

動的計画法における退化現象について

— 問題提起 —

慶應義塾大学 管理工学科 柳井 浩

§ 1. 退化現象, 完全退化

ここで述べる退化現象は, 簡単な例をあげていえば, 次のようなものである。

例題 1

動的計画法の漸化式

$$f_n(z) = \max_{0 \leq x \leq z} \{ \varphi_n(x) + f_{n+1}(\psi_n(x)) \} \quad n=1, \dots, N-1$$

$$f_N(z) = \max_{0 \leq x \leq z} \{ \varphi_N(x) \}$$

において, φ_n, ψ_n がそれぞれ非減少関数であるとしてみよう。このときには, 決定変数 x の値は, いつもとりうる最大値 z にしておけばよい。証明—明らか。

すなわち, 動的計画法においては, もともと, ある段階における決定がそれにひきつづく決定に大きく影響を与えることを考慮して式をたてているわけであるが, 上の例題のように, それ以後の事を考慮せず, その段階だけで, 適当な基準の下で, 最適化を行えば, これが結局, 全体的な最適化をもたらすとき, これを退化現象という。

動的計画法において‘退化現象’という言葉が最初に使ったのは、多分
 ヴェンツェリ[1] であろうと思われる。ヴェンツェリはこの現象を次のよ
 うな例題を使って説明している。

例題 2

A, B 2つの事業に關与している企業がある。第 i 期の期首に、
 $\left. \begin{matrix} A \text{ に } x \text{ 円} \\ B \text{ に } y \text{ 円} \end{matrix} \right\}$ を投入すれば、期末には、これらが $\left\{ \begin{matrix} A \text{ から } g_i(x) \text{ 円} \\ B \text{ から } h_i(y) \text{ 円} \end{matrix} \right\}$ によっ
 て戻ってくる。いま、第 1 期の期首に Z 円の手持ち資金があるとき、第
 N 期の期末における手持ち資金を最大にするには、各期において、手持ち
 の資金をどのように配分したらよいか？

$f_i(Z)$: 第 i 期の期首における手持ち資金が Z であるとき、第 i 期
 以後、手持ち資金を、事業 A, B に最も上手に配分して行った
 結果、第 N 期の期末に残る手持ち資金——最大資金

とちけば

$$f_i(Z) = \max_{\substack{0 \leq x \leq Z \\ 0 \leq y \leq Z \\ 0 \leq x+y \leq Z}} f_{i+1} \left(\underbrace{g_i(x)}_{A \text{ から}} + \underbrace{h_i(y)}_{B \text{ から}} + \underbrace{Z - (x+y)}_{\text{ダンスの中にしまっ}} \right)$$

$i = 1, \dots, N-1$

$$f_N(Z) = \max_{\substack{0 \leq x \leq Z \\ 0 \leq y \leq Z \\ 0 \leq x+y \leq Z}} \left(\underbrace{g_N(x)}_{A \text{ から}} + \underbrace{h_N(y)}_{B \text{ から}} + \underbrace{Z - (x+y)}_{\text{ダンスの中にしまっ}} \right)$$

が成立する。ここで、

$$g'_i(x) \geq 1, \quad h'_i(y) \geq 1$$

* この例題は、話を簡単にするため、筆者が翻案したものである。

を仮定すると,

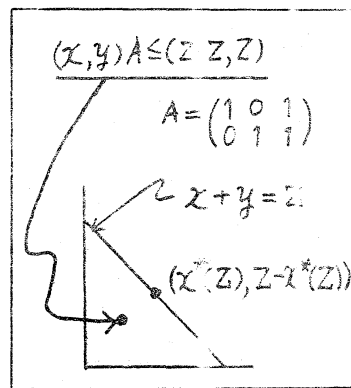
$$\begin{aligned} \varphi_i(z) &\equiv \max_{(x,y) \in A \leq (z,z,z)} [g_i(x) + h_i(y) + z - (x+y)] = \\ &= \max_{0 \leq x \leq z} [g_i(x) + h_i(z-x)] \equiv \\ &\equiv g_i(x_i^*(z)) + h_i(z-x_i^*(z)) \end{aligned}$$

がいえる. ここでさらに,

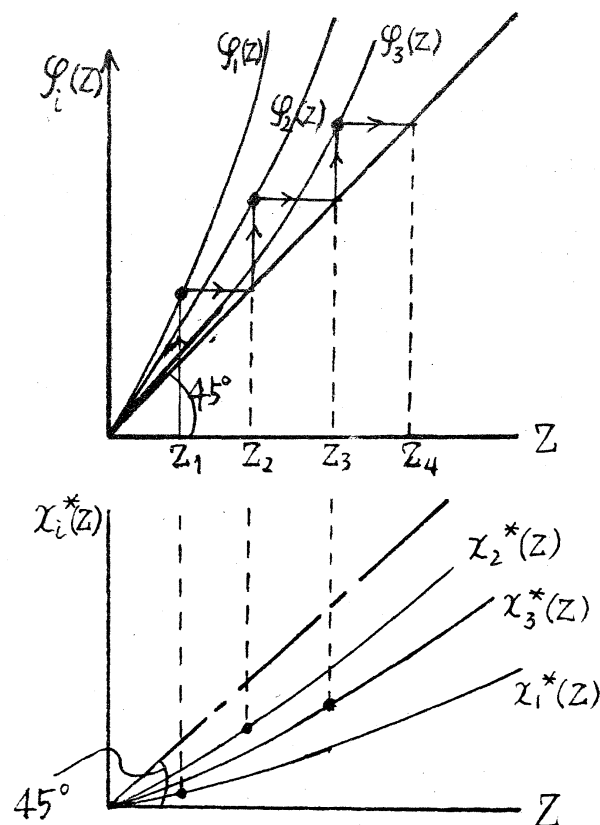
$\varphi_i(z)$: z の非減少関数

という仮定をおくと, 各期における最適配分が

$$x = x_i^*(z), \quad y = z - x_i^*(z)$$



によって与えられることがわかる. (数学的帰納法で証明できる). この決定は, やはり, 後の段階に対する考慮なしに行われるものであって, ここでも退化現象がみられる. さらに, $\varphi_i(z)$, $x_i^*(z)$ 等のグラフを作っておけば, 手持ち資金の変化等が簡単にわかる.



しかし、ヴェンツェリ自身もこの現象に対する厳密な定義は与えていないようである。一方、同様の現象の例は、化学反応に於けるもの等少ないように思われる。また、動的計画の漸化式それ自身から、最適化のルールを直接導びき、これに‘物理的’な解釈を与えることは、その最適過程の性質を知る上からも、また、無用な数値計算を避ける上からも重要であり、次節でもふれるように、いわゆるターンパイク現象等を動的計画法の側から説明する一つの手がかりを含んでいるように思われるので、この種の現象を観察し、その意味を明らかにしておくことが必要と思われる。

残念ながら、現在までの所この現象についてくわしいことはわかっていない。次の例は、例題2の一種の拡張である。

例題 3

$$f_n(z) = \max_{\xi \in D(z)} [\varphi_n(\xi, z) + f_{n+1}(\psi_n(\xi, z))] \quad n=1, \dots, N-1,$$

$$f_N(z) = \max_{\xi \in D(z)} [\varphi_N(\xi, z)], \quad z \in Z$$

という形の漸化式を考える。ここに、 $z (\in Z)$ はスカラー変数、 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ は m 次元ベクトル変数である。

さらに、次の仮定 (イ), (ロ) をおこう。

イ) 関数 $\varphi_n(\xi, z)$, $\psi_n(\xi, z)$ は

ξ に関して偏微分可能で凸

z に関して非減少 (ξ 固定).

ロ) 決定変数の許容域 $D(z)$ は

$$g_j(\xi, z) \leq 0 \quad j=1, 2, \dots, s$$

によって与えられる領域で, すべての $z \in Z$ に対して空集合でないものとする. ここに, 関数 $g_j(\xi, z)$ は

ξ に関して偏微分可能で凸 (z 固定)

z に関して非増加 (ξ 固定).

まず, ロ) の仮定から $D(z)$ が凸集合でさらに

$$z \leq z' \Rightarrow D(z) \subseteq D(z')$$

がいえる. このことと, イ) の仮定から数学的帰納法により,

$$z \leq z' \Rightarrow f_n(z) \leq f_n(z')$$

がみちびかれる.

さて, $\varphi_n(\xi)$ の最大値を求めて, これが $\hat{\xi}(z)$ で与えられるものとしよう:

$$\varphi_n(\hat{\xi}(z), z) = \max_{\xi \in D(z)} [\varphi_n(\xi, z)]$$

ここで, g の添字の集合を次のように分割しよう.

$$g_j(\hat{\xi}(z), z) = 0 \quad j \in E(z)$$

$$g_j(\hat{\xi}(z), z) < 0 \quad j \in I(z)$$

ここに

$$E \cup I = \{1, \dots, s\} \quad E \cap I = \emptyset$$

であり更にイ) の仮定から $E(Z) \neq \emptyset$ すなわち $\hat{\xi}(Z)$ が $D(Z)$ の境界にあるとしても大きな支障はない。

いま、ベクトル

$$\text{grad}_{\xi} g_j(\hat{\xi}(Z), Z) \quad j \in E(Z)$$

をふくむ最小の凸錐体を $K(Z)$ と書こう。

ここで、

$$\text{grad}_{\xi} \varphi_n(\hat{\xi}(Z), Z) \in K(Z)$$

$$\text{grad}_{\xi} \psi_n(\hat{\xi}(Z), Z) \in K(Z)$$

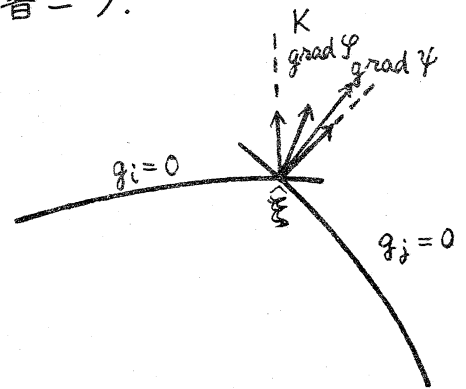
であれば、あきらかに

$$f_n(Z) = \max_{\xi \in D(Z)} [\varphi_n(\xi, Z) + f_{n+1}(\psi_n(\xi, Z))]$$

$$= \varphi_n(\hat{\xi}(Z), Z) + f_{n+1}(\psi_n(\hat{\xi}(Z), Z)).$$

すなわち、各段階において、 $\varphi_n(\xi, Z)$ を目的関数として行動すればよいことがわかる。

上の例からもわかるように、政策変数の許容域 $D(Z)$ が、凸多角体であるときには、退化現象のおこる可能性が少くないものと思われる。



これまで、状態変数が1個の場合を考えたが、多変数の場合にも同様な現象が起りうるはずであるが、現在までの所、筆者は上の例題のような形で説明することには成功していない。問題点は、荒っぽくいえば $\text{grad } f_n$ 、あるいは、状態変数 Z の変動に対する決定変数の許容域 $D(Z)$ の変動をどのような形でとらえるかにあるように思われるが今後の研究の対象としたい。

次節ではこの現象に関連して、さらに調査を要すると思われる現象を示しておくことにする。

§2 局所退化現象

§1 で考えた3つの例では、共に、すべての状態変数に対して退化現象がみられた、本節では、状態変数がある特定の集合に属するときだけに、この現象がみられる場合を考える。

例題 4 — メンドリとタマゴ [2], [3]

養鶏場がある。ニワトリはすべて産卵および卵の孵化に使うことができる。(メンドリしかいないし、孵化されたヒヨコは皆メスである!) ニワトリ x 羽を孵化に、 y 羽を産卵に動員するとき、必要なニワトリ(C)と必要な卵(E) (抱かせる卵) はそれぞれ

$$(C, E) = (x, y) \begin{pmatrix} \overset{\text{ニワトリ}}{1}, \overset{\text{タマゴ}}{4} \\ 1, 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{孵化} \\ \text{産卵} \end{matrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1, 4 \\ 1, 0 \end{pmatrix}$$

によって与えられ、これによって得られるニワトリと卵は

$$(C, E) = (x, y) \begin{pmatrix} \overset{\text{ニワトリ}}{5}, \overset{\text{タマゴ}}{0} \\ 1, 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{孵化} \\ \text{産卵} \end{matrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5, 0 \\ 1, 12 \end{pmatrix}$$

である。いま、最初 $g_0 = (C_0, E_0)$ というニワトリと卵があるとき、これを産卵と孵化に配分してニワトリと卵をふやして行く。このような過程を K 回くりかえして行き、その結果として得られるニワトリと卵 C_K, E_K

の総合評価 $(P_C, P_E) \cdot (C_K, E_K)$

を最大にするには各回において、手持ちのニワトリと卵のうちから、それぞれ何程を産卵と孵化にまわせばよいか?

今、 n 回における配分を $g_n = (x_n, y_n)$, ニワトリと卵の手持ちを

$g_k = (C_k, E_k)$ とおくと、明らかに、

$$g_k = g_{k-1} + t_k(B-A) \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$t_k A \leq g_{k-1} \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$t_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, K$$

g_0 : given

が成立する。すなわち、問題は上の条件の下で線形関数

$$P \cdot g_k \quad P = (P_C, P_E)$$

を最大にする線形計画法の問題になる。藤川氏[3]は

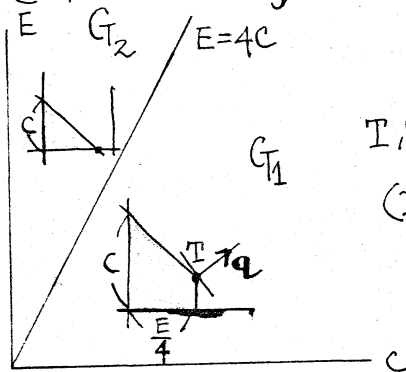
$$K=20, C_0=1, E_0=0, P=(30, 5)$$

の場合について数値計算を行ない、およそ次のような結果を与えている。

『 期間	最適手順
1	$x=0, y=C$
2	$x=0.92C, y=0.08C$
3~20	$x=E/4, y=C-E/4$

しかも、おどろくべき事には才2期から才13期までの間、ほとんど正確に、 $E/C = 2$ が成立しているのである。』

いま、上の制約条件を画いてみると g によって異なるが、次のようになる。



I点の座標:

$$(x, y) = (C, E) \left(\frac{C}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

すなわち、上の数値結果の主要な部分では、あきらかに $q \in G_1$ であり、最適手順が点 T で与えられることがわかる。つまり、この場合には

$$\begin{aligned} \max_{\substack{tA \leq q \\ t \geq 0}} t \cdot q' & \quad q = (q_1, q_2) \\ & \quad q_1 > q_2, \text{ 任意} \end{aligned}$$

を各回における実際上の決定の基準として採用することができることになる。このでも、それ以後に対する考慮の必要がなくなってしまう。これも1つの退化現象と考えることは出来ないだろうか？に、この場合にはいつでも上の基準が採用できるわけではないから、局所退化現象と仮にゆんでおこう。

また、このことは上の問題を動的計画法の問題として調べてみると、問題は

$$\begin{aligned} v_{k+1}(q) &= P \cdot q' \\ v_k(q) &= \max_{\substack{tA \leq q \\ t \geq 0}} v_{k+1}(q + t(B-A)) \\ & \quad k = 1, \dots, K \end{aligned}$$

という形の問題族に帰着できる。 $k = K-1$ について調べてみると、

$$\begin{aligned} v_{K-1}(q) &= \max_{tA \leq q, t \geq 0} v_K(q + t(B-A)) \\ &= P \cdot q + \max_{tA \leq q, t \geq 0} t \cdot (B-A) P' \\ &= P \cdot q + \max_{tA \leq q, t \geq 0} t \cdot q' \end{aligned}$$

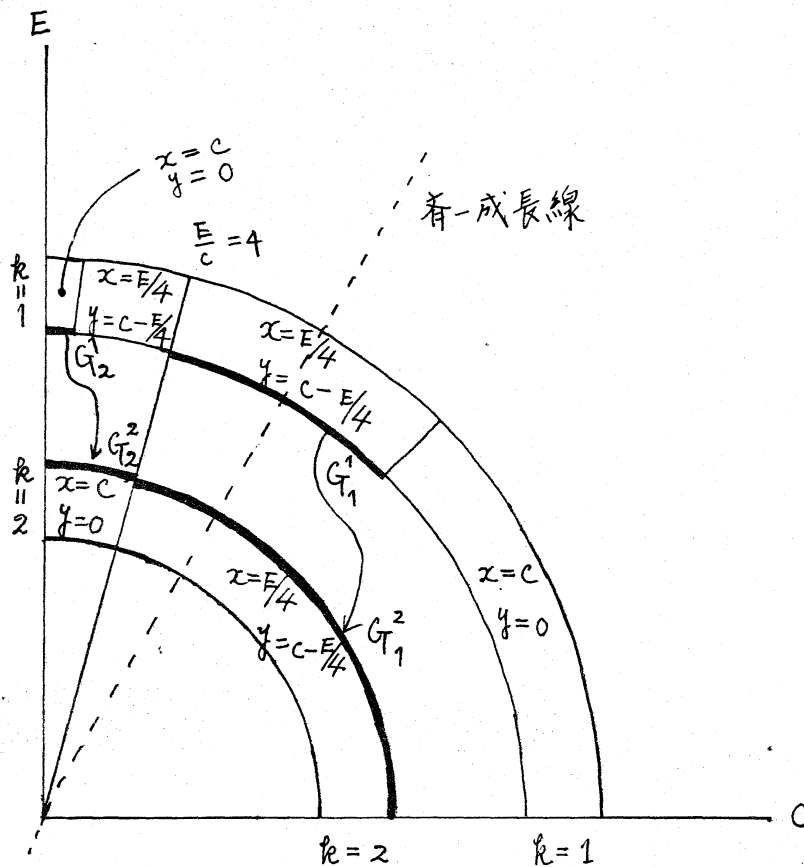
となる。このに、

$$q = P(B-A)' = (4P_C - 4P_E, 12P_E)$$

であり、 $P_C = 30$, $P_E = 5$ の場合には、

$$4P_C - 4P_E > 12P_E$$

が成立するから、 k 回目には明らかに $g \in G_1$ で前に述べたものと同じ形の退化現象が起っている。(最終回であるから退化現象が起ること自体は当然である)。 $k-1$ 回目以前のとりあつかいは面倒であるが、Kemeny & Snell [2] が与えに $k=2$ の場合の結果を図示すると次のようになる。



ここで、 $k=1$ 回目に $g \in G_1^1$ のとき、最適決定に対応して、 g は

$$g + g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \in G_1^2$$

に、 $g \in G_2^1$ のとき、最適決定に対応して、 g は

$g + g \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4, -4 \\ 0, 12 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} 5, -4 \\ 0, 1 \end{pmatrix} \in G_2^2$
 である。

ここで、行列 $\begin{pmatrix} 1, 12 \\ 1, -3 \end{pmatrix}$ の最大実固有値 (=3) に対応する固有ベクトル

が $(1, 2)$ であり、図上、 G_1^1, G_1^2 を貫いていることに注意しよう。

これは、この問題の解が才2期から才13期までの間たどった脊一成長線である。

そこで、数理経済学におけるターン・パイク理論とも考え合せてみると、この脊一成長線の附近に退化現象を起す集合があるのではなからうか？
 まにいま、才 k 回に於いて退化現象が起る集合を

$$D_k$$

とかき、最適決定が状態変数の、写像

$$J_k(g)$$

による移動という形で与えられるとき、上の退化現象は

$$g_1 \in D_1$$

$$g_2 = J_1(g_1) \in D_2$$

$$g_3 = J_2(g_2) \in D_3$$

...

$$g_{20} = J_{19}(g_{19}) \in D_{20}$$

という形で理解できないであろうか？ すなわち、退化現象のおこる集合上の‘滞留時間’という形でこの現象を説明することはできないだろうか？

文 献

- [1] Венцель, Е. С., «Элементы Динамического Программирования» Издательство «Наука», Москва, 1964.
- [1] 坂本 実, 森 俊夫訳《ダイナミック・プログラミング》
東京図書, 東京, 1965.
- [2] Kemeny & Snell «Mathematical Methods in the Social Sciences» Ginn and Company, 1962.
- [2] 甲田, 山本, 中島訳《社会科学における数学的モデル》培風館,
東京,
- [3] 藤川 洋一郎 《斉一経済成長》, 日本科学技術連盟, ORC委員会
会における報告, 1966-7-19.