数理解析研究所講究録
第25巻 1967年 146-160

B I B Dの CONSTRUCTION について

広島大理　　浜 田 昇

1. 序　1936年, F. Yates によって初めて導入された Balanced Incomplete Block Design （略して, B I B D）は, その後このデザインの構成方法の問題および不存在証明の問題として多くの人々によって試みられた. 1939 年, R. C. Bose は, このデザインの一つの系統的な構成方法として, Difference Theorems (1)を発表し, この方法によって数多くのデザインを構成したが, 構成出来ない問題もいくつかあった. その後, これら未解決なデザインを構成しようとする試みが, 色々な人々によってなされたが, どうしても構成出来ないので, この種のデザインの不存在証明の問題がクローズアップした. 最初にこの種のデザインの不存在証明を扱った人は Q. M. Hussain (1945年) (5) と H. K. Nandi (1945年) (6) である. 1950 年になって, S. Chowla と H. J. Ryser (3) および S. S. Shrikhande (8) は Hasse-Minkowskiの P invariant を用いて regular symmetrical BIBD が, 存在するための必要条件を求め, 従来, 個々に扱つかわれた不存在証明を系統的に扱つかった. さらに, S. S. Shrikhande, D. Raghavarao and S. K. Tharthare (9) や J. Ogawa (7) は, これらの必要条件をある種の非対称なデザインに拡張した. しかし, 現在なお未解決のまゝ残されている公開問題もある.

現在，反復数 r が 10 を越えない範囲で未解決のまゝ残されている問題は，次の2つである．

(1) $v=46,\ b=69,\ r=9,\ k=6,\ \lambda=1$

(2) $v=51,\ b=85,\ r=10,\ k=6,\ \lambda=1$

これら2つのデザインを Difference Theorems を用いて cyclic に構成しようとする試みは古くからなされているが，いまだ構成するにいたっていない． 一方，Hasse-Minkowski の p invariant を用いる方法は，J. Ogawa (7) が，してきしているように Hasse-Minkowski の p invariant を，具体的に計算すること自身非常にむずかしいし，たとえ計算出来たとしても $(b-r)/(v-1)$ が，1より大きいため必要条件にひっかからないであろう． また，$\lambda=1$ の BIBD は，存在すれば，ある幾何学的構造を持っていることが，知られている． 以上の考えから，小生は，これら2つのデザインは Difference Theorems を用いた構成方法以外の幾何学的方法で作れるであろうと考えた． その手はじめとして，幾何学的構造をもつと思われるある限定したタイプで，(1)が作られるかどうかを東大の大型計算機 HITAC 5020 を用いて調べた． その結果，このタイプでは作れないことがわかったので，その方法と結果の概略を報告する．

2. BIBDの定義

最初に BIBD を定義する．

定義 サイズ（ブロック内の実験単位の個数）が，一様に k である b 個

のブロックがあって，これに v 個の処理が，次の三条件をみたすように割り付けられたとき，このデザインのことを，釣合型不完全ブロック計画（Balanced Incomplete Block Design − 略してBIBD ）という。

(1) 各ブロックは k 個の相異なる処理を含む。

(2) 各処理は r 個のブロックに現われる。

(3) 任意の二つの処理は丁度 λ 個のブロックに対として現われる。

上のことを表現行列Nを用いて書き表わすと，パラメーター (v,b,r,k,λ) をもつ BIBD とは，次の三条件をみたす $v\times b$ 行列N のことである。

$$N = \| n_{ij} \| \quad : \quad i=1,2,\cdots,v \ ; \ j=1,2,\cdots,b.$$

$$\text{ここに，} \quad n_{ij} = \begin{cases} 1 & : \ \text{i 番目の処理が j 番目のブロックにほどこされているとき} \\ 0 & : \ \text{そうでないとき} \end{cases}$$

(1) すべての j に対して，
$$\sum_{i=1}^{v} n_{ij} = k \qquad (2.1)$$

(2) すべての i に対して，
$$\sum_{j=1}^{b} n_{ij} = r \qquad (2.2)$$

(3) すべての対 (i,i') に対して，$(i\neq i')$
$$\sum_{j=1}^{b} n_{ij}n_{i'j}=\lambda \qquad (2.3)$$

特に，$v=b$ のとき，このデザインは対称であるといい，そうでないとき非対称であるという。

上の定義から5つのパラメーター (v,b,r,k,λ) をもつ BIBD が，存在す

るためには，少なくとも，次の三条件をみたさねばならぬことがわかる。

(1) $vr = bk$ (2) $\lambda(v-1) = r(k-1)$ (2.4)

(3) $v \leqq b$ (Fisher の不等式) (2.5)

また，一般に，パラメーター(v,b,r,k,λ)をもつBIBDが存在するならば，その行と行および列と列とをどのように入れかえても，もとと同じパラメーター($v,b,r,k,\lambda,$) をもつ BIBD である。

3. $\lambda = 1$ をもつ BIBD の構造とその Construction .

最初に，$\lambda = 1$ をもつ BIBD を，電子計算機を用いて構成する際必要と思われる次のよく知れた定理 (2)をあげる。

定理 パラメーター $(v,b,r,k,1)$ をもつ BIBD が存在するための必要十分条件は，パラメーター：

$$\begin{array}{llll} \tilde{v} = v-1, & \tilde{b} = b-r, & \tilde{r} = r-1, & \tilde{k} = k, \\ m = r, & n = k-1, & \lambda_1 = 0, & \lambda_2 = 1 \end{array} \qquad (3.1)$$

をもつ GD タイプの PBIBD が存在することである。さらに，パラメーター $(v,b,r,k,1)$をもつ BIBD が存在するならば，その表現行列Nの行と行および列と列とを適当に入れかえることによって，$\lambda=1$をもつ表現行列 N は次のように表わされる。

$$N = \left[\begin{array}{c:c} \underline{J}_r' & \underline{0}_{\tilde{b}}' \\ \hdashline N_1 & N_2 \end{array}\right] \qquad (3.2)$$

ここに，　$\underline{J}_r$ ：すべての元が1であるr次元ベクトル

$\underline{0}_{\tilde{b}}$ ：すべての元が0である$\tilde{b}$次元ベクトル

N_1 ＝ $I_{v^*} \otimes \underline{J}_{\lambda^*}$ ：$v^* \times v^*$単位行列 I_{v^*}と λ^*次元ベクトル$\underline{J}_{\lambda^*}$とのクロネッカー積

ただし，　$v^* = r$，　$\lambda^* = k-1$ である。

N_2 ：(3.1)のパラメーターをもつ GD タイプの PBIBD の表現行列（$\tilde{v} \times \tilde{b}$ 行列）。

この定理によれば，パラメーター $(v,b,r,k,1)$ をもつ BIBD が存在するかどうかを調べるには，(3.1) のパラメーターをもつ GD タイプの PBIBD が存在するかどうかを調べればよい。

以下，この $\tilde{v} \times \tilde{b}$ 行列 N_2 の構成方法を考える。

この Note では，$\lambda=1$ をもつ非対称な BIBD (1) を扱うことが目的であるから，以下，$\tilde{b} \geqq \tilde{v}$ すなわち，$b-r \geqq v-1$ とする。

$$\begin{aligned} &v^* = r, \quad b^* = r(r-1)/k, \quad r^* = r-1, \\ &k^* = k, \quad \lambda^* = k-1 \quad (\ k \geqq 2\ ) \end{aligned} \qquad (3.3)$$

とおくと，これらの新しいパラメーターもすべて正の整数で，かつ，次の

三条件をみたす。

$$(1)\quad v^*\cdot r^* = b^*\cdot k^*, \qquad (2)\quad (v^*-1)\cdot\lambda^* = (k^*-1)\cdot r^* \qquad (3.4)$$

$$(3)\quad v^* \leqq b^* \qquad (3.5)$$

これらの新しいパラメーター $(v^*, b^*, r^*, k^*, \lambda^*)$ をもつBIBDが存在するものとし，その表現行列を N^* とする。すなわち，

$$N^* = \| \, n^*_{\alpha\beta} \, \| \quad : \quad \alpha = 1,2,\ldots,v^* \; ; \quad \beta = 1,2,\ldots,b^* \qquad (3.6)$$

ここに，
$$n^*_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 \; ; & \alpha\text{ 番目の処理が }\beta\text{ 番目のブロック} \\ & \text{にほどこされているとき} \\ 0 \; ; & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

(3.2)の行列 N_2 が存在するならば，新しいパラメーター：v^*, b^*, λ^* を用いて，次のように表わすことが出来る。

$$N_2 = \| \, A_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \, \| \quad : \quad \tilde{\alpha} = 1,2,\ldots,v^* ; \; \tilde{\beta} = 1,2,\ldots,b^* \qquad (3.7)$$

ここに，
$$A_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = \| \, a^{(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})}_{s,t} \, \| \quad : \quad s,t = 1,2,\ldots,\lambda^*$$

（注）　$v-1 = r(k-1)$,　$v\cdot r = b\cdot k$ であるから，

$$b^* = r(r-1)/k = (b-r)/(k-1) \qquad (3.8)$$

である。

行列 N^* と行列 N_2 との関係：$v^* = b^*$ すなわち，$v-1 = b-r$ の場合には，行列 N_2 が存在するならば，その行列の行と行および列と列を適当に

入れかえることによって，行列 N^* の $n^*_{\alpha\beta}=0$ なる α 行 β 列に対応する N_2 の α 行 β 列の小行列 $A_{\alpha\beta}$ がゼロ行列になるように変形することが出来る．すなわち，行列 N_2 の行と行および列と列とを適当に入れかえることによって，

$$n^*_{\alpha\beta}=0 \longrightarrow A_{\alpha\beta}=O \qquad (3.9)$$

と出来る．ここに，行列 N^* はパラメーター $(v^*, v^*, k^*, k^*, k^*-1)$ をもつ BIBD の表現行列であるから存在する．$v^* < b^*$ すなわち，$v-1 < b-r$ の場合でも (3.9) の対応によって，行列 N_2 が作れるものがある．その一例をあげる．

例　$v=25,\ b=50,\ r=8,\ k=4,\ \lambda=1$ (3.10)

の BIBD は，

$$v^*=8,\quad b^*=14,\quad r^*=8,\quad k^*=4,\quad \lambda^*=3 \qquad (3.11)$$

の解：$(\infty, 1, 2, 4)$，$(0.1, 2, 4) \bmod 7$ を用いて次のようにできる。

(図 1)

α \ β =		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
		0							0						
1									0	0	0	0	0	0	0
2					σ_1		σ_2	σ_3	σ_1			σ_2		σ_2	σ_2
3		σ_3				σ_1		σ_2	σ_2	σ_1			σ_2		σ_2
4		σ_2	σ_3				σ_1		σ_2	σ_2	σ_1			σ_2	
5			σ_2	σ_3				σ_1		σ_2	σ_2	σ_1			σ_2
6		σ_1		σ_2	σ_3				σ_2		σ_2	σ_2	σ_1		
7			σ_1		σ_2	σ_3				σ_2		σ_2	σ_2	σ_1	
8				σ_1		σ_2	σ_3				σ_2		σ_2	σ_2	σ_1

ここに，　$\sigma_1 = \begin{array}{ccc} 1 & & \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{1} & & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \multicolumn{1}{|c}{} & 1 & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \multicolumn{1}{|c}{} & & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array}$ ，$\sigma_2 = \begin{array}{ccc} & 2 & \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{} & 1 & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \multicolumn{1}{|c}{} & & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \multicolumn{1}{|c}{1} & & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \end{array}$ ，$\sigma_3 = \begin{array}{ccc} & & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{} & & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \multicolumn{1}{|c}{1} & & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \multicolumn{1}{|c}{} & 1 & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \end{array}$

Takeuchi table (10) には，上の解として，

$$(00,01,11,43)\ ,\ (00,02,22,31)\quad \mathrm{Mod}\ (5.5)$$

が記載されている。

次に，パラメーター：

$$v = 46,\quad b = 69,\quad r = 9,\quad k = 6,\quad \lambda = 1 \tag{3.12}$$

をもつ BIBD を考える。前述の定理により，パラメーター(46,69,9,6,1) をもつ BIBD が存在するかどうかを調べるには，(3.2) のような 45×60 行列 N_2 が存在するかどうかを調べればよい。以下，この行列 N_2 を作る一つの方法として，前述の方法が用いられるかどうかを調べる。この場合には，

$$\begin{array}{lllll} \tilde{v} = 45, & \tilde{b} = 60, & \tilde{r} = 8, & \tilde{k} = 6, & \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1 \\ v^* = 9, & b^* = 12, & r^* = 8, & k^* = 6, & \lambda^* = 5 \end{array} \tag{3.13}$$

であるからパラメーター (9,12,8,6,5) をもつ BIBD は存在する。このデザインの表現行列を N^* とする。すなわち，

$$N^* = \| n^*_{\alpha\beta} \| \ :\ \alpha = 1,2,\ldots,9\ ;\ \beta = 1,2,\ldots,12$$

$$N_2 = \| A_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \| \ :\ \tilde{\alpha} = 1,2,\ldots,9\ ;\ \tilde{\beta} = 1,2,\ldots,12$$

$$\text{ここに},\quad A_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = \| a^{(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})}_{s,t} \| \ :\ s,t = 1,2,\ldots,5$$

行列 N^* の各元 $n^*_{\alpha\beta}$ に行列 $A_{\alpha\beta}$ を次のように対応させる。

$$n^*_{\alpha\beta} \longrightarrow A_{\alpha\beta} = n^*_{\alpha\beta}\, A^*_{\alpha\beta} \tag{3.14}$$

i.e.

$$\begin{cases} n^*_{\alpha\beta} = 0 \longrightarrow A_{\alpha\beta} = 0 \\ n^*_{\alpha\beta} = 1 \longrightarrow A_{\alpha\beta} = A^*_{\alpha\beta} \end{cases} \qquad (3.14')$$

ここに，$A^*_{\alpha\beta}$ は $\lambda^* \times \lambda^*$ の適当な行列である。

以下，上の対応によって求めたい N_2 が作られるかどうかを調べる。行列 N が，パラメーター (46,69,9,6,1)をもつ BIBDの表現行列であるから $A^*_{\alpha\beta}$ はゼロ行列ではありえない。従って，上の対応は行列 N_2 のゼロ行列の位置が N^* によって BIBD のタイプに定まることを意味する。パラメーター (9,12,8,6,5)をもつ BIBD の表現行列 N^* は，その行と行および列と列の入れかえを除いて一意的に定まる。従って (3.14) の対応によって求めるデザインが作れるかどうかを調べるには，(図2)のようにゼロ行列を固定したもので調べたらよい。しかし問題が combi-natorial であるので小生は，東大の大型計算機を用いて調べた。以下，その方法と結果の概略を書く。

non-zero 行列 $A_{\alpha\beta}$ のおもな性質をあげる。以下，(図2)を用いる。

(1) 行列 N は $\lambda=1$ の BIBD の表現行列であるから，ゼロ行列でない行列 $A_{\alpha\beta}$ は少なくとも次の三条件をみたさねばならぬ。

(i) すべての α, β ; s, t に対して，$a^{(\alpha,\beta)}_{s,t} = 0$ or 1

(ii) $\underline{J}'_5 \cdot A_{\alpha\beta} = \underline{J}'_5$ (iii) $A_{\alpha\beta} \cdot \underline{J}_5 = \underline{J}_5$

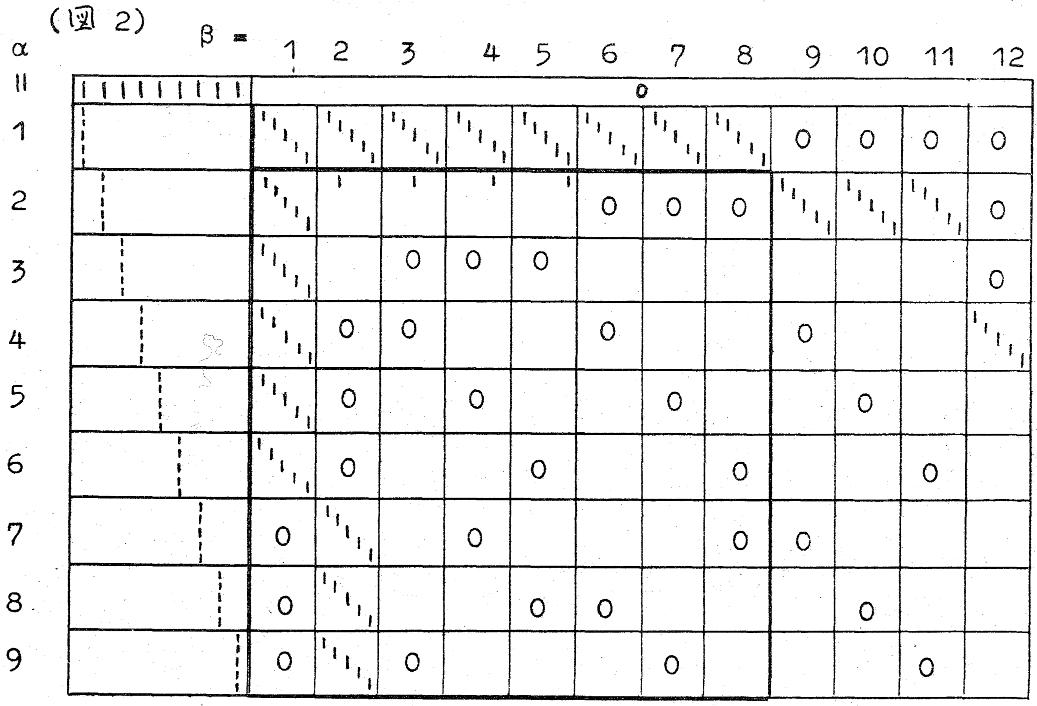
ここに，$\underline{J}'_5 = (1,1,1,1,1)$ である。

従って，求めるデザイン N が，(3.14)の対応によって作れるならば，行

列 N_2 のゼロ行列の位置をかえない範囲で適当にその行と行および列と列を入れかえることによって下図のようなタイプでも作れなければならぬ。

以下，(図2) を用いる。

(図 2)



(2)　(1) の (iii) より，ゼロ行列でない行列 $A_{\alpha\beta}$ には，任意の α, β, i に対して，$a^{(\alpha,\beta)}_{i,j_o} = 1$ となる j_o が一つかつただ一つ存在するから，ゼロ行列でない行列 $A_{\alpha\beta}$ に対して，次のような方法で，一つの5次元ベクトル $\underline{c}_{\alpha\beta}$ を $1:1$ に対応させることが出来る。

$$a^{(\alpha,\beta)}_{i,j_o} = 1 \longleftrightarrow c^{(\alpha,\beta)}_{i} = j_o \qquad (3.15)$$

ここに，　$\underline{c}'_{\alpha\beta} = (c^{(\alpha,\beta)}_1, c^{(\alpha,\beta)}_2, \cdots, c^{(\alpha,\beta)}_5)$

(3)　(1)の(ii)と(2)より，$A_{\alpha\beta} \neq 0$ ならば，

$$\left\{ c_1^{(\alpha,\beta)},\ c_2^{(\alpha,\beta)},\ \cdots,\ c_5^{(\alpha,\beta)} \right\} = \left\{ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5 \right\}$$

(4)　4つの行列：$A_{\alpha\beta}$，$A_{\alpha\beta'}$；$A_{\alpha'\beta}$，$A_{\alpha'\beta'}$，

i.e.

$$\begin{array}{c|c|c|} & \beta & \beta' \\ \hline \alpha) & A_{\alpha\beta} & A_{\alpha\beta'} \\ \hline \alpha') & A_{\alpha'\beta} & A_{\alpha'\beta'} \\ \hline \end{array} \qquad (\alpha \neq \alpha' : \beta \neq \beta') \qquad (3.16)$$

が共にゼロ行列でない行列の場合には，これらに対応するベクトル：$\underline{C}_{\alpha\beta}$，$\underline{C}_{\alpha\beta'}$；$\underline{C}_{\alpha'\beta}$，$\underline{C}_{\alpha'\beta'}$，は(3)のほかに次の条件をみたさねばならぬ。

$$c_i^{(\alpha,\beta)} = c_{i'}^{(\alpha',\beta)} \Longrightarrow c_i^{(\alpha,\beta')} \neq c_{i'}^{(\alpha',\beta')} \qquad (3.17)$$

(注)　(3)より $A_{\alpha\beta} \neq 0$，$A_{\alpha'\beta} \neq 0$ ならば，行列 $A_{\alpha\beta}$ に対応するベクトル $\underline{C}_{\alpha\beta}$ の任意の元 $c_i^{(\alpha,\beta)}$ に対して，$c_i^{(\alpha,\beta)} = c_{i'}^{(\alpha',\beta)}$ となる元 $c_{i'}^{(\alpha',\beta)}$ が，ベクトル $\underline{C}_{\alpha'\beta}$ の中に必ずただ一つ存在する。

以下，特に，$2 \leqq \alpha \leqq 9$；$1 \leqq \beta \leqq 8$ に限定し，会合数が，2以上にならぬという条件のもとで考える。

(5)　(4)より，(図2)のゼロでない行列：

i.e.

$$\left[A_{21} : A_{22} : A_{23} : A_{24} : A_{25}\right]$$
$$\left[A_{31} : A_{32} : A_{36} : A_{37} : A_{38}\right]$$
$$\vdots$$
$$\left[A_{92} : A_{94} : A_{95} : A_{96} : A_{98}\right]$$

にそれぞれ対応する 5×5 行列 :

$$C^{(2)} = \left[\underline{c}_{21} : \underline{c}_{22} : \underline{c}_{23} : \underline{c}_{24} : \underline{c}_{25}\right]$$
$$C^{(3)} = \left[\underline{c}_{31} : \underline{c}_{32} : \underline{c}_{36} : \underline{c}_{37} : \underline{c}_{38}\right]$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$C^{(9)} = \left[\underline{c}_{92} : \underline{c}_{94} : \underline{c}_{95} : \underline{c}_{96} : \underline{c}_{98}\right]$$

は，すべて第一列が 1，2，3，4，5 である 5×5 の Latin Squares でなければならぬ.

(6) 5×5 Standard Latin Squares は 56個しかない(4). 従って，求めるデザイン N が (3.14) の対応によって作られるためには，少なくとも (3.17)の条件をみたす8 個の Latin Squares $C^{(2)}, C^{(3)}, \cdots, C^{(9)}$ が，存在しなければならない.

以上の性質をもつ 8個の Latin Squares : $C^{(2)}, C^{(3)}, \cdots, C^{(9)}$

が，存在するかどうかを東大の大型計算機 HITAC 5020 を用いて調べた結果 $c^{(2)}, c^{(3)}, \cdots, c^{(8)}$ までは，条件（3.17）をみたすものが存在したが，条件（3.17）をみたす 5×5 Latin Square $c^{(9)}$ は存在しなかった.

さらに，$c^{(2)}, c^{(3)}, \cdots, c^{(8)}$ まで条件をみたすように作れる場合は，（i）$c^{(2)}, c^{(3)}, \cdots, c^{(8)}$ の Standard Latin Squares は，すべて等しく，（ii）かつ，その Standard Latin Square は Fisher and Yates Table（4）の 51 から 56 番までの Self Conjugate Standarn Latin Squares であった。

以上のことより，（3.14）の対応によって求める BIBD を作ることは不可能であることがわかった。 しかし，このデザインは $b^* > v^*$ $(\tilde{b} > \tilde{v})$ であるから，上のことから求める BIBD が，不存在であるとはいえぬ。 なお，ある種の BIBD の幾何学的構造，および，そのデザインの Cyclic な構成方法については，論文（11）を参照されたい。

参 考 文 献

[1] R. C. Bose (1939). On the construction of balanced incomplete block designs.
Ann. of Eugenics, Vol. 9, 353-399.

[2] R. C. Bose, S. S. Shrikhande and K. N. Bhattacharya(1953).
On the construction of group divisible incomplete block designs.
Ann. Math. Statist., Vol. 24, 167-195.

[3] S. Chowla and H. J. Ryser (1950). Combinatorial problems
Canad. J. Math., Vol. 2, 93-99.

[4] R. A. Fisher and F. Yates (1953). Statistical tables for biological agricultural and medical research.
Oliver and Boyd.

[5] Q. M. Hussain (1945). Symmetrical incomplete block designs with $\lambda = 2$, $k = 8$ or 9.
Bull. Culcatta Math. Soc., Vol. 37, 115-123.

[6] H. K. Nandi (1945). On the relation between certain types of tactical configurations.
Bull. Culcatta Math. Soc., Vol. 37, 92-94.

[7] J. Ogawa (1967). On the non-existence of certain block

designs.

To be presented at the U.S.-Japan cooperative seminar.

[8] S. S. Shrikhande (1950). The impossibility of certain symmetrical balanced incomplete block designs.
Ann. Math. Statist., Vol. 21, 106-111.

[9] S. S. Shrikhande, D. Raghavarao and S. K. Tharthare (1963). Non-existence of some unsymmetrical partially balanced incomplete block designs.
Canad. J. Math., Vol. 15, 686-701.

[10] K. Takeuchi (1962). A table of difference sets generating balanced incomplete block designs.
Review Internat. Statist. Instit., Vol. 30, 361-366.

[11] S. Yamamoto, T. Fukuda and N. Hamada (1966). On finite geometries and cyclically generated incomplete block designs.
J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-1 30 137-149.