数理解析研究所講究録
第 22 巻 1967 年 18-26

Kowalewski 系に対する Cauchy 問題について

阪大 教養 山本 稔

1. 序 m 次元 Euclid 空間 R^m の元を $x=(x_1,\cdots,x_m)$ で、m 次元複素空間 C^m の元を $z=x+iy=(x_1+iy_1,\cdots,x_m+iy_m)$, $(i=\sqrt{-1})$ で表わす. 又正数 T, r に対し次のように定義する:

$$D(T)=\{(t,x);\ 0\leqq t\leqq T,\ \ x\in R^m\}$$

$$\mathcal{D}_r(T)=\{(t,z);\ 0\leqq t\leqq T,\ \ z=x+iy\in C^m,\ |y_j|<r,\ j=1,2,\cdots,m\}.$$

$f(t,z)\in\mathbb{C}^{k}_{(t,z)}[\mathcal{D}_r(T)]$ は関数 $f(t,z)$ が領域 $\mathcal{D}_r(T)$ で (t,z) に関して k 回連続的微分可能であることを, $f(t,z)\in A_{(z)}[\mathcal{D}_r(T)]$ は関数 $f(t,z)$ が各 $t\in[0,T]$ に対し, z の関数として複素解析的正則なることを表わす. 又上の Notation で z を x に, $\mathcal{D}_r(T)$ を $D(T)$ におきかえたものは z のところを real x とおいて, 夫々 (t,x) について k 回連続微分可能 ($D(T)$ で), x の関数として実解析的正則なることを表わすことにする.

正数 a, b に対し関数族 $\mathfrak{F}(a,b)$ を次のように定義しよう:

$$\mathfrak{F}(a,b)=\{f(t,x)\in\mathbb{C}^1_{(t,x)}[D(T)]\ \big|\ \exists M>0;\ |f(t,x)|\leqq M e^{ae^{b|x|}} \text{ on } D(T)\}.$$

小論では, 次の Kowalewski 系の偏微分方程式:

$$(1.1)\qquad \frac{\partial u_\mu}{\partial t}=\sum_{\nu=1}^{k}\Big\{\sum_{j=1}^{m}A_{\mu\nu j}(t,x)\frac{\partial u_\nu}{\partial x_j}+B_{\mu\nu}(t,x)u_\nu\Big\}+f_\mu(t,x)$$

の初期条件:

$$(1.2)\qquad u_\mu(0,x)=\varphi_\mu(x)\qquad \mu=1,2,\cdots,k.$$

をみたす，大局的解の存在を，係数に対する或る条件の下で（定理1），解の属する class を $\mathfrak{F}(a,b)$ に限ったときの一意性を，係数に対する或る条件のもとに（定理2）示すのが目的である。

解の存在については M. Nagumo [3] の方法による．尚このような大局的解の，解の growth order を制限しての一意性問題はすでに S. Mizohata [2]，I. M. Gelfand - G. E. Schilov [1] においてあつかわれたが，更に最近 T. Yamanaka [6] においても I. M. Gelfand - G. E. Schilov の方法を用いて論ぜられた。

こゝでは M. Yamamoto [4] の証明を修正した形でのべよう．

2. 仮定と定理

仮定

(I) $A_{\mu\nu j}(t,z)$, $B_{\mu\nu}(t,z)$, $f_\mu(t,z) \in \mathbb{C}_{(t,z)}[\mathcal{D}_\gamma(T)]$.

(II). $A_{\mu\nu j}(t,z)$, $B_{\mu\nu}(t,z) \in A_{(z)}[\mathcal{D}_\gamma(T)]$ 且

$\mathcal{D}_\gamma(T)$ で $|A_{\mu\nu j}(t,z)| \leqq A$, $|B_{\mu\nu}(t,z)| \leqq B$ である．

(III) $f_\mu(t,z) \in A_{(z)}[\mathcal{D}_\gamma(T)]$ かつ $\varphi_\mu(z) \in A_{(z)}[\mathcal{D}_\gamma(T)]$.

定理 1 （解の存在）

仮定 (I), (II), (III) のもとで，正数 T_1 $(0 < T_1 \leqq T)$ および正数 γ_1 $(0 < \gamma_1 < \gamma)$ が存在して，初期条件 (1.2) をみたす、方程式 (1.1) の解 $u(t,z) = (u_1(t,z), \cdots, u_k(t,z))$ が $\mathbb{C}^1_{(t,z)}[\mathcal{D}_{\gamma_1}(T_1)] \cap A_{(z)}[\mathcal{D}_{\gamma_1}(T_1)]$ の中に存在する．

定理 2.（解の一意性）

仮定(I),(II)のもとで $u_\mu(t,x)$, $v_\mu(t,x)$ $(\mu=1,2,\dots,k)$ を、同じ初期条件 (1.2) をみたす (1.1) の解とし且 $u_\mu, v_\mu \in \bigcup_b \mathcal{F}(a,b)$ ならば $D(T)$ で $u_\mu(t,x)\equiv v_\mu(t,x)$ $(\mu=1,2,\dots,k)$ である。

3. 証明の準備

補題 1 $G(\delta)=\{z=x+iy\in C^m;\ |z_j|<\delta,\ j=1,2,\dots,m\}$ とし関数 $f(z)=f(z_1,\dots,z_m)$ は $G(\delta)$ で複素解析的で、更に正数 M, α が存在して、($\rho=\delta-\max\limits_{1\le j\le m}|z_j|$ とするとき) 不等式:

$$(3.1)\qquad |f(x_1+iy_1,\dots,x_m+iy_m)|\le M\cdot\rho^{-\alpha}$$

をみたすならば、$f(z)$ は次の不等式をみたす:

$$(3.2)\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1+iy_1,\dots,x_m+iy_m)\right|\le\frac{(1+\alpha)^{1+\alpha}}{\alpha^\alpha}M\cdot\rho^{-\alpha-1}$$

証明 $G(\delta)$ の任意の点 z^0 と、j $(1\le j\le m)$ に対し、z_j-平面に円 C_j を $C_j=\{z_j;\ |z_j-z_j^0|=\frac{\rho}{1+\alpha}\}$ $(\rho=\delta-\max|z_i^0|)$ 描く。

$z_j\in C_j$ ならば $\delta-|z_j|\ge\frac{\alpha}{1+\alpha}\rho$ であるから

$$|f(z)|\le M\left(\rho-\frac{\alpha}{1+\alpha}\rho\right)^{-\alpha}=\frac{(1+\alpha)^\alpha}{\alpha^\alpha}M\cdot\rho^{-\alpha}$$

したがって Cauchy の積分表示式によって

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(z^0)\right|\le\frac{(1+\alpha)^{1+\alpha}}{\alpha^\alpha}\cdot M\cdot\rho^{-\alpha-1}$$ を得る。

定理1, 定理2 の証明で、我々は $\varphi_\mu(x)\equiv 0$ と仮定しても一般性を失なわない。従って今後 $\varphi_\mu(x)\equiv 0$ と仮定する。このとき (1.1), (1.2) は次の微分積分方程式 (3.3) と同等になる:

$$(3.3)\qquad u_\mu(t,x)=\Phi_\mu[u(t,x)]$$

こゝで $\Phi_\mu[u]$ は次の式で定義される。

$$\Phi_\mu[u] = \sum_{\nu=1}^{k}\left\{ \sum_{j=1}^{m} \int_0^t A_{\mu\nu j}(\tau, x) \frac{\partial u_\nu}{\partial x_j}(\tau, x)\, d\tau + \int_0^t B_{\mu\nu}(\tau, x) u_\nu(\tau, x)\, d\tau \right\} + \int_0^t f_\mu(\tau, x)\, d\tau .$$

このとき次の局所存在定理が成立する。（M. Nagumo [3] 参照）.

<u>補題 2</u>　仮定 (I), (II), (III) のもとに、任意の $x^0 \in R^m$ に対して $\Delta(x^0)$ の任意の閉領域で $\mathbb{C}^1_{(t,z)} \cap A_{(z)}$ に属する (3,3) の解が存在する。こゝに $\Delta(x^0) = \{ (t, z)\ ;\ 0 \leq t \leq T_1,\ |z_j - x_j^0| < R_1 - L_1 t \}$,

$$0 < R_1 < Min\left\{ 1,\ r,\ \left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^{1+\alpha}(1-\alpha)\cdot\frac{mA}{B} \right\},$$

$$L_1 = \frac{mkA}{\kappa}\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^{1+\alpha}, \qquad T_1 = Min.\{T,\ R_1/L_1\}$$ である。

ただし α, κ は $0<\alpha<1$, $0<\kappa<1$ をみたす任意に与えられた数である。

<u>証明</u>　まず $g_\mu(t, z) \in \mathbb{C}^1_{(t,z)} \cap A_{(z)}[\mathcal{D}_r(T)]$ ならば $\Phi_\mu[g(t,z)] \in \mathbb{C}^1_{(t,z)} \cap A_{(z)}[\mathcal{D}_r(T)]$ であることに注意する。

次に解の存在を逐次近似法で証明するため、関数列 $\{u_\mu^{(n)}(t, z)\}$ を次のように定義しよう：

$$(3.4)\quad \begin{cases} u_\mu^{(0)}(t, z) = 0 \\ u_\mu^{(n+1)}(t, z) = \Phi_\mu[u^{(n)}(t, z)], \quad n = 0, 1, 2, \cdots \end{cases}$$

$u_\mu^{(0)}(t, z) \in \mathbb{C}^1_{(t,z)} \cap A_{(z)}[\mathcal{D}_r(T)]$ であるから $u_\mu^{(n+1)}(t, z) \in \mathbb{C}^1_{(t,z)} \cap A_{(z)}[\mathcal{D}_r(T)]$ が $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対してなりたつ。

こゝで簡単のために $\Psi_\mu[u] = \Phi_\mu[u] - \int_0^t f_\mu(\tau, z)\, d\tau$ とおくと $u_\mu^{(\ell+1)} - u_\mu^{(\ell)} = \Psi_\mu[u^{(\ell)} - u^{(\ell-1)}]$ と表わせるから

$$u_\mu^{(n+1)}(t, z) = \sum_{\ell=1}^{n}\{ u_\mu^{(\ell+1)}(t, z) - u_\mu^{(\ell)}(t, z)\} + u_\mu^{(1)}(t, z)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \Psi_\mu [u^{(\ell)} - u^{(\ell-1)}] + u_\mu^{(1)}(t,z) .$$

一方 与えられた正数 α $(0<\alpha<1)$ に対して，正数 M が存在して

$$|u_\mu^{(1)} - u_\mu^{(0)}| \leqq \int_0^t |f_\mu(\tau, z)|\, d\tau \leqq M\cdot\rho^{-\alpha}$$ が $\varDelta(x^0)$ でなりたす。 こゝに $\rho = R_1 - L_1 t - \underset{j}{\mathrm{Max}}\{|z_j - x_j^0|\}$ である。

故に $\varDelta(x^0)$ で次式が成立する：

$$\int_0^t |u_\mu^{(1)} - u_\mu^{(0)}|\, d\tau \leqq \frac{M}{(1-\alpha)L_1}\cdot R_1^{1-\alpha}$$

従って補題1より

$$\left| \int_0^t \frac{\partial (u_\nu^{(1)} - u_\nu^{(0)})}{\partial x_j}\, d\tau \right| \leqq \left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^{1+\alpha} \frac{M}{L_1} (\rho^{-\alpha} - R_1^{-\alpha}) .$$

を得。これから次式をえる：

$$|u_\mu^{(2)} - u_\mu^{(1)}| \leqq mkA \left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^{1+\alpha} \frac{M}{L_1} (\rho^{-\alpha} - R_1^{-\alpha}) + \frac{kBM}{(1-\alpha)L_1}\cdot R_1^{1-\alpha}$$

R_1, L_1 に対する補題の仮定より，この式から $\varDelta(x^0)$ で評価：

$$|u_\mu^{(2)} - u_\mu^{(1)}| \leqq \kappa M\cdot\rho^{-\alpha}$$ がなりたつ。

この評価より帰納的に，すべての n (自然数) に対し $\varDelta(x^0)$ で

$$(3.5) \qquad |u_\mu^{(n+1)} - u_\mu^{(n)}| \leqq \kappa^n M \rho^{-\alpha}$$

がなりたち，従って $u_\mu^{(n)}(t,z)$ は或る関数 $u_\mu(t,z)$ に $\varDelta(x^0)$ の任意の閉領域で一様に収束する。 $u_\mu(t,z) (\in \mathbb{C}^1_{(t,z)} \cap A_{(z)})$ は (3.3) を満足する 求むる解である。

<u>系 1</u>　$u_\mu(t,z)$ $(\mu=1,2,\cdots,k)$ を補題2で得られた解とすると

$$(3.6) \qquad |u_\mu(t,z)| \leqq \frac{M}{1-\kappa}\rho^{-\alpha} \qquad (\text{in } \varDelta(x^0)) \quad \mu=1,\cdots,k$$

をみたす。こゝに $M = \sup_{\substack{(t,z)\in\varDelta(x^0) \\ 1\leqq\mu\leqq k}} \{\rho^\alpha T_1\cdot|f_\mu(t,z)|\}$

<u>証明</u>　補題2の証明より明らか。

補題2で得られた $\varDelta(x^0)$ での (3.3) の解を $u_\mu(t,z,x^0)$ で表わす事にする。

4. 定理の証明.

定理1の証明　補題2で局所的に得られた解を，接続することによって $\mathcal{D}_r(T)$ での解が得られることを示そう．そのためには z を $\Delta(x^0)\cap\Delta(x^1)$ $(x^0, x^1\in R^m)$ の任意の元としたとき $u_\mu(t,z,x^0)=u_\mu(t,z,x^1)$ となることを示せばよい．

$$v_\mu(t,z) = u_\mu(t,z,x^0) - u_\mu(t,z,x^1)$$ とおくと $v_\mu(0,z)=0$

且 $$v_\mu(t,z) = \Psi_\mu[v(t,z)].$$

こゝで $\tilde{R}$ として $\Delta'=\{(t,z)\ ;\ 0\leqq t\leqq T_2,\ |z_j-\frac{x_j^0+x_j^1}{2}|<\tilde{R}-L_1t\}$ としたとき $\Delta'\subset\Delta(x^0)\cap\Delta(x^1)$ となるようにとり，

$$\tilde{\rho} = (\tilde{R}-L_1t-\max_j|z_j-\frac{x_j^0+x_j^1}{2}|),\quad \tilde{M}=\sup_{\substack{\Delta'\\ \mu=1,\cdots,k}}\{\tilde{\rho}^{\alpha}|v_\mu(t,z)|\}$$

とおくと，補題2の証明と同様にして

$$|v_\mu(t,z)| = |\Psi_\mu[v(t,z)]|\leqq \kappa\tilde{M}\tilde{\rho}^{-\alpha}\qquad (\Delta'\text{で})$$

を得，これから $\tilde{M}\tilde{\rho}^{-\alpha}\leqq\kappa\tilde{M}\tilde{\rho}^{-\alpha}$ $(0<\kappa<1)$ が従がい，

結局 $v_\mu(t,z)\equiv 0$ $(\Delta'$で$)$ $(\mu=1,\cdots,k)$ を得る。

注意　系1と定理1より $\mathcal{D}_r(T)$ で，正数 M, a, b に対して

$$|f_\mu(t,z)|\leqq M\exp(-ae^{b|x|})\qquad \mu=1,2,\cdots,k$$

ならば，任意の a' $(<a)$ に対し正数 M', T_1 が存在して (3.3) の解 $u_\mu(t,x)$ は $D(T)$ で

$$|u_\mu(t,x)|\leqq M'\exp(-a'e^{b|x|})$$ をみたすことがわかる．

補題3　任意に与えられた正数 ε と，定められた正数 a, b に対し，正数 a', b' と r (>0) が存在して $\mathcal{D}_r(T)$ で

$$\exp(-(a+\varepsilon)e^{b|x|})\geqq\exp(-a'\sum_{\nu=1}^{k}\cosh(b'z_\nu))$$ がなりたつ．

証明 $|\exp(-a'\cosh(b'z_\nu))| = \exp\{-a' \mathrm{Re}\cosh(b'z_\nu)\}$

$$\leqq \exp\left(-\frac{a'\cos(b'y_\nu)}{2} e^{b'|x_\nu|}\right)$$

ここで $|y_\nu| \leqq \dfrac{\theta}{b'}$ （θ は $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ で fixed）なら $\cos(b'y_\nu) \geqq \cos\theta$.

したがって

$$|\exp(-a'\sum_{\nu=1}^{k}\cosh(b'z_\nu))| \leqq \exp\left\{-\frac{a'\cos\theta}{2}\sum_{\nu=1}^{k} e^{b'|x_\nu|}\right\}$$

$$\leqq \exp\left\{-\frac{a'\cos\theta}{2} e^{\frac{b'}{\sqrt{k}}|x|}\right\}.$$

よって $b'=\sqrt{k}\,b$, $a'=\dfrac{2(a+\varepsilon)}{\cos\theta}$ とおき $|y_\nu| \leqq \dfrac{\theta}{\sqrt{k}\,b} = \gamma$ $(\nu=1,2,\cdots,k)$

とすれば $\exp\{-(a+\varepsilon)e^{b|x|}\} \geqq \exp\{-a'\sum_{\nu=1}^{k}\cosh(b'z_\nu)\}$ を得る.

<u>定理２の証明</u>

$$L_\mu[u] = \frac{\partial u_\mu}{\partial t} - \sum_{\nu=1}^{k}\left\{\sum_{j=1}^{m} A_{\mu\nu j}(t,x)\frac{\partial u_\nu}{\partial x_j} + B_{\mu\nu}(t,x)u_\nu\right\}$$

とおき，任意の σ $(\sigma=1,2,\cdots,k)$ に対して

$$\tilde{L}_\mu^\sigma[u] = -\frac{\partial u_\mu}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{k}\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}[A_{\nu\mu j}(t,x)u_\nu] - B_{\nu\mu}(t,x)u_\nu\right\}$$
$$- e^{-ix\cdot\xi}\exp\{-a'\sum_{\nu=1}^{k}\cosh(b'z_\nu)\}\cdot\delta_{\mu\sigma}$$

とおく．こゝに a', b', γ は 任意に与えられた $\varepsilon\,(>0)$ に対して補題３で定まった正数であり，したがって $\mathcal{D}_\gamma(T)$ で

$$\exp\{-(a+\varepsilon)e^{b|x|}\} \geqq \exp\{-a'\sum_{\nu=1}^{k}\cosh(b'z_\nu)\}$$

をみたすものとし，$\delta_{\mu\sigma}$ は Kronecker の delta とする.

$\tilde{L}_\mu^\sigma[u]=0$ は定理１で考察された方程式と同じ形で，同じ条件をみたす方程式であるから，t を逆向きに考えることによって，定理１より正数 T_0 $(\leqq T_1)$ が存在して，任意の $T\in[0,T_0]$ に対し $\tilde{L}_\mu^\sigma[w]=0$ の，初期条件：$w(T,x)=0$ をみたす解が $D(T)$ において存在する。系１より この解 $w(t,x)$ は，適当な定数 M' が存在して不等式：

(4.1) $\quad |w_\mu(t,x)| \leqq M' \exp\{-(a+\frac{\varepsilon}{2})\, e^{b|x|}\}$

を $D(T)$ においてみたす。

さて，$u(t,x)$，$v(t,x)$ を (1.2) をみたす (1.1) の解で $u, v \in \mathfrak{F}(a,b)$ をみたすものとすると，$L_\mu[u-v]=0$，$[u_\mu - v_\mu](0,x)=0$

(4.2) $\quad |u_\mu(t,x) - v_\mu(t,x)| \leqq K \exp(a e^{b|x|}) \qquad \mu=1,2,\cdots,k$

を $D(T)$ でみたす。ここに T は $[0,T_0]$ の任意の数，K は定数。

$$\sum_{\mu=1}^{k} \int_{D(T)}\int \{w_\mu L_\mu[u-v] - (u_\mu - v_\mu)\tilde{L}_\mu^\sigma[w]\}\, dx\, dt = 0$$

であるから，任意の $\xi \in R^m$ に対して

$$\int_0^t dt \int_{R^m} e^{-ix\cdot\xi}[(u_\sigma - v_\sigma)\exp\{-a'\sum_{\nu=1}^{k}\cosh(b'|x_\nu|)\}]\,dx = 0 .$$

したがって，任意の $\xi \in R^m$ と任意の $t \in [0,T_0]$ に対し

(4.3) $\quad \int_{R^m} e^{-ix\cdot\xi}[(u_\sigma - v_\sigma)\exp\{-a'\sum_{\nu=1}^{k}\cosh(b'|x_\nu|)\}]\,dx = 0 .$

一方 $|(u_\sigma - v_\sigma)\exp\{-a'\sum_{\nu=1}^{k}\cosh(b'|x_\nu|)\}| \leqq \exp\{-\frac{\varepsilon}{2} e^{b|x|}\}$

であるから，(4.3) は可積分関数 $(u_\sigma - v_\sigma)\exp\{-a'\sum_{\nu=1}^{k}\cosh(b'|x_\nu|)\}$ の Fourier 変換が任意の $t \in [0,T_0]$ に対し R^m で恒等的に零になることを意味する。 $\exp\{-a'\sum_{\nu=1}^{k}\cosh(b'|x_\nu|)\} \neq 0$ in R^m である故

$$u_\sigma(t,x) - v_\sigma(t,x) \equiv 0 \quad \text{が } D(T_0) \text{ でなりたつ。}$$

σ は何でもよかったから $\quad u_\sigma(t,x) \equiv v_\sigma(t,x) \quad (D(T_0)$ で$) \quad \sigma=1,\cdots,k$

がなりたつ。

今，もし $T' \in [0,T]$ が存在して，或る μ に対して $u_\mu(T',x) \neq v_\mu(T',x)$ がなりたったとする。そのような T' の下限を T_2 とすると $u_\mu(t,x) \equiv v_\mu(t,x)$ が $D(T_2)$ でみたされる。このとき T_2'，T_3 を $T_3 - T_2' \leqq T_0$，$T_2' < T_2 < T_3$ となるようにとり，上での

べたと同じ議論を，区間 $[T_2', T_3]$ に関して繰り返せば，任意の $(t, x) \in \{(t, x);\ T_2' < t \leqq T_3,\ x \in R^m\}$ に対し $u_\mu(t, x) = v_\mu(t, x)$.
これは仮定：T'の存在 に矛盾する．したがって結論：

$$u_\mu(t, x) = v_\mu(t, x) \quad \text{on } D(T'), \quad \mu = 1, 2, \cdots, k$$

を得る。

参考文献

[1] I.M. Gelfand - G.E. Schilov: "Vergllgemeinerte Funktionen" III. (1964) pp. 89 − 94.

[2] S. Mizohata, "Systèmes Kowalewskiens" Annales de L'institute Fourier. Tome VII (1957) pp. 283 − 292.

[3] M. Nagumo, "Über das Anfangswertproblem Partieller Differentialgleichungen" Japanes Journal of Math. vol. 18. (1942) pp. 41 − 47.

[4] M. Yamamoto, "On Cauchy's Problem for a Linear System of Partial Differential Equations of First Order". Proc. of the Japan Acad. Vol. 42. (1966) pp 555 − 559.

[5] M. Yamamoto, "On Cauchy Problem for Kowalewski Systems." to appear.

[6] T. Yamanaka, "On the Cauchy Problem for Kowalevskaja Systems of Partial Differential Equations."