} \\ &= -iu(\psi_1(y)^* - \psi_2^+(y))\, \Phi_0/\sqrt{2} \\ &= -u\, \pi'_{1/2}(y)\, \Phi_0 \;=\; -\pi'_{1/2}(y)\, u\, \Phi_0 \end{aligned} \qquad \text{(以上)}$$

上記の identification を使うと

$$\begin{aligned} (L_{A_T x} + i R_{\Lambda B_T x}\, \Omega) &= (A_1[(1+T)^{1/2} x] + A_2'[(1-T)^{1/2} x])/\sqrt{2} \\ &= \pi_{(1+T)/2}(x) \end{aligned}$$

すなわち $E_T = E^{(1+T)/2}$ で E_T と E^{ρ} が identify される。

(2°) Fock 表現

記号：$\mathcal{H}$ は複素ヒルベルト空間，同時に実ヒルベルト空間とも見なしその時 i を Λ と書く。$p_1 p_2 \cdots$ を複素空間としての基底ベクトル，$q_j = \Lambda p_j$，$\mathcal{H}$ を実ヒルベルト空間と考えてその複素化を $\mathcal{H} + i\mathcal{H}$，$z_j = (p_j + i q_j)/\sqrt{2}$ $(\in \mathcal{H} + i\mathcal{H})$。任意の $\varphi \in \mathcal{H} + i\mathcal{H}$ に対し $\mathcal{A}_\varphi$ を φ の $\mathcal{H} + i\mathcal{H}$ における直交補空間と1とで生成される $C_0(\mathcal{H})$ の部分代数とすると，$C_0(\mathcal{H}) = \mathcal{A}_\varphi + \varphi \mathcal{A}_\varphi$。そこで $u \in C_0(\mathcal{H})$ に対し $u = a + \varphi b$ により a と b は $\mathcal{A}$ の元として一意に定まる。特に b を $(\partial/\partial\varphi) u$ と書く。$(\partial/\partial\varphi)$ は $\| \ \|_2$ ノルムに関し有界で，$C^2(\mathcal{H})$ の有界作用素に一意的に拡大される。

$\mathfrak{H}_0(\mathcal{H})$ ： $C_0(\mathcal{H})$ の部分代数で，1 と $x + i\Lambda x$，$x \in \mathcal{H}$ で生成されるもの。

$\mathfrak{H}^2(\mathcal{H})$ ： $\mathfrak{H}_0(\mathcal{H})$ の $\| \ \|_2$ ノルムによる完備化。$C^2(\mathcal{H})$ の部分空間，$u \in C_0(\mathcal{H})$ が $\mathfrak{H}^2(\mathcal{H})$ に属するためには

$$(\partial/\partial z_1^*)\, u = 0, \qquad (\partial/\partial z_2^*)\, u = 0, \qquad \cdots$$

が必要十分である。そのときuは holomorphic であると称する。

定理2　写像

$$F_1 : x \in \mathcal{H} \to (L_x + iR_{\Lambda x}\Omega)/\sqrt{2}$$

は $C_0(\mathcal{H})$ の＊表現で，$\mathfrak{H}_2$ はこの表現作用素のもとで $C^2(\mathcal{H})$ の中の極小不変閉部分空間を作る。（すなわち，$\mathfrak{H}_2$ へ restrict するとこの表現は既約である。これを holomorphic spinor 表現と呼ぶ。

Remark 1.　これは前の F_T で $T=1$ とおいたもの，すなわち $\rho=1$ に対応し，§2で定義した Fock 表現に一致する。また $\mathfrak{H}^2(\mathcal{H})$ は Φ_0 に

$$\pi_{1/2}(x) + i\pi_{1/2}(\Lambda x) = \sqrt{2}(\psi_1^+(Kx) + \psi_2(Kx))$$

を順次かけて得られるベクトルで張られるから $\mathcal{J}(\mathcal{H}) \otimes \Phi_F$ に一致し，その上で π_1 は規約であることは既に示した。

Remark 2.　別の記号では $\|\varphi\|^2 \partial/\partial\varphi = R_{\varphi^*} - L_{\varphi^*}\Omega$．ここで $\varphi = u + iv$，$u \in \mathcal{H}$，$v \in \mathcal{H}$ なら $\varphi^* = u - iv$．§2の記号では $C^2(\mathcal{H}$ での作用素としては

$$\pi_{1/2}(\varphi^*) - \pi'_{1/2}(\Lambda\varphi^*)\Omega = [A_1(\varphi^*) - iA_1(\Lambda\varphi^*)]/\sqrt{2} + [A'_2(\varphi^*) + iA'_2(\Lambda\varphi^*)]/\sqrt{2}$$

特に $\varphi = z^* = p - i\Lambda p$ ならば

$$= \sqrt{2}\,A'_2(p + i\Lambda p) = 2\sqrt{2}\,\psi_2(Kp)$$

従って $(\partial/\partial z_i^*)u = 0$ は $u \in \mathcal{J}(\mathcal{H}) \otimes \Phi_F$ を意味する．

(9°)　$\mathcal{H}$ のユニタリ変換

$\mathcal{H}$ のユニタリ変換全体を $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ とする。$\mathcal{U}(\mathcal{H})$ の一つの元 U で誘起された $C(\mathcal{H})$ の自己同型を α_U とすると，$E_0(\alpha_U(u)) = E_0(u)$ という E_0 の性質から

$$E_T(\alpha(u)) = E_{\alpha^{-1}T\alpha}(u)$$

従って，E_T は T と可換な $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ の元で不変である．特に T が数の場合，

$E_T(\alpha(u)) = E_T(u)$ がすべての α で成立する。特に $T=0$ の場合

$$u \in C_0(\mathcal{H}) \to \alpha(u) = \Gamma(U)u \quad (\in C_0(\mathcal{H}))$$

は $C^2(\mathcal{H})$ へ一意的に拡大し，$C^2(\mathcal{H})$ における $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ のユニタリ表現 $U \to \Gamma(U)$ を定義する。U と Λ が可換なから $\Gamma(U)$ は $\mathfrak{H}^2(\mathcal{H})$ を不変にし，$\mathfrak{H}^2(\mathcal{H})$ でも $\Gamma(U)$ が定義できる。

$$\Gamma(U)F_1(u)\Gamma(U)^{-1} = F_1(\alpha(u))$$

Γ に対応する無限小変換を $d\Gamma$ と書く。H が $\mathcal{H}$ の自己共軛作用素のとき

$$d\Gamma(H) = \frac{1}{i}(d/dt)\,\Gamma(\exp itH)_{t=0}$$

H の domain を $\mathcal{D}$，1 と $(1+i\Lambda)\mathcal{D}$ で生成される $\mathfrak{H}_0(\mathcal{H})$ の部分代数を $\mathfrak{H}_0(\mathcal{D})$ と書くと $d\Gamma(H)$ は $\mathfrak{H}_0(\mathcal{D})$ 上の derivation で $d\Gamma(H)(1+i\Lambda)x = (1+i\Lambda)Hx$ for $x \in \mathcal{D}$. $P_1, P_2 \cdots$ を $\mathcal{H}$ の正規直交基底とし，$P_j \in \mathcal{D}$，$j=1,2\cdots$ ならば，

$$d\Gamma(H)u = \sum_j L_{Hz_j}\frac{\partial}{\partial z_j}u$$

右辺が収束するようなuは $d\Gamma(H)$ の domain に入っている。（右辺の項が derivation であることは公式 $(\partial/\partial z)(uv) = (\partial u/\partial z)v + (\Omega u)(\partial v/\partial z)$ および $u \in \mathfrak{H}_0(\mathcal{H})$，$\omega \in (1+i\Lambda)\mathcal{H}$ に対し $L_\omega u = R_\omega \Omega u$ より示される。）

Remark. §2 の記号で Fock 空間上の $\Gamma(U)$ は

$$\mathcal{J}(U) \equiv \sum_n{}^{\oplus} U^{\otimes n} \quad \text{on} \quad \mathcal{J}(\mathcal{H}) = \sum{}^{\oplus} \mathrm{Asym}\,\mathcal{H}^{\otimes n}$$

を用いると $\Gamma(U) = \mathcal{J}(KUK)$. ただし $n=0$ に対し $\mathrm{Asym}\,\mathcal{H}^{\otimes n} \equiv C$，$U^{\otimes n} = 1$. Anti Fock 表現では $\Gamma(U) = \mathcal{J}(U)$ で $C^2(\mathcal{H})$ 上では $\Gamma(KUK) \otimes \Gamma(U)$ となる。これから $d\Gamma(H)$ も容易に表せる。例えば Anti Fock 表現の $\mathrm{Asym}\,\mathcal{H}^{\otimes n}$ で $d\Gamma(H)$ は $\sum_{j=0}^{n-1}(1^{\otimes j} \otimes H \otimes 1^{\otimes(n-j-1)})$ である。

(4°) 対称状態

定義 $\mathcal{H}$を複素ヒルベルト空間，$P_1 P_2 \cdots$をその正規直交基底とする．$C_0(\mathcal{H})$の状態Eが，この基底について対角的な$\mathcal{H}$の任意のユニタリー変換に関し不変の時，Eはこの基底のまわりで対称であるという．

Lemma 3 $\mathcal{H}$が複素ヒルベルト空間で$P_1 P_2 \cdots$をその正規直交基底とする．この基底に関し対角的なユニタリ変換を拡大して得られる$C_0(\mathcal{H})$の自己同型は$C_0(\mathcal{H})$を$\| \ \|_2$について pre Hilbert 空間と考えたときのある正規直交基底について対角的で，$C_0(\mathcal{H})$の状態Eが$P_1 P_2 \cdots$のまわりで対称であるための必要十分条件は，Eがこの基底のうち上記自己同型のすべてに関する固定点以外に対して0になることである．

（証明） $q_j = \Lambda p_j$，$Z_j = 2^{-1/2}(P_j + i q_j)$，$S_j = i P_j q_j = 1 - Z_j Z_j^*$ とおく． Ξ_1，Ξ_2がともに自然数の有限集合のとき

$$Z(\Xi_1\ \Xi_2) \equiv (\Pi_{j\in\Xi_1,\, j\notin\Xi_2} Z_j)(\Pi_{j\notin\Xi_1,\, j\in\Xi_2} Z_j^*)(\Pi_{j\in\Xi_1\cap\Xi_2} S_j)$$

ここにΠはjの自然な順序での積を示し，jが空集合を走るときのΠ_jは1と考える。 この$Z(\Xi_1, \Xi_2)$の全体は$C^2(\mathcal{H})$の正規直交基底をなす。

αが$P_1 P_2 \cdots$について対角的なユニタリ変換から得られる$C_0(\mathcal{H})$の自己同型とし，$\alpha(P_j) = (\mathrm{Re}\ \lambda_j) P_j + (\mathrm{Im}\ \lambda_j) q_j$ とすると，

$$\alpha(Z_j) = \overline{\lambda}_j Z_j, \quad \alpha(Z_j^*) = \lambda_j Z_j^*, \quad \alpha(S_j) = S_j$$

従って $Z(\Xi_1, \Xi_2)$についてαは対角的である． 故にαで不変なEはαの固有値1に属さない$Z(\Xi_1\ \Xi_2)$に対しては0でなければならない。

次にEがαで不変でない$Z(\Xi_1\ \Xi_2)$のすべてに対し0であったとする。このとき明らかにEは$Z(\Xi_1, \Xi_2)$の有限線形結合に対してはαで不変である。 Pとqの有限線形結合の全体をMとするとMは$\mathcal{H}$で$\| \ \|_\infty$ノルムに関し稠密であり，Eは$C_0(M)$に限ればαで不変である。 任意の状態は$\| \ \|_\infty$

ノルムで連続だからEは $C_0(\mathcal{H})$ に対し α で不変である。　　　　（証終）

定理3　$\mathcal{H}$ が複素ヒルベルト空間，$P_1, P_2, \cdots$ をその正規直交基底，$g_j = \Lambda p_j$，$s_j = i p_j g_j$ とする。$P_1 P_2 \cdots$ のまわりで対称な $C_0(\mathcal{H})$ の状態Eと $\Delta = \times_{j=1}^{\infty}\{1, -1\}$ の上の確率測度 μ との間に $s_1 s_2 \cdots$ を確率変数と考えたときEが与える joint distribution で定められる一対一対応が存在する。Eが pure であることと μ が一点に集中していることは同値であり，一般のそのようなEは $E(u) = \int_\Delta E^\gamma(u)\,d\mu(\gamma)$ のように純状態 $E^\gamma(u)$ の平均として表される。（$\gamma_j = \pm 1$ で $E^\gamma(s_{j_1} \cdots s_{j_n}) = \prod_{l=1}^{n} \gamma_{j_l}$.）

（証明）Lemma 3 によりEは1と $s_1, s_2 \cdots$ で生成される部分代数 $\mathfrak{A}$ の上の値で定まり，Eの $\mathfrak{A}$ への制限は $\mathfrak{A}$ の任意の状態でよい。$\mathfrak{A}$ は可換であり，$s_j^2 = 1$ であるからEと μ の間に一対一対応があることがわかる。μ として Δ の上の任意の測度が許されることは次のようにしてわかる：$u \in C_0(M)$ に対し $E^\gamma(u)$ が有限個の γ_j にだけよることから $\gamma \to E^\gamma(u)$ は可測，任意の $u \in C_0(\mathcal{H})$ に対しては $E^\gamma(u)$ は $E^\gamma(v)$，$v \in C_0(M)$ の γ 一様な極限として得られるから，やはり可測，従って $E(u) = \int_\Delta E^\gamma(u)\,d\mu(\gamma)$ が $C_0(\mathcal{H})$ の上の状態となる。E^γ の既約性は，Fock表現の既約性と，任意の E^γ が Fock真空 $E^{(1,1\cdots)}$ から $P_j \to P_j$，$g_j \to \gamma_j g_j$ という $C_0(\mathcal{H})$ の自己同型によって得られることから明らか。（証終）

Lemma 4.　$C_0(\mathcal{H})$ の任意の状態Eが $E(s_j) = 1$ を満たせば，EはFock真空である。

（証明）定理3があるので，Eが $P_1 P_2 \cdots$ のまわりで対称であることを言えばよい。G を $P_1, P_2 \cdots$ について対角的なユニタリ作用素の作る群とし，strong operator topology を考えると，円の無限積と考えられてコンパクトである。G の Haar 測度を使って（$E(\alpha_U(u))$ は U の strong op.

topology について連続。）

$$\int_G E(\alpha_U(u))\,dU = E'(u)$$

を作ると E' は定理3の条件をみたし，$E'(s_j)=1$ なので Fock 真空である。その既約性により $E(\alpha_U(u))$ も Fock 真空でなければならない。したがってEが Fock 真空である。

<u>Corollary 1</u>　$E(ix\wedge x)=\|x\|^2$ ならEは Fock 真空

<u>Remark</u>　Fock真空を基準にとったとき，E^γ は $\gamma_j=-1$ のような状態 j が粒子で占きょされ，$\gamma_j=1$ のような状態 j は空いているような状態を表す。Fock 真空は全部空いていてどこにも粒子がいない状態ということである。Anti Fock 真空を粒子が全然いない状態とみなせば全部反対の解釈になる。どちらの解釈をとっても差支えない。

<u>(5°) 普遍対称状態</u>

<u>定義</u>　$U(\mathcal{H})$ で不変な $C_0(\mathcal{H})$ の状態を普遍対称であるという。

<u>定理 4</u>　$\mathcal{H}$ が無限次元のとき $C_0(\mathcal{H})$ の普遍対称状態Eは $\int_{-1}^{1} E_{t1}(u)\,d\mu$ $= E(u)$ を通じて $[1,-1]$ の任意の測度 μ と1対1に対応している。ここに $E_{t1}(u)$ は E_T のTがスカラー作用素 $t1$ の場合である。

（証明）　Eに対応する Δ 上の測度 μ は j のすべての permutation に対し不変でなければならない。Finetti の定理［E. Hewitt and L.J. Savage, Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955), 470-501］により，そのような測度のうち端点は対称な積測度である。それは E_{t1} に他ならない。（E_{t1} は $\{1,-1\}$ の1に $\frac{1+t}{2}$，-1 に $\frac{1-t}{2}$ を与える測度の $j=1\cdots$ の積測度に対応する。即ち $E_t(s_j)=t$.）　（証終）

<u>Corollary 2</u>　$\mathcal{H}$ が複素ヒルベルト空間で無限または有限次元とする。

$P_1 P_2 \cdots$ のまわりで対称な状態Eに対応する測度μが $\Delta = \times_{j=1}^{\infty} \{1, -1\}$ で対称ならEは普遍対称。

<u>Corollary 3</u> $\mathcal{H}$が複素ヒルベルト空間, $P_1 P_2 \cdots$が正規直交基底, $\mathcal{H}_R$は$P_1 P_2 \cdots$で張られる実ヒルベルト空間とすると, $\mathcal{H}_R$の直交変換は明らかに$\mathcal{H}$のユニタリ変換に拡大できる。そのようなユニタリ変換に関し不変な$C_0(\mathcal{H})$の状態は普遍対称である。

§4 文献〔2〕の結果

前節では$\mathcal{H}$のユニタリ変換を考えたが, ここでは$\mathcal{H}$の直交変換Rを考え, Rで$C_0(\mathcal{H})$に誘起される自己同型がFock表現においてユニタリ変換で実現できる為の條件を求める。ユニタリ変換に対してはFock真空が不変で簡単に求めるユニタリ変換がえまったが, 一般の直交変換に対してFock真空は不変でないので, 少し議論が必要である。目標は

<u>定理</u> $\mathcal{H}$が複素ヒルベルト空間, F_1をクリフォード代数$C_0(\mathcal{H})$の空間$\mathfrak{H}^2(\mathcal{H})$における holomorphic spinor表現(Fock表現)とする。Jを$\mathcal{H}$の直交変換, Jによって誘起される$C_0(\mathcal{H})$の自己同型を$\mathcal{J}$とする。$\mathfrak{H}^2(\mathcal{H})$上のユニタリ作用素Uで$F_1(\mathcal{J}(u)) = U^{-1}F_1(u)U$, $u \in C_0(\mathcal{H})$をみたすものが存在する為の必要かつ十分條件はJが$J = V \cdot W$のような$\mathcal{H}$のユニタリ作用素Vと$W-1$がヒルベルトシュミット型の実線型作用素Wの積に表されることである。

まず最初に$\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_b$(複素ヒルベルト空間として)のとき$\mathfrak{H}_0(\mathcal{H})$は$\mathfrak{H}_0(\mathcal{H}_a)\mathfrak{H}_0(\mathcal{H}_b)$で張られるから, $\mathfrak{H}^2(\mathcal{H}) = \mathfrak{H}^2(\mathcal{H}_a) \otimes \mathfrak{H}^2(\mathcal{H}_b)$と考えられ, $x = x_a \oplus x_b$のとき, $F_1(x) = F_{1a}(x_a) \otimes 1 + \Omega_1 \otimes F_{1b}(x_b)$となる。

Lemma α　$\mathcal{H}=\mathcal{H}_a\oplus\mathcal{H}_b$,　$J=J_a\oplus J_b$　のとき，$C_0(\mathcal{H})$ の自己同型 $\mathcal{J}$ が $\mathfrak{H}^2(\mathcal{H})$ でユニタリ実現可能のためには，$\mathcal{J}_a$, $\mathcal{J}_b$ がそれぞれ $\mathfrak{H}^2(\mathcal{H}_a)$ および $\mathfrak{H}^2(\mathcal{H}_b)$ でユニタリ実現可能であることが必要十分である。

（証明）十分性：$\mathcal{J}_a$, $\mathcal{J}_b$ が U_a, U_b で実現されたとする。$\Omega_a=\Gamma_a(-I)$ であるから $\Omega_a U_a$ と $U_a\Omega_a$ とは $C_0(\mathcal{H})$ に同じユニタリ変換を起す。すなわち $\Omega_a U_a\Omega_a U_a^*$ は $C_0(\mathcal{H})'$ に属し従ってある常数 α である。$\Omega_a^2=1$ から $\alpha=1$。故に $U_a\Omega_a=\pm\Omega_a U_a$. そこで $U=\Gamma(I\oplus\pm I)(U_a\otimes U_b)$ は $C_0(\mathcal{H})$ の自己同型 $\mathcal{J}$ を起す。

必要性：U が存在したとすると $C_0(\mathcal{H}_a)\to UC_0(\mathcal{H}_a)U^*$ は自己同型 $\mathcal{J}_a$ であるが，$C_0(\mathcal{H}_a)''$ の自己同型に拡大できる（ユニタリ変換）から，$C_0(\mathcal{H}_a)''$ が I 型因子であることを使えば，$\mathfrak{H}^2(\mathcal{H}_a)$ 上のユニタリ作用素 U_a が存在して $\mathcal{J}_a$ を実現することがわかる。$\mathcal{J}_b$ も同様。

Lemma β　複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を実空間とみなして i を Λ と書く。J を $\mathcal{H}$ の直交変換とすると，$\mathcal{H}=M\oplus\Lambda M'$,　M：$\mathcal{H}$ の実部分空間　$J=U(S\oplus 1)$,　U：ユニタリ，S：M 上直交変換　のように書ける。

（証明）証明の手段として $H=\mathcal{H}+i\mathcal{H}$　を考える。ここに i は Λ とは無関係の複素構造で，H を実空間とみる場合は $H=\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ と考え $i(x\oplus y)=(-y)\oplus x$　のような直交変換 i を考える。別に $T(x\oplus y)=x\oplus(-y)$ という直交変換 T（複素共軛）を定義する。$L\equiv\Lambda\oplus\Lambda$，$\hat{J}\equiv J\oplus J$　（on $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$）　とおくと，新しい複素構造に関し L, $\hat{J}$ はユニタリである。$\hat{J}_1\equiv L^{-1}\hat{J}^{-1}L\hat{J}$　とおくと，$L^{-1}\hat{J}_1L=\hat{J}_1^{-1}$.
一般に A, B がユニタリで $A^2=-1$，$A^{-1}BA=B^{-1}$　のとき，B の ±1，上半面，下半面のスペクトルに属する空間をそれぞれ H_0, H_+, H_- と書くと

$H = H_0 \oplus H_+ \oplus H_-$, H_0 は A, T, i で不変, H_+, H_- は i で不変だが $TH_\pm = H_\mp$ （T は B と可換, i と反可換）, $AH_\pm = H_\mp$

H_+ は TA で不変 $(TA)^2 = -1$, TA は i と反可換で $(TA)B(TA)^{-1} = B^{-1}$ であるから $H_+ = N \oplus TAN$ のような H_+ の B 不変な部分空間 N がある. （B のスペクトルに関する N の直積分分解で, 各成分空間が TA で不変になること, および $(TA)^2 = -1$, $(TA)i = -i(TA)$ の既約表現は一意的で二次元空間上の Clifford algebra を作ることより明らか。）

このとき $N_1 = N \oplus TN$ とおくと N_1 および H_0 は T 不変で $N_1 = M_1 + iM_1$ $H_0 = \mathcal{H}_0 + i\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus (M_1 \oplus \Lambda M_1)$, M_1 は B 不変となる。（$H_+ + H_- = N_1 \oplus AN_1$ に注意） $J_1 \equiv \Lambda^{-1} J^{-1} \Lambda J$ は $\mathcal{H}_0$ 上では Λ と可換かつ $J_1^2 = 1$ であり, また $M \oplus \Lambda M$ 上では $B_1 \oplus \Lambda B_1^{-1} \Lambda^{-1}$ と書ける。もちろん B_1 は M 上の直交変換である。

$\mathcal{H}_0$ のうち $J_1 = \pm 1$ の固有空間をそれぞれ $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_{-1}$ と書くと, それぞれ Λ 不変であり, $\mathcal{H}_{-1}$ 上では $\Lambda J = -J\Lambda$. そこで $\mathcal{H}_{\pm 1} = M_\pm \oplus \Lambda M_\pm$ のような分解を一つ固定, $M = M_+ \oplus M_- \oplus M_1$, $S = 1 \oplus -1 \oplus B_1$ と定義すると, $\mathcal{H} = M \oplus \Lambda M$ である。さらに $M \oplus \Lambda M$ 上で $U \equiv J(S^{-1} \oplus 1)$ を考えると, 各 $\mathcal{H}_{\pm 1}$, $\mathcal{H}_0^{\perp}$ へわけて考えればわかるように $\Lambda^{-1} U \Lambda = U$ でありしたがって U はユニタリである。（証終）

原論文では $J \oplus J$ についてこの Lemma が示してあるが, それだと本定理も $J \oplus J$ に対してまでしかすぐには出ない。ここでは原論文の証明を改良して J に対し直接示したので証明が少し長くなった。

ユニタリ変換 U で引き起こされる $\mathcal{C}_0(\mathcal{H})$ の自己同型は $\mathfrak{H}^2(\mathcal{H})$ 上ユニタリ実現可能であるから, 問題は $S \oplus 1$ on $M \oplus \Lambda M$ の $\mathfrak{H}^2(\mathcal{H})$ 上ユニタリ実現可能性に帰着された。

Lemma γ Sが連続スペクトルを持つと，$S \oplus 1$ で引き起こされる $C_0(\mathcal{H})$ の自己同型 $\mathcal{S}$ は $\mathfrak{H}^2(\mathcal{H})$ 上ユニタリ実現不可能である。

（証明） Lemma α によりSが連続スペクトルだけを持つ場合を考えれば十分。このとき $\mathfrak{H}^2(\mathcal{H})$ 上ユニタリVで $\mathcal{S}$ が実現されたとし，$y \equiv V1$（1 は Fock真空）を考える。任意の $\mathcal{H}$ 上ユニタリTが $S \oplus 1$ と可換なら，$V\Gamma(T)$ と $\Gamma(T)V$ は同じ自己同型を $C_0(\mathcal{H})$ に誘起するから，$C_0(\mathcal{H})$ の $\mathfrak{H}^2(\mathcal{H})$ 上既約性により $V\Gamma(T) = \lambda(T)\Gamma(T)V$.
特に $\Gamma(T)y = \lambda(T)y$. 特に $T = S \oplus S$ on $M \oplus \Lambda M$ を考えると S が連続スペクトルだけから成るならば $\Gamma(T) = \sum^{\oplus} T^{\otimes n}$ の点スペクトルは Fock真空に対応する唯一点1が多重度1で現れるのみで，したがって $y = 1$ すなわち Fock 真空 1はVで不変である。すなわち状態 E_1 は自己同型 $\mathcal{S}$ で不変でなければならない。ところが，$S \neq 1$ ならば $(S \oplus 1)\Lambda z \neq \Lambda(S \oplus 1)z$ なる $z \in \mathcal{H}$ が存在するから，
$E_1(\mathcal{S}(iz, \Lambda z)) = E_1(i((S \oplus 1)z)((S \oplus 1)\Lambda z)) < \|z^2\|$,
$E_1(iz \cdot \Lambda z) = \|z^2\|$ となり E_1 が $\mathcal{S}$ 不変であり得ない。すなわちVの存在から矛盾を導き出した。（証終）

そこで問題はSが離散的固有値を持つ場合に帰着する。再び証明技術として，$\mathcal{H}$ の Λ 構造とは別に $\hat{M} = M \oplus M$, $\hat{S} = S \oplus S$ を考えると $\hat{M}$ 上に適当な正規直交系 $p_1, p_1', p_2, p_2' \cdots$ があって $\hat{S}p_n = \cos\theta_n p_n + \sin\theta_n p_n'$, $\hat{S}p_n' = \cos\theta p_n' - \sin\theta_n p_n$ と書ける。そこで $\hat{S} \oplus I$ を $\hat{\mathcal{H}} = \hat{M} \oplus \Lambda\hat{M}$ 上で考える。

Lemma δ $\hat{S} \oplus I$ で誘起される $C_0(\hat{\mathcal{H}})$ の自己同型 $\hat{\mathcal{S}}$ がユニタリ実現できるためには，$S-1$ がヒルベルトシュミット型であることが必要十分である。

（証明）　$z_n = p_n + i\Lambda p_n$,　$z_n' = p_n' + i\Lambda p_n'$,　H_n：p_n と p_n' で生成される $\hat{\mathcal{H}}$ の部分空間，　S_n：$\hat{S}$ の H_n への制限とよび各 n に対応する $C_0(H_n)$，$\mathfrak{H}^2(H_n)$，真空 $\Phi_F^n \in \mathfrak{H}^2(H_n)$，表現 F_1^n，自己同型 $\hat{\mathcal{S}}_n$ を考える。$\mathfrak{H}^2(H_n)$ 上で $\hat{\mathcal{S}}_n$ は $U_n = \cos\frac{1}{2}\theta_n - \sin\frac{1}{2}\theta_n \; F_n(P_n P_n')$ で誘起される。$\mathfrak{H}^2(\hat{\mathcal{H}})$ は $\mathfrak{H}^2(H_n)$ の *incomplete* 無限テンソル積で，積ベクトル $\Pi^{\otimes}\Phi_F^n$ を含むものと *identify* でき，表現 $F_1(x)$，$x \in \hat{\mathcal{H}}$ は $\sum_{n=1}^{\infty}(\prod_{j=1}^{n-1}\Omega_j) \otimes F_1^n(x_n) \otimes (\Pi 1)$ と *identify* できるが，$\hat{\mathcal{S}}$ の各 $C_0(H_n)$ への制限は $\hat{\mathcal{S}}_n$ であり，従ってそれはユニタリ $\hat{U}_n = (\prod_{j=1}^{n-1} 1) \otimes U_n \otimes (\Pi 1)$ で実現される。そこで，$\hat{\mathcal{S}}$ のユニタリ実現性は $U = \Pi^{\otimes}(\alpha_n U_n)$ が適当な α_n，$|\alpha_n| = 1$ に対して存在することに同値である。[$U\Phi_F$ が *product vector* であり $L[B^2(H_n)]$ の *state* とに $U_n\Phi_F^n$ と同じであることより] その条件は *von Neumann* により与えられており，$\Pi|(\Phi_F^n, U_n\Phi_F^n)|$ の絶対収束性である。それは $\sum_n(1 - |\cos\frac{1}{2}\theta_n|) < \infty$ と同値である。$-\pi \leq \theta_n \leq \pi$ では $\sum|\theta_n|^2 < \infty$ と同値である。これは $S - 1$ がヒルベルトシュミット型ということと同値である。（証終）

$\hat{\mathcal{S}}$ と $\mathcal{S}$ のユニタリ実現可能性の同値は Lemma α から明らかだからこれで定理が証明されたことになる。

Remark 1.　$H = M \oplus \Lambda M$,　$S - 1$ とヒルベルトシュミット on M，で $S \oplus I$ に対応する自己同型 $\mathcal{S}$ を実現するユニタリ作用素 U は $C_0(M)$ で生成される W^* 代数に含まれる。

Remark 2.　偶または無限次元実ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の上に直交変換 T を考え，$\mathcal{H}$ のあらゆる複素ヒルベルト構造を考える。（i.e $\Lambda^2 = -1$，$\Lambda^* = -\Lambda$ をみたす Λ を考える。）　Λ のいかなるとり方についても T による $C_0(\mathcal{H})$ の自己同型が $\mathfrak{H}^2_\Lambda(\mathcal{H})$ 上でユニタリ実現できるためには

$T = \alpha I + X$, X: ヒルベルトシュミットが必要十分である。

Corollary $\mathcal{H}$ 上の直交変換を T, T で誘起される C^* 代数 $C(\mathcal{H})$ の自己同型を $\mathfrak{J}$ とする。$\mathfrak{J}$ が $C(\mathcal{H})$ のユニタリ要素 U で $x^{\mathfrak{J}} = U^{-1} x U$ のように実現されるためには $T = 1 + X$, X in trace class, $\det T = 1$ であるかまたは $T = -1 + X$, X in trace class, $\det(-T) = -1$ であることが必要十分である。証明は原論文にゆずる。

§5 むすび

Shale および Stinespring によって得られた諸結果は C^* 代数の自己同型についての研究を進める上に手頃な例を与える意味で興味深い。

例えば $\mathcal{H}$ のユニタリ変換で誘起される $C(\mathcal{H})$ の自己同型の作る群を $A_u(\mathcal{H})$ と書き，$C(\mathcal{H})$ の自己同型で $A_u(\mathcal{H})$ の元と可換なもの全体の作る群を $A_u(\mathcal{H})'$ と書くと，$A_u(\mathcal{H})'$ は次のようにして簡単に求まる。$\tau \in A_u(\mathcal{H})'$ とする。$A_u(\mathcal{H})$ で不変な状態は §3 の (5°) で与えられ，特にそのうち端点は Fock 真空 E_1 と Anti Fock 真空 E_{-1} とのみである。ところで E_1 が τ によって E_{-1} に変ることが不可能なことは次のようにしてわかる。Fock 真空 Φ_F は任意の $x \in \mathcal{H}$ $x \neq 0$ に対し，$x\Phi_F \neq 0$, $[F_1(x) - e^{i\varphi} F_1(e^{i\varphi} x)]\Phi_F = 0$ をみたす。これは $x \to e^{i\varphi} x$ という $\mathcal{H}$ のユニタリ変換に対応する $C_0(\mathcal{H})$ の自己同型を仮りに σ_φ, $y_\varphi(x) \equiv x - e^{i\varphi}\sigma_\varphi(x)$ と書くと $E_1(x^* x) \neq 0$, $E_1(y_\varphi(x)^* y_\varphi(x)) = 0$ とかける。τ は σ_φ と可換だから $\tau(y_\varphi(x)) = y_\varphi(\tau x)$. したがって E_1 が τ^* で E_{-1} に変ったとすると，ある $x' \in C(\mathcal{H})$ に対して $E_{-1}(x'^* x') \neq 0$, $E_{-1}(y_\varphi(x')^* y_\varphi(x')) = 0$ となる筈である。ところが Anti Fock 表示でも σ_φ はユニタリ実現可能で $E_1[\sigma_\varphi(x')] = U_\varphi F_{-1}(x') U_\varphi^{-1}$, $U_\varphi = \sum^{\oplus} e^{in\varphi}$

となるから，Φ_F' で Anti Fock 真空を現すと $(1+e^{i\varphi}U_\varphi)F_{-1}(x')\Phi_F'=0$.
これは φ/π が無理数なら $F_{-1}(x')\Phi_F'=0$ のときだけ可能だが，それは $E_{-1}(x'^* x')\neq 0$ と矛盾する。よって E_1 はτで不変である。したがって E_1 は Φ_F を不変にするユニタリ作用素Uで実現できる。しかも $\Gamma(T)U\Gamma(T)^{-1}U^{-1}$ は任意の $\mathscr{H}$ 上ユニタリ作用素Tに対し $C_0(\mathscr{H})'$ に属するから常数であり，かつ Φ_F 上で1だから1でなければならない。すなわちUは $\Gamma(T)$ と可換である。$\Gamma(T)$ 全体は $\mathfrak{H}^2(\mathscr{H})=\sum^{\oplus} A_{sym}\mathscr{H}^{\otimes n}$ の各 summand で既約であるから，Uは粒子数作用素 n の関数である。したがってUで引き起こされる $C_0(\mathscr{H})$ の自己同型τで，$\mathscr{H}$ は不変である。$\tau|\mathscr{H}$ を T_0 と書くと T_0 は $\mathscr{H}$ の直交変換で，$\mathscr{H}$ 上の任意のユニタリ変換と可換である。従って $T_0=\alpha 1$。そこでτは $\mathscr{H}$ 上の定数ユニタリ変換 $\alpha\cdot 1$ であることがわかった。このようにして $A_u(\mathscr{H})'$ は one parameter group であることがわかる。

同じような議論を§3 (4°) の対称状態について適用すれば，maximal abelian group of automorphism の例も得られそうである。

Anticommutation Relation の表現 (i.e. Clifford 代数の表現) のついた範囲では，最近次のような論文がある。

[4] A. Guichardet, Produit tensoriels infinis et representaions des relations d'anticommutation (preprint).

[5] A. Cordesse and G. Rideau, On some Representations of the Anti-commutation Relations I, Nuovo Cimento 45 A (1966), 1-14.

[6] A. Cordesse, Sur des representations des relations d'anticommutations, C.R.Ac. Sc. Paris 1965, p.5203 and p. 5481.

[7] H. Araki and W. Wyss, Helv. Phys. Acta 37 (1964), 136-159

[8] A. Robin, Algebres de Clifford (lecture note)。

これらについてはまた別の機会にゆずる。 古い所では

[9] P. Jordan and E.P. Wigner, Zeits für Phys. 47 (1928), 631-

[10] L. Garding and A.S. Wightman, Proc。Natl. Acad. Sci. U. S. 40 (1954), 617-621