数理解析研究所講究録
第 23 巻 1967 年 69-77

一次元プラズマの乱流

お茶の水女子大学 理学部　岩 田 義 一

要 旨

一次元プラズマにおいて密度，速度，電場の強さなどの変動の大きさを見るため，流体力学の方程式，ポアッソンの方程式を変分形式に書きかえ，さらにそれをハミルトン形式に書く。そして変動量の確率分布にかんする方程式をたて，定常な確率分布がハミルトニアンの指数函数である一つの場合について期待値を計算し，運動エネルギーおよび電場のエネルギーの期待値は互いにひとしいことがえられた。

1. ハミルトン形式への変換

一次元プラズマの運動方程式，連続の方程式，ポアッソンの方程式をそれぞれ

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{e}{m}E=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial(n+n_0)}{\partial t}+\frac{\partial(n_0+n)v}{\partial x}=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x}=-4\pi en \tag{3}$$

とかく。n_0 はイオンの密度，n_0+nは電子の密度である。Wは流体の内部エネルギーに関係した量であり

$$W=\int\frac{dp}{\rho}$$

で定義される。ただしp：圧力，ρ：密度，この場合$\rho=n_0+n$ そして温度Tにおけるプラズマの圧力として

$$p=\frac{kT}{m}(n_0+n)=\frac{kT}{m}\rho$$

を仮定する。したがって

$$W = \frac{kT}{m} \log (n_0 + n) \tag{4}$$

(2)から

$$n_0 + n = \frac{\partial \phi}{\partial x} \equiv \phi_x, \quad (n_0 + n) v = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \equiv -\phi_t \tag{5}$$

とおくことができる。この $n = \phi_x - n_0$ を(3)にいれれば

$$\frac{\partial}{\partial x} \{ E + 4\pi e (\phi - n_0 x) \} = 0$$

これから

$$E + 4\pi e (\phi - n_0 x) = c(t) \tag{6}$$

(5), (6)を用いて(1)を変形する。$v = -\phi_t / \phi_x$ をつかえば

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\phi_t}{\phi_x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\phi_t}{\phi_x}\right)^2 + W\right\} - \frac{4\pi e^2}{m}(\phi - n_0 x) + \frac{e}{m} c(t) = 0$$

さてラグランジュ函数 $L(\phi, \phi_x, \phi_t)$ を用いるとき変分原理

$$\delta \int L(\phi, \phi_x, \phi_t) dx\, dt = 0$$

からえられる方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \phi_t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \phi_x} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

である。これに上式を照し合わせれば

$$L = \frac{1}{2} \frac{\phi_t^2}{\phi_x} - \int W\, d\phi_x - \frac{2\pi e^2}{m}(\phi - n_0 x)^2 + \frac{e}{m} c(t) \phi$$

ととればよい。Wは密度 $n_0 + n = \phi_x$ だけの函数であるから

$$\int W\, d\phi_x = \frac{kT}{m} \int \log \phi_x \cdot d\phi_x = \frac{kT}{m}(\phi_x \log \phi_x - \phi_x)$$

ただし括弧の中の $-\phi_x$ は $\partial L / \partial \phi_x$ に定数項をつけ加えるだけであり，xによる微分によつて消えるから不必要である。

したがつて

$$L = \frac{1}{2} \frac{\phi_t^2}{\phi_x} - \frac{kT}{m} \phi_x \log \phi_x - \frac{2\pi e^2}{m}(\phi - n_0 x)^2 + \frac{e}{m} c(t) \phi$$

これからハミルトニアン密度Hは

$$H=\phi_t\frac{\partial L}{\partial\phi_t}-L=\frac{\phi_t^2}{2\phi_x}+\frac{kT}{m}\phi_x\log\phi_x+\frac{2\pi e^2}{m}(\phi-n_0x)^2-\frac{e}{m}c(t)\phi$$

となる。第1項 $\phi_t^2/2\phi_x=\frac{1}{2}(n_0+n)v^2$ は単位体積についての運動エネルギーをmでわつたもの，$kT\phi_x\log\phi_x=kT(n_0+n)\log(n_0+n)$は内部エネルギーに関係した量，

$2\pi e^2(\phi-n_0x)^2=\dfrac{(E-c(t))^2}{8\pi}$ は電場のエネルギー．

ϕに対する正準共役$\psi\equiv\partial L/\partial\phi_t$は

$$\psi=\phi_t/\phi_x\ (=-v)$$

で与えられる。もう一度かきかえれば

$$H=\frac{1}{2}\phi_x\psi^2+\frac{kT}{m}\phi_x\log\phi_x+\frac{2\pi e^2}{m}(\phi-n_0x)^2-\frac{e}{m}c(t)\phi$$

このHをxについて積分したものを

$$K\equiv\int H\,dx$$

とかけば，ϕ，ψにたいする運動方程式は

$$\frac{\partial\phi(x)}{\partial t}=\frac{\delta K}{\delta\psi(x)}$$

$$\frac{\partial\psi(x)}{\partial t}=-\frac{\delta K}{\delta\phi(x)}$$

という正準形式にかくことができる。δ記号は汎函数微分を意味する。

2. 確率分布

時刻tにおいて$\phi(x)$，$\psi(x)$がそれぞれ$\phi(x)$，$\psi(x)$という値をとる確率をPとすればPは

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\int\left(\frac{\delta P}{\delta\phi(x)}\frac{\delta K}{\delta\psi(x)}-\frac{\delta P}{\delta\psi(x)}\frac{\delta K}{\delta\phi(x)}\right)dx=0$$

にしたがつて変化する。左辺第2項はポアッソン括弧であり，したがつてこの式はまた

$$\frac{\partial P}{\partial t}+[P,K]=0$$

とかくこともできる。

$\phi(x)$，$\psi(x)$のとりうる値については始めから$-\infty$から∞までと仮定するわけにゆかない。*)

確率分布Ｐが定常である場合，Ｐの一つの解はＫの任意函数である。あるいはラプラス積分で表わして

$$P=\int_0^{\infty} e^{-\lambda K}\, g(\lambda)\, d\lambda$$

とかくこともできる。

3. 汎函数積分の実行

区間Ｌを N 等分し，分点 j におけるϕ，ϕ_x，ψの値をϕ_j，η_j，ψ_jとおく。

またL／N＝ εとかく。そうすると

$$\phi_0=\phi_0$$

$$\phi_1=\phi_0+\varepsilon\eta_1$$

$$\phi_2=\phi_0+\varepsilon(\eta_1+\eta_2)$$

$$\phi_{N-1}=\phi_0+\varepsilon(\eta_1+\cdots+\eta_{N-1})$$

$$\phi_N=\phi_0+\varepsilon(\eta_1+\cdots+\eta_N)$$

$\phi_N-\phi_0=n_0L$という条件，すなわち$n_0L=\varepsilon(\eta_1+\cdots+\eta_N)$によつて$\eta_N$は他の$\eta_j$によつて表わされる。

積分変数として，$\phi_0, \eta_1, \ldots, \eta_{N-1}$をとり $-\infty<\phi_0<\infty$，$0\leqq\eta_j<\infty$，$\eta_1+\cdots+\eta_{N-1}\leqq n_0L/\varepsilon$とおけば$\eta_N\geqq 0$が保証される。

ψ_jについては $-\infty<\psi_j<\infty$でよい。

---

*) $\psi=-v$については $-\infty<\psi<\infty$ でよいと思うが，ϕについては密度 $n_0+n=\phi_x$ が正であることを考えなければならない。つまり

$$\phi_x\geqq 0$$

さらにまたＥについてxにかんし周期Lの周期性を仮定すれば

$$E(L)=E(0)$$

$$\phi(L)-n_0L=\phi(0)$$

が必要である。

さて積分を和でおきかえて

$$K=\left[\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^{N-1}\eta_j\psi_j^2+\frac{\varepsilon kT}{m}\sum_{j=1}^{N-1}\eta_j\log\eta_j+\frac{2\pi e^2\varepsilon}{m}\sum_{j=1}^{N-1}(\phi_j-n_0\varepsilon j)^2\right]$$

$\eta_j\psi_j^2$, $\eta_j\log\eta_j$ については $j=N$ の項をのぞく。これを除けば計算が少し簡単になり，$N\to\infty$ のときの極限値には影響がないから，次の確率分布

$$P=e^{-\lambda K}$$

にたいし

$$J=\int e^{-\lambda K}d\Omega=\int e^{-\lambda K}\prod_1^{N-1}d\psi_j\ d\phi_0\prod_1^{N-1}d\eta_j$$

を計算する。

ψ_j にかんする積分はすぐ実行できる。

$$\int\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda\frac{\varepsilon}{2}\Sigma\eta_j\psi_j^2}\ \Pi d\psi_j=\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\varepsilon}}\right)^{N-1}\Pi\frac{1}{\sqrt{\eta_j}}$$

つぎに η にかんする積分を行うため $\Sigma(\phi_j-n_0\varepsilon j)^2$ に関係した項を変形する。

$$\exp\left[-\frac{\lambda 2\pi e^2\varepsilon}{m}\sum_{j=1}^{N-1}(\phi_j-n_0\varepsilon j)^2\right]$$

$$=\prod_j\sqrt{\frac{m}{8e^2\varepsilon\lambda\pi^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\ \frac{m}{4\pi e^2\varepsilon\lambda}u_j^2-iu_j(\phi_j-n_0\varepsilon j)\right]du_j$$

$$=\left(\frac{m}{8e^2\varepsilon\lambda\pi^2}\right)^{\frac{N-1}{2}}\int\int\exp\left[-\frac{1}{2}\ \frac{m}{4\pi e^2\varepsilon\lambda}\Sigma u_j^2-i\Sigma u_j(\phi_j-n_0\varepsilon j)\right]\cdot\Pi du_j$$

$\Sigma u_j(\phi_j-n_0\varepsilon j)$ を変形する。

$$\sum_{j=1}^{N-1}u_j(\phi_j-n_0\varepsilon j)$$

$$=\sum_{j=1}^{N-1}u_j\{\phi_0+\varepsilon(\eta_1+\cdots+\eta_j)-n_0\varepsilon j\}$$

$$=\phi_0\sum_{j=1}^{N-1}u_j+\varepsilon\eta_1(u_1+\cdots+u_{N-1})+\varepsilon\eta_2(u_2+\cdots+u_{N-1})+\cdots\cdots$$

$$+\varepsilon\eta_{N-1}u_{N-1}-n_0\varepsilon\Sigma j u_j$$

よつてJをもう一度かき直すと

$$J=\left(\frac{2\pi}{\lambda\varepsilon}\right)^{\frac{N-1}{2}}\left(\frac{m}{8e^2\varepsilon\lambda\pi^2}\right)^{\frac{N-1}{2}}\int\cdot\int\ \exp\Big[-\frac{1}{2}\ \frac{m}{4\pi e^2\varepsilon\lambda}\sum_{j=1}^{N-1}u_j^2$$

$$-\frac{\lambda\varepsilon kT}{m}\sum_{j=1}^{N-1}\eta_j\log\eta_j-i\phi_0\sum_j u_j-i\varepsilon\eta_1(u_1+\cdots+u_{N-1})$$

$$-i\varepsilon\eta_2(u_2+\quad+u_{N-1})-\cdots-i\varepsilon\eta_{N-1}u_{N-1}+in_0\varepsilon\Sigma j u_j\Big]\cdot\Pi\frac{1}{\sqrt{\eta_j}}du_j\,d\eta_j\,d\phi_0$$

この積分においてϕ_0は一ケ所にしか現れていない。ϕ_0について積分すれば$\delta(\sum_j u_j)$という因子が表われる。この積分はのこしておいて，さきにη_jについて行う。

$$S=\int\exp\Big[-\frac{\lambda\varepsilon kT}{m}\sum_j\eta_j\log\eta_j-i\varepsilon\Sigma\eta_j\sum_{K=j}^{N-1}u_K\Big]\Pi\frac{1}{\sqrt{\eta_j}}d\eta_j$$

積分範囲は$\eta_j>0$，$\sum_1^{N-1}\eta_j<Nn_0$であるが$\Sigma\eta_j<Nn_0$という制限をのぞくため，切断因子

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty,\ \sigma>0}^{\sigma+i\infty}e^{z(Nn_0-\eta_1-\cdots-\eta_{N-1})}\ \frac{dz}{z}=\begin{cases}1, & Nn_0-\Sigma\eta_j>0\\ 0, & Nn_0-\Sigma\eta_i<0\end{cases}$$

をかけて，

$$S=\frac{1}{2\pi i}\int e^{zNn_0}\frac{dz}{z}\prod_j\int_0^\infty\exp\Big[-\frac{\lambda\varepsilon kT}{m}\eta_j\log\eta_j-z\eta_j-i\varepsilon\eta_j\sum_j^{N-1}u_K\Big]\frac{d\eta_j}{\sqrt{\eta_j}}$$

ところで小さなεにたいして

$$\int_0^\infty e^{-z\eta-\varepsilon b\eta\log\eta-\varepsilon a\eta}\ \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}}$$

$$=\int_0^\infty e^{-z\eta}\frac{d\eta}{\sqrt{\eta}}\{1-\varepsilon b\eta\log\eta-\varepsilon a\eta+\cdots\}$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{z}}-\varepsilon\, b\,\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{z^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})}-\log z\right)-\frac{\varepsilon\, a\,\Gamma(\frac{3}{2})}{z^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{z}}\left\{1-\frac{\varepsilon b}{2z}\left(\frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})}-\log z\right)-\frac{\varepsilon a}{2z}\right\}$$

$$\Bigg(\int_0^\infty e^{-z\eta}\frac{d\eta}{\sqrt{\eta}}\eta\log\eta=\int_0^\infty e^{-z\eta}\eta^{\frac{1}{2}}\log\eta\, d\eta=\left[\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-z\eta}\eta^{s-1}\,d\eta\right]_{s=\frac{3}{2}}$$

$$=\left[\frac{d}{ds}\frac{\Gamma(s)}{z^s}\right]_{s=\frac{3}{2}}=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{z^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})}-\log z\right)\Bigg)$$

よつて

$$S=\frac{1}{2\pi i}\int e^{Nn_0z}\frac{dz}{z}\left(\frac{\pi}{z}\right)^{\frac{N-1}{2}}\prod_j\left\{1-\frac{\varepsilon\lambda kT}{2mz}\left(\frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})}-\log z-\frac{i\varepsilon\sum\limits_{K=j}^{N-1}u_K}{2z}\right\}\right.$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int e^{Nn_0z}\frac{dz}{z}\frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}}{z^{\frac{N-1}{2}}}\exp\left\{-\frac{(N-1)\varepsilon\lambda kT}{2mz}\left(\frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})}-\log z\right)\right.$$

$$\left.-\frac{i\varepsilon}{2z}\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{K=j}^{N-1}u_K\right\}$$

この積分の saddle point は

$$\frac{d}{dz}\left(Nn_0z-\frac{N}{2}\log z\right)=Nn_0-\frac{N}{2}\frac{1}{z}=0$$

$$2n_0z=1\quad あるいは\quad z=\frac{1}{2n_0}$$

によつてきまる。

よつてSの積分を exp( ) と，それ以外にわけ，exp ( ) には $z=\frac{1}{2n_0}$ をいれると

$$S=\frac{1}{2\pi i}\int e^{Nn_0z}\frac{dz}{z}\frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}}{z^{\frac{N-1}{2}}}\cdot\exp\left\{-\frac{L\lambda kTn_0}{m}\left(\frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})}-\log 2n_0\right)\right.$$

$$\left.-i\varepsilon n_0\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{K=j}^{N-1}u_K\right\}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{N-1}{2}} (N n_0)^{\frac{N-1}{2}}}{\Gamma(\frac{N+1}{2})} \exp\left\{ -\frac{L\lambda k T n_0}{m} \left(\frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \log 2 n_0 \right) - i \varepsilon n_0 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{K=j}^{N-1} u_K \right\}$$

ところで

$$\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{K=j}^{N-1} u_K = \sum_{j=1}^{N-1} j u_j$$

である。それゆえ

$$J = \left(\frac{2\pi m}{8 e^2 \varepsilon^2 \lambda^2 \pi^2} \right)^{\frac{N-1}{2}} \frac{\pi^{\frac{N-1}{2}} (N n_0)^{\frac{N-1}{2}}}{\Gamma(\frac{N+1}{2})} \exp\left\{ -\frac{L\lambda k T n_0}{m} \left(\frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \log 2 n_0 \right) \right\}$$

$$\cdot \int \cdots \int \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{m}{4\pi e^2 \varepsilon \lambda} \sum_{j=1}^{N-1} u_j^2 - i \phi_0 \Sigma u_j \right] \Pi \, du_j \, d\phi_0$$

$$\int \cdots \int \exp\left[-\frac{1}{2} a \sum_j u_j^2 - i \phi_0 \Sigma u_j \right] \Pi \, du_j \, d\phi_0$$

$$= \int d\phi_0 \left(\int \exp\left[-\frac{1}{2} a u^2 - i \phi_0 u \right] du \right)^{\frac{N-1}{2}}$$

$$= \int d\phi_0 \left(\frac{2\pi}{a} \right)^{\frac{N-1}{2}} e^{-\frac{\phi_0^2}{2a}(N-1)} = \left(\frac{2\pi}{a} \right)^{\frac{N-1}{2}} \sqrt{\frac{2\pi a}{N-1}}$$

よつて

$$J = \left\{ \frac{2\pi m}{8 e^2 \varepsilon^2 \lambda^2 \pi^2} \pi n_0 \cdot \frac{2\pi \cdot 4\pi e^2 \varepsilon \lambda}{m} \right\}^{\frac{N-1}{2}} \cdot \frac{N^{\frac{N-1}{2}}}{\Gamma(\frac{N+1}{2})} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{N-1} \cdot \frac{m}{4\pi e^2 \varepsilon \lambda}}$$

$$\cdot \exp\left\{ -\frac{L\lambda k T n_0}{m} \left(\frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \log 2 n_0 \right) \right\}$$

$$J = \left(\frac{2\pi^2 n_0}{\varepsilon \lambda} \right)^{\frac{N-1}{2}} \frac{N^{\frac{N-1}{2}}}{\Gamma(\frac{N+1}{2})} \sqrt{\frac{2\pi}{N-1} \frac{m}{4\pi e^2 \varepsilon \lambda}}$$

$$\cdot \exp\left\{ \frac{L\lambda k T n_0}{m} \left(\log 2 n_0 - \frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} \right) \right\}$$

量Aの期待値　$\langle A\rangle \equiv \bar{A}$ は

$$\langle A\rangle \equiv \bar{A} = \int PAd\Omega / \int Pd\Omega$$

によつて与えられる。以上の計算を部分的にくりかえすことにより，

$$\bar{\eta}_j = \frac{1}{2z} = n_0, \overline{\eta_j^n} = 1\cdot 3\cdots(2n-1)\, n_0^n,\ \overline{\eta_j \eta_K} = n_0^2$$

$$\bar{\psi}_j = 0,\quad \overline{\psi_j^2} = \infty$$ （速度の自乗の期待値）

$$\overline{\frac{1}{2}\eta_j \psi_j^2} = \frac{1}{2\lambda}$$ （これは運動エネルギーの期待値）

$$\frac{2\pi e^2}{m}\overline{\phi_0^2} = \frac{1}{2\lambda}$$ （電場のエネルギーの期待値）

$$\bar{\phi}_0 = 0$$

また　$\overline{\phi_j^2} = \overline{\phi_0^2} + \epsilon^2 n_0^2\, j(j+2)$，（$j=1, 2\cdot\cdot, N-1$）

$$\frac{kT}{m}\overline{\eta_j \log \eta_j} = \frac{n_0}{\lambda}(\psi(\tfrac{3}{2}) + \log 2n_0)$$

ただし

$$\psi(\tfrac{3}{2}) = \frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})}$$

運動エネルギーの期待値が電場のエネルギーの期待値にひとしいことは笹倉浩氏がえている結果に一致する，いわゆる等分配則である。速度の期待値が0であるのに速度の自乗の期待値が∞となるのは少し奇妙である。しかし計算を吟味してみれば密度が小さくなると速度の変動が大きくなり，そのために積分が発散するのである。密度を速度の自乗にかけたものの期待値はこれに反し収束する。