数理解析研究所講究録
第21巻 1967年 37-46

Combinatorial Prebundle

都立大　　加藤 十吉

1. Prebundle.

定義： Pを多面体，pをPの一点とする。(P, p)がprebundleとは，次から成るtriple $\mathcal{E} = \{E, K, \Sigma\}$のことである。

(1)　E；多面体　　（全空間）

(2)　K；複体　　（底複体）

(3)　Σ；次の4つの条件(a)〜(d)をみたす対(A, f)の集まり。（A上の自明化とよばれる）

(a)　各対(A, f)はKの単体Aと，PL embedding f；$A \times P \longrightarrow E$から成る。

(b)　各単体$A \in K$に対し，少なくとも1つの対(A, f)が存在し，$\bigcup_{(A,f) \in \Sigma} f(A \times P) = E$となる。

(c)　$(A, f), (B, g) \in \Sigma$で，$A \cap B$が空でない単体$C$なら，$f(C \times P) = g(C \times P)$かつ
$$f | C \times \{p\} = g | C \times \{p\}.$$

(d)　Σは(C)に関して最大である。

もう1つの(P, p) prebundle $\mathbb{E}' = \{E', K, \Sigma'\}$が，$\mathbb{E}$に同型とは，PL 同相写像$h$；$E \longrightarrow E'$が存在し，$\forall (A, f) \in \Sigma$，$\forall (A, g) \in \Sigma'$に対して$hf(A \times P) = g(A \times P)$かつ，$hf \mid A \times \{p\} = g \mid A \times \{p\}$となるときをいう。（詳しくは[5]参照のこと）

（例）　積 prebundle．

積多面体$|K| \times P$は，$(\forall A \in K)$ $A \times P \subset |K| \times P$なる包含写像をとれば，これをA上の自明化として，prebundleの構造をもつことになる。これを積 prebundleと呼び単に，$K \times (P, p)$と表わす。

P prebundle という概念も，(P, p) prebundleと同様に（但し，pに関する条件をとり去って）定義される。上の例からもわかるように，prebundleとは積多面体の抽象である。以前から考えられていた fibre bundle は fibre structure（即ち，projection）をも抽象しているが，prebundleではそれまで抽象しない。むしろ prebundle は常に fibre bundle となるかという点に興味がある。念のため，PL-category の fibre bundle を次に定義しておく。(P, p) bundle とは，図式ξ；$B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} B$　で，

(1)　E，B は多面体で，全空間，底空間と呼ばれ，

(2) PL-写像 j ; $E \to B$ は PL 写像 i ; $B \to E$ に関して次の局所自明条件を満たす。

B の各点 x_0 に対し，x_0 の B における近傍 U 及び PL 同相写像 f ; $U \times P \longrightarrow j^{-1}(U)$ が存在し，$jf(x, y) = x$，$f(x, p) = i(x)$ $(\forall x \in U, \forall y \in P)$

(P, p) bundle の理論では，induced bundle，covering homotopy theorem 等の general theory が成立している。とくに，B のある単体分割 K に関して，その underlying prebundle が得られる。この逆が可能か？ 即ち，いかなる (P, p) prebundle もある (P, p) bundle の underlying prebundle となるか？ という問題は後でわかるように否定される。

(P, p) bundle の主 bundle の作り方は，Milnor の micro-bundle の C.S.S. 主 bundle の作り方と全く同様にして，(isomorphism germ を isomorphism そのものにおきかえて）定義される。prebundle の主バンドルは，C.S.S. bundle ではなく，抽象複体の bundle (a.s. bundle) を考えることによって定義される。

定義 ; (P, p) prebundle の構造群 $PR(P, p)$.

$PR(P, p)$ の k simplex とは，積 prebundle $\Delta_k \times (P, p)$ の同型写像 h ; $\Delta_k \times (P, p) \to \Delta_k \times (P, p)$ であり，Δ_k の

face Δ'に対し対応するface 別$\Delta' \times (P, p)$をもつとする。但し，Δ_kは標準的な単体および，それをcoverする複体を表わすとする。この様にして，$PR(P, p)$は抽象複体の構造をもつ。しかし，degeneracy operatorは自然には決らぬ。ふつうのやり方では，standard mistakeによりPL category を出してしまうからである。幸いなことに，$PR(P, p)$の特殊性から，homotopy group $\pi_k(PR(P, p))$ が定義できる。即ち，Kanの combinatorial methodを模倣すれば良い [4]。そのとき，Kanの拡大条件が$PR(P, p)$に対し成立し，Kanがdegeneracy operator を使っているところが初等的なtrick によってPL同相写像の性質で書きかえられるのを見ればよい。

prebundleの主bundleは a.s. $PR(P, p)$ bundle として定義される。そして，prebundle をtrivialize するための障害の理論が係数群 $\pi_k(PR(P, p))$ で論じられる。

Notation ;

J^n ; n-cube （$[-1, 1] = J$ の n 重積）

$0 = (0, \cdots, 0) \in J^n$

とおき，prebundle の構造群を次の様にかく。

$$PR(J^n, 0) = PR_n$$

$$PR(\dot{J}^n, 0) = \dot{P}R_n$$

$$PR(\dot{J}^n, (0^{n-1}, 1)) = \mathring{P}R_{*n}$$

$$PR(\mathring{J}^n, 0) = \mathring{P}R_n$$

($\dot{J}^n$ はJ^nの境界 $(n-1)$ sphere, $\mathring{J}^n$ はJ^nの内部(R^nとPL同相))

これらの間に次の関係がある。

$PR_n \simeq \mathring{P}R_n$ ($\simeq$ は weak homotopy equivalence)

これは, join extension argument で示される。

$\mathring{P}R_{*n} \simeq PR_{n-1}$

これは, relative regular neighborhood の一意性により示される。

$\pi_k(\mathring{P}R_n, \mathring{P}R_{*n}) \cong 0$ $(k \leq n-2)$ がすべての n についていえる。この場合は $n \geq 4$ or $k \geq 2$ のときは, Zeeman の unknotting theorem で, $k=1$, $n=3$ のときは Gluck の結果[1] による。

かくて, 安定定理

$$\pi_k(PR_n) \cong \pi_k(PR_{k+2}) \quad (\forall n \geq k+2)$$

が得られる。

2. 法 prebundles

$(J^n, 0)$ prebundle を n prebundle と呼ぼう。PL-embedding $f: M \longrightarrow W$ (M, W; PL-manifolds) が M の単体分割 K に対して法 prebundle をもつとは, n prebundle

$\mathcal{N}$; $K \xrightarrow{f} N(\Sigma)$ （f の K 上の法 prebundle ）が，N が $f(M)$ の W における近傍となる様に存在するときをいう。このとき，N は $f(M)$ の W における regular neighborhood で，f は locally flat である。次の法 prebundle の存在定理 theorem 1 は locally flat PL manifold pair の regular neighborhood の dual cell pair decomposition に目をつけ，更に，relative regular neighborhood の理論から出る球面上の法 prebundle の一意性定理 theorem 2 を使って証明される。

Theorem 1.

PL-embedding f ; $M \to W$ （M, W ; PL-manifolds）がいかなる M の単体分割に対しても法 prebundle をもつための必要十分条件は，f が locally flat であることである。

Theorem 2.

K を PL-m sphere S^m の任意の単体分割とする。いかなる PL embedding f ; $S^m \to W$ も，次の意味で高々一意的に法 prebundle をもつ。

もし，$\mathcal{N}_i$; $K \xrightarrow{f} N_i(\Sigma_i)$，$i=1,2$ が2つの f の K 上の法 prebundle なら，PL ambient isotopy F ; $W \to W$ が存在して，F/N_1 は $\mathcal{N}_1$ から $\mathcal{N}_2$ への同型写像となる。

theorem 1 により，locally flat PL embedding に対す

る法 prebundle の存在は，係数群 $\pi_k(PR_n, \pi L_n)$ の障害の理論で論じられる。（但し，πL_n は $(J^n, 0)$ bundle の構造群を表わす。）

次の対 $(PR_n, \pi L_n)$ の homotopy exact sequence を眺めながら，theorem 2 を使うと，k+1 sphere の locally flat embedding に対する法 prebundle の存在および一意性の判定条件が準同型写像 i_k ; $\pi_k(\pi L_n) \to \pi_k(PR_n)$ により記述できる。

$$\cdots \xrightarrow{j_{k+1}} \pi_{k+1}(PR_n, \pi L_n) \xrightarrow{\partial_{k+1}} \pi_k(\pi L_n) \xrightarrow{i_k} \pi_k(PR_n) \xrightarrow{j_k} \pi_k(PR_n, \pi L_n) \to$$

Theorem 3.

k+1 sphere S^{k+1} の k+1+n sphere S^{k+1+n} への standard PL embedding は trivial な法 cell bundle しかもたない。 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(i_k) = 0$

Theorem 4.

k+1 sphere の codimension n をもついかなる locally flat PL embedding に対しても法 cell bundle が存在する。 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Coker}(i_k) = 0$.

例 1. （N.H. Kuiper and R.K. Lashof）

Kuiper-Laschof により，準同型写像 t_k^n ; $\pi_k(O_n) \to \pi_k(\pi L_n)$ は $\forall k$; $n \leq 4$ に対して monomorphism

である。[7]．一方，J. Levineにより differentiable knots x_k in $\Theta^{k+4,k}$，$k=7,8,9,11$ で $\partial_k'(x_k)\neq 0$ となるものが存在する。（但し，$\partial_k'(x_k)=x_k$ の法 vector bundle）x_k を smooth triangulate して，Zeeman の unknotting theorem，および theorem 2 を使って，$(\Delta_{k+1},\partial\Delta_{k+1})$ 上の relative $(PR_4,\Pi L_4)$ bundles σ_k，$k=7,8,9,11$ が得られる。σ_k は $\Pi_k(PR_4,\Pi L_4)$ の元とみなしたとき，$\partial_k(\sigma_k)=t_k^4\,\partial_k'(x_k)$ となっている。t_k^4 は monic だから，$\partial_k'(x_k)\neq 0$ より，$\partial_k(\sigma_k)\neq 0$，よって $\operatorname{Ker} i_{k-1}\neq 0$ for $k=7,8,9,11$ かくて，S^k $(k=7,8,9,11)$ の S^{k+4} の中への standard な PL embedding は non trivial 法 cell bundle をもつ。

例2．（M. W. Hirsch）[2]

或る種の differentiable knot x_7 in $\Theta^{11,7}$ を smooth triangulate し，relative $(PR_4,\Pi L_4)$ bundle σ over $(\Delta_8,\partial\Delta_8)$ で，$\sigma\neq 0$ in $\Pi_7(PR_4,\Pi L_4)$ だが，$\partial_7(\sigma)=0$ となるものが得られる。よって，$\operatorname{Ker}\partial_7=\operatorname{Coker} i_7\neq 0$．かくて，$S^8$ 上の 4 prebundle で，cell bundle の underlying prebundle とならぬものが存在する。（勿論この prebundle の zero-section は法 cell bundle の存在しない locally flat embedding の例でもある。）

3. $S^p \times S^q$ の pseudo-isotopy group への応用.

$PL(S^p \times S^q) = \{f : S^p \times S^q \to S^p \times S^q$, PL homeomorphism$\}$ とおく。$f, g \in PL(S^p \times S^q)$ が pseudo-isotopic とは、$\exists h \in PL(I \times S^p \times S^q)$ such that

$$h(0, x) = (0, f(x)), \quad h(1, x) = (1, g(x))$$

$(\forall x \in S^p \times S^q)$ のときをいう。pseudo-isotopy という関係は同値関係で、pseudo-isotopy 類の全体は、群 $\pi PL(S^p \times S^q)$ をなす。このとき、$p > q \geq 2$, 或いは、$p > 4$, $q = 1$ のとき、集合として $\pi PL(S^p \times S^q)$ は、$\pi_p(PR_{q+1}) \times \pi_q(PR_{p+1}) \times Z_2 \times Z_2$ と1対1に対応する。とくに、$\pi PL(S^p \times S^1) \cong Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$ $(p \geq 4)$ がいえるので、Gluck の結果 [1] を pseudo-isotopy の意味で拡大できたことになる。[6].

参考文献

[1] H. Gluck, the embedding of two sphere in the four sphere, Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962) 303 − 333

[2] M.W. Hirsch, On tubular neighborhoods of manifolds I, II, Proc. London. Math. Soc.

62 (1966) 177-181, 183-185.

[3] J. F. P. Hudson, Concordance and isotopy of PL embeddings, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 534-535

[4] D. M. Kan, A combinatorial definition of homotopy groups. Ann. of Math., 67 (1958) 282-312

[5] M. Kato, Combinatorial prebundles, Part I (to appear)

[6] M. Kato, A pseudo isotopy classification of PL automorphisms of $S^p \times S^q$, (to appear)

[7] N. H. Kuiper and R. K. Lashof, Microbundles and bundles, Part C, (mimeographed)