数理解析研究所講究録
第 22 巻 1967 年 27-33

Dissipative wave equation に関する極限振幅の原理について

望月 清 (京大教養)

3 次元 Euclid 空間 E_3 で次の Cauchy 問題を考えよう。

(1) $$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + b(x)\frac{\partial}{\partial t} - \Delta + c(x) \right\} u(x,t) = f(x)e^{i\omega t}$$

(2) $$u(x,0) = u_t(x,0) = 0$$

ここに ω は実数である。$b(x)$, $c(x)$, $f(x)$ に適当な条件を課せば、この Cauchy 問題が $L^2(E_3)$-valued の t の函数として、一意的に解け、次のように Laplace inversion formula によって表示されることはよく知られている。

(3) $$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau\to\infty} \int_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau} \frac{v(x,\lambda)}{\lambda - i\omega} e^{\lambda t}\, d\lambda$$

ここに $\sigma > 0$ で $v(x,\lambda)$ は $L^2(E_3)$ に属する

(4) $$\{ \lambda^2 + \lambda b(x) - \Delta + c(x) \} v(x,\lambda) = f(x)$$

なる楕円型方程式の解である。

我々の目的は $t\to\infty$ と共に解 $u(x,t)$ がどのような振舞いをするかを調べることである。そのために $b(x)$, $c(x)$, $f(x)$ に次の条件を課すことにする。

仮定 $b(x) \geq 0$, $b(x)$ は Hölder 連続で $|x|\to\infty$ と共に $O(|x|^{-3-\varepsilon})$。
$c(x)$ は real valued で $\in L^2(E_3)$, さらに有限個の singular points を除いて Hölder 連続で $|x|\to\infty$ と共に $O(|x|^{-2-\varepsilon})$。
$f(x) \in C^2(E_3)$ で、$|f(x)| + \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| + |\Delta f(x)| = O(|x|^{-3-\varepsilon})$。

仮定 $-\Delta + c(x)$ が固有値を持たないための1つの十分条件として、$c(x)$ に次の条件を課す。

(5) $$\sup_{x\in E_3}\int_{E_3}\frac{|c(y)|}{|x-y|}\,dy < 4\pi$$

注意　最後の条件は単に計算をやさしくするためのものでもちろん他の条件　例えば $c(x)\geq 0$ を仮定してもよい。

まず $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ なる λ に対して，方程式(4) が $L^2(E_3)$ で，一意的な解を持つことを示そう。次のように作用素 $L(\lambda)$ を定義する。

(6) $$L(\lambda)=L_0+\lambda B+\lambda^2 I,$$

ここに L_0 は $-\Delta+c(x)$ の自己共役拡張，B は $b(x)$ を乗ずる作用素，I は identity である。$L(\lambda)$ は閉作用素で定義域は L_0 のそれと一致して $\mathcal{D}^2_{L^2}(E_3)$ である。

補題1　$\mathrm{Re}\,\lambda>0$ なる任意の λ に対して，$L(\lambda)$ は有界な逆を持つ。

（証明）　$c(x)$ に対する条件(5)より $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ なるすべての λ に対し $-\lambda^2$ は L_0 の resolvent set に属している。一方 $b(x)$ に対する仮定から　$B(L_0+\lambda^2 I)^{-1}$ は $L^2(E_3)$ で完全連続である。よって index theory を用いて，ただちに $L(\lambda)$ が有界な逆をもたないような λ ($\mathrm{Re}\,\lambda>0$) は discrete で $L(\lambda)\psi=0$ ($\psi\in\mathcal{D}^2_{L^2}$) が 0 以外の解をもつような λ の全体から成ることがわかる。今 $\lambda=\sigma+i\tau$ ($\sigma>0$) とおけば $L(\lambda)\psi=0$ から，

$$\begin{aligned}0=\langle L(\lambda)\psi,\psi\rangle &= \langle L_0\psi,\psi\rangle+\sigma\langle B\psi,\psi\rangle+(\sigma^2-\tau^2)\|\psi\|^2\\ &\quad + i\tau\{\langle B\psi,\psi\rangle+2\sigma\|\psi\|^2\}\end{aligned}$$

を得る。ここで $\langle L_0\psi,\psi\rangle\geq 0$，$\langle B\psi,\psi\rangle\geq 0$ に注意すれば，$\|\psi\|^2=0$ つまり，$\psi(x,\lambda)\equiv 0$ が導びかれる。　以上

極限振幅の原理は次の定理の如く述べることが出来る。

定理　$\mathrm{Re}\lambda=0$ なる任意の λ に対し、方程式(4)は Sommerfeld の放射条件

(7)　$v(x,\lambda)=O(|x|^{-1})\ (|x|\to\infty),\ \lim_{\rho\to\infty}\int_{|x|=\rho}\left|\frac{\partial v}{\partial|x|}+\lambda v\right|^2 dS=0$

を満す函数族の中で一意的な解 $v(x,\lambda)$ を持つ。そして Cauchy問題 (1)(2) の解 $u(x,t)$ は $t\to\infty$ と共に x の有界集合の上で一様に $v(x,i\omega)e^{i\omega t}$ に近づく。ここに $v(x,i\omega)$ は $\lambda=i\omega$ に対する (7) を満す (4) の解である。

はじめに定理の前半を証明するが、放射条件 (7) を充す解の一意性は Green の公式からただちに導びかれる。そこで解の存在を示し、それが $\mathrm{Re}\lambda>0$ に対して、補題1によって保証された $\mathcal{D}^2_{L^2}$ に属す解と、どのように関係しているかを見ることにする。

作用素 L_0 の resolvent に対する研究は Повзнер 及び池部氏の論文にあるが、ここに使う部分だけを次の補題で与えておこう（[1]; Theorem 2.1 を参照）。

補題2　L_0 の resolvent $(L_0+\lambda^2 I)^{-1}$ $(\mathrm{Re}\lambda>0)$ は Carleman 型の kernel $H(x,y;\lambda)$ を持つ積分作用素で

$$H(x,y;\lambda)=\frac{e^{-\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|}+h(x,y;\lambda)$$

なる型に書ける。ここに、$h(x,y;\lambda)$ は x,y,λ に関して有界である。さらに $h(x,y,\lambda)$ つまり $H(x,y;\lambda)$ は $\mathrm{Re}\lambda=0$ まで拡張出来、次の性質を持つ。

1° $f(x)\in L^2(E_3)$ が $|x|\to\infty$ と共に $O(|x|^{-3-\varepsilon})$ なら、函数

$F(x,\lambda)=\int_{E_3} H(x,y;\lambda)f(y)dy$ は放射条件 (7) を充し,

$$\sup_{x\in E_3}|F(x,\lambda)-F(x,\mu)|\leqslant C|\lambda-\mu|,\quad |\lambda-\mu|\leqslant 1$$

2° $f(x)$ がはじめに与えた条件を充すとすれば，さらに

$$\sup_{x\in E_3}|F(x,\lambda)|\leqslant C(1+|\lambda|)^{-2}$$

ここに $C>0$ は λ,μ に無関係な定数である。

$Re\lambda=0$ なる λ に対しても $H(x,y,\lambda)$ を kernel に持つ積分作用素を $(L_0+\lambda^2)^{-1}$ であらわすことにする。

さて $b(x)\geqslant 0$ を仮定したので，$b(x)\equiv a(x)^2$ とおけば $a(x)\geqslant 0$ は Hölder 連続で $|x|\to\infty$ と共に $O(|x|^{-\frac{1}{2}(3+\varepsilon)})$ となる。$Re\lambda\geqslant 0$ に対して kernel $a(x)H(x,y;\lambda)a(y)$ を持つ積分作用素を簡単のために $A(L_0+\lambda^2)^{-1}A$ と書くことにすれば，明らかに，これは $L^2(E_3)$ で完全連続になる。次の方程式を考える。

(8) $$w+\lambda A(L_0+\lambda^2)^{-1}Aw=g\quad(g\in L^2(E_3),\ Re\lambda\geqslant 0)$$

次の補題が成り立つ（[1]; Lemma 3.4 を参照）。

<u>補題3</u> $Re\lambda\geqslant 0$ なる任意の λ に対して (8) は一意的な解を持ち，次の評価が成り立つ。

(9) $$\|w(\cdot,\lambda)\|\leqslant\|g\|\quad(L^2\text{-norm})$$

証明は $\forall h\in L^2(E_3)$ に対して不等式

$$Re[\lambda\langle A(L_0+\lambda^2)^{-1}Ah,h\rangle]\geqslant 0\quad(Re\lambda\geqslant 0)$$

が成り立つことに注意すれば，ほとんど自明である。

さて $g=A(L_0+\lambda^2)^{-1}f$ とおこう。$f(x)$ がはじめに与えた条件を充しているとすれば 補題2の 2° により，

$$|g(x,\lambda)|\leqslant a(x)|F(x,\lambda)|\leqslant C(1+|\lambda|)^{-2}a(x)$$

を得，(9) よりこの g に対する解 w は

(10) $\qquad \|w(\cdot,\lambda)\| \leqslant C(1+|\lambda|)^{-2}\|a\|$

なる評価を持つことがわかる。次に不等式

(11) $$\sup_{x\in E_3}\left|\int_{E_3} H(x,y;\lambda)\,a(y)\,w(y,\lambda)\,dy\right| \leqslant C\,\|w(\cdot,\lambda)\| \sup_{x\in E_3}\left(\int_{E_3}\left(1+\frac{1}{|x-y|^2}\right)a(y)^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

より,

(12) $\qquad |\lambda[A(L_0+\lambda^2)^{-1}Aw](x,\lambda)| \leqslant C\,|\lambda|\cdot\|w(\cdot,\lambda)\|\,a(x)$

が導びかれる。これから $Aw = a(x)\,w(x,\lambda)$ が $|x|\to\infty$ と共に $O(|x|^{-3-\varepsilon})$ であることがわかり，補題2の1°から $(L_0+\lambda^2)^{-1}Aw$ が $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$ なる任意の λ に対して放射条件を充し，さらに，

(13) $\qquad \|w(\cdot,\lambda)-w(\cdot,\mu)\| \leqslant C(\lambda)\,|\lambda-\mu|, \quad |\lambda-\mu|\leqslant 1$

が導びかれる。ここに $C(\lambda)>0$ は λ に依る定数である。

ここで次の函数を定義しよう。

(14) $\qquad v(x,\lambda) = -\lambda[(L_0+\lambda^2)^{-1}Aw](x,\lambda) + [(L_0+\lambda^2)^{-1}f](x,\lambda)$

右辺から，この函数は $\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant 0$ で放射条件を充し，$\mathrm{Re}\,\lambda>0$ に対しては $\mathcal{D}^2_{L^2}(E_3)$ に属すことがわかる。所が $Av = w$ であるから，この函数は明らかに (4) を充す解である。

よって定理の前半が証明出来，さらに次の補題が (11) を用いて (10) 及び (13) から導びかれる。

<u>補題4</u>　$v(x,\lambda)$ は各 x に対し，λ の函数として $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ で解析函数で，$\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant 0$，$\mathrm{Re}\,\mu\geqslant 0$ $|\lambda-\mu|\leqslant 1$ なるすべての λ, μ に対して，次の評価を持つ。

(15) $\qquad \sup_{x\in E_3}|v(x,\lambda)| \leqslant C(1+|\lambda|)^{-1},$

(16) $\qquad \sup_{x\in E_3}|v(x,\lambda)-v(x,\mu)| \leqslant C(\lambda)\,|\lambda-\mu|.$

この補題のはじめの部分は証明してないが明らかであろう。

最後に定理の後半の証明であるが、まずはじめの仮定のもとで Cauchy 問題 (1)(2) の解 $u(x,t)$ が (3) なる表示によって一意的にあらわせることに注意する。そうすれば、上の補題によって、後半の証明はほとんど明らかになる。何故なら、Cauchy integral formula より、

$$\int_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau} \frac{v(x,\lambda)}{\lambda-i\omega} e^{\lambda t} d\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\tau}^{\tau} \frac{v(x,\varepsilon+i\mu)}{\mu-(\omega+i\varepsilon)} e^{(\varepsilon+i\mu)t} d\mu$$

$$+\int_0^{\sigma} \left\{ \frac{v(x,\sigma+i\tau)}{\sigma-i(\omega-\tau)} e^{(\sigma+i\tau)t} - \frac{v(x,\sigma-i\tau)}{\sigma-i(\omega+\tau)} e^{(\sigma-i\tau)t} \right\} d\sigma$$

を得るが、右辺の才2項は評価 (15) により $Ce^{\sigma t}\cdot\tau^{-1}$ (C は x に関して一様に取れる) でその絶対値がおさえられる。よって

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau\to\infty} \left\{ \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{v(x,\varepsilon+i\mu)}{\mu-(\omega+i\varepsilon)} e^{(\varepsilon+i\mu)t} d\mu \right\}$$

を得るが、さらに Cauchy 積分の limiting value の公式により

$$u(x,t) - v(x,i\omega)e^{i\omega t} = d(x,t)$$

と置けば、

$$d(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1+\omega}^{1+\omega} \frac{\{v(x,i\mu)-v(x,i\omega)\}}{\mu-\omega} e^{i\mu t} d\mu$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{1+\omega}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-1+\omega}\right) \frac{v(x,i\mu)}{\mu-\omega} e^{i\mu t} d\mu$$

$$+\frac{1}{2\pi i} v(x,i\omega) \left\{ \int_{-1+\omega}^{1+\omega} \frac{e^{i\mu t}}{\mu-\omega} d\mu - \pi i \right\} e^{i\omega t}$$

となる。右辺才3項は x に一様に $t\to\infty$ と共に 0 に近づく。才1項、才2項に対しては それぞれ (16), (15) を用いて、

それぞれ，Riemann-Lebesgue の定理が使えることがわかる。故に $d(x,t)$ は x の有界集合の上で一様に $t\to\infty$ と共に 0 に近づくことがわかり、定理の証明は完了する。　以上

あちこちで証明を省略して来たが

[1] S. Mizohata and K. Mochizuki : On the principle of limiting amplitude for dissipative wave equations, Jour Math. Kyoto Univ, Vol. 6, No. 1, 1967

に同じ内容のことをくわしく証明してあるので，くわしくはこれを読んで下さい。なを参考文けんについても [1] を見て下さい。