数理解析研究所講究録
第 30 巻 1967 年 13-21

Morseの理論について

教育大 理 高橋恒郎

Morseの理論は二つの部分に分れている。一つは、多様体上に与えられた函数の臨界点と、多様体の位相構造との関係を与える理論であり、他方は、Riemann多様体上の測地線の理論である。この二つは勿論密接な関係があるが、ここでは測地線の理論にはふれない。

§1においては必要な言葉の定義と、Morse理論の主な結果を述べる。（定理等の証明はすべて省略した。）§2において簡単な例として2次元の輪環面上の特別な函数について考察してみた。

§1. 定義と定理.

Mをn次元の微分多様体とし、fをM上で定義された微分可能な函数とする。（ここで微分可能とは class C^∞ i.e すべての階数の偏導函数が存在するという意味で用いる）。

$\{u^1, u^2, \cdots, u^n\}$ をMの点pのまわりの局所座標系としたとき、

点 p において

(1) $$\frac{\partial f}{\partial u^1}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial u^2}=0,\quad \cdots,\quad \frac{\partial f}{\partial u^n}=0$$

が成り立つとき，点 p を f の臨界点（critical point）といい，臨界点において f のとる値を f の臨界値（critical value）という．

例えば，点 p において f が極大値，又は極小値をとるならば，p は f の臨界点である．

点 p が f の臨界点であるとき，p において

(2) $$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}\right)$$

なる行列を考える．これは n 次の正方行列で，これを点 p における f のヘッセの行列という．ヘッセの行列は座標系のとり方に依存するが，その負の固有値の数（重複もこめて）および階数は座標系に依存しないできまる．そこで，ヘッセの行列の負の固有値の数を臨界点 p の指標（index）といい，又ヘッセの行列が退化しないとき，p は正則な（non-degenerate）臨界点という．

次の定理は臨界点のまわりでの函数の変化の具合と，指標との関係を与えるだけでなく，Morseの理論の基礎になる定理である．

定理　1.（Morse の Lemma）　M の点 p が指標 λ の正則な臨界点ならば，p のまわりの局所座標系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ を適当にとって，p の座標は $(0, 0, \cdots, 0)$ で，しかも p の十分小さな近傍において，函数 f を

(3)
$$f = f(p) - (x^1)^2 - \cdots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \cdots + (x^n)^2$$

と表わすことが出来る．

この定理から直ちに次の事がわかる．

系　1.　正則な臨界点は孤立臨界点である．（i.e. 点 p を正則な臨界点とするとき，点 p の十分小さな近傍内には臨界点は存在しない）．

系　2.　正則な臨界点 p において，函数 f が極大値（又は極小値）をとるための必要十分条件は，p の指標が $n = \dim M$（又は 0）なることである．

さて，函数 f と実数 a に対して，M の部分集合 M^a を

$$M^a = f^{-1}(-\infty, a] = \{p \mid p \in M,\ f(p) \leq a\}$$

とする．$M^{-\infty}$ は空集合であり，M^{∞} は M 自身とする．

一般に位相空間 X に対し，X の k 次元のベッチ数を $R_k(X)$

（係数群は適当に一つ定めておく），又 X とその部分集合 A に対いて，X の A を法とする相対ベッチ数を $R_k(X, A)$ と書くことにする．

定理 2．a, b を $a<b$ なる実数と，$f^{-1}[a, b]$ $(= a \leqq f(p) \leqq b$ なる M の点 p の全体$)$ はコムパクトでしかも臨界点を含まないとする．このとき，M^a は M^b に微分同型で，特に

$$(4) \qquad \begin{cases} R_k(M^a) = R_k(M^b) \\ R_k(M^b, M^a) = 0 \end{cases} \qquad k = 0, 1, \cdots, n$$

である．

(4) は a から b までの間に臨界値が存在しないとき，M^a と M^b のベッチ数に変化がないことを示す．従ってベッチ数に変化がみられるのは，その間に臨界値が存在するときで，その場合は次の定理により示される．

定理 3．実数 a が臨界値で，a を臨界値にもつ臨界点は $p_1, p_2, \cdots, p_k$ でそれらはすべて正則で，指標は $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ とする．もし十分小さな $\varepsilon > 0$ をとったとき，$[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ 内には a 以外に臨界値はなく，$f^{-1}[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ はコム

とすると，$M^{a+\varepsilon}$ は $M^{a-\varepsilon}\cup e^{\lambda_1}\cup\cdots\cup e^{\lambda_k}$ と同じホモトピー型をもつ．特に

(5) $$R_k(M^{a+\varepsilon}) = R_k(M^{a-\varepsilon}\cup e^{\lambda_1}\cup\cdots\cup e^{\lambda_k}) \quad k=0,1,\cdots,n.$$

ここに，$M^{a-\varepsilon}\cup e^{\lambda_1}\cup\cdots\cup e^{\lambda_k}$ は，$M^{a-\varepsilon}$ に $e^{\lambda_1},\cdots,e^{\lambda_k}$ なる cell を attach したものである．（e^{λ} は λ 次元の cell ）．

一般に位相空間 X に対して

(6) $$R_k(X\cup e^{\lambda}, X) = \begin{cases} 1 & \text{if } k=\lambda \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つことから次の系を得る．

系． 定理 3 と同じ仮定のもとに，a を臨界値にもつような指標 λ の正則な臨界点の個数を $C_\lambda(a)$ とするとき，

(7) $$R_\lambda(M^{a+\varepsilon}, M^{a-\varepsilon}) \leqq C_\lambda(a)$$

が成り立つ．

この系と定理 3 より，M^a のベッチ数は a が段々と増大するにつれて，a が指標 λ の正則な臨界点の臨界値を追い越すたびに，増えるが，その増え方は，臨界点の個数以下である

（これは厳密な言い方ではない）ことがわかる。

以上の事と簡単な計算により次のMorseの不等式が得られる。

定理 4. Mがコムパクトな微分多様体で、fはM上の微分可能な函数で正則な臨界点だけをもつとする。指標λなる臨界点の個数をC_λとするとき、次の不等式が成り立つ。

(8) $$R_\lambda(M) \leqq C_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \cdots, n)$$

(9) $$\chi(M) = \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^\lambda C_\lambda$$

(10) $$\sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^k R_{\lambda-k}(M) \leqq \sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^k C_{\lambda-k} \qquad (\lambda = 0, 1, \cdots, n)$$

ここに$\chi(M)$は、MのEuler標数であって

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k R_k(M)$$

で与えられる。

以上がMorseの理論の概略であるが、定理4において仮定したように、函数fの臨界点はすべて正則であるという仮定を必要としたが、その点については次の二つの定理がある。

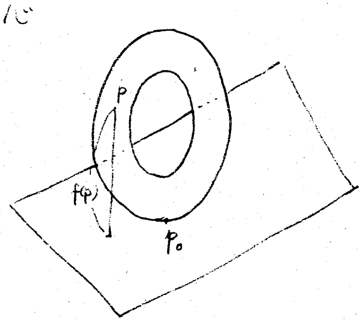
定理 5. 任意のn次元の微分多様体Mにおいて、正則な臨

界点しかもたず，しかも各任意の実数aに対してM^aがコンパクトになる様な微分可能な函数が存在する．

定理 6. M上の任意の微分可能な函数gに対して，もしgが有界ならば，正則な臨界点しかもたない函数で一様に近似出来る．

§2. 輪環面における例．

3次元ユークリッド空間内で輪環面を考える．簡単のために，半径bの円をその中心から$a\,(>b)$だけはなれた直線のまわりに回転して出来たものとする．これをMとするとMは2次元の微分多様体である．M上の一点p_0における接平面からM上の任意の点pまでの高さを$f(p)$としよう．



回転軸をy軸にとり，点$(a, 0, 0)$を中心とし半径bの円をxy−平面内に考え，これがy軸のまわりに回転したものとする．

このとき，Mは(u, v)を適当にとって

$$(1)\quad \begin{cases} x = (a + b\cos u)\cos v \\ y = b\sin u \\ z = (a + b\cos u)\sin v. \end{cases}$$

と表わすことが出来る．p_0として$(0, 0, -(a+b))$なる点を

とると，f は

(12) $$f(u, v) = (a + b\cos u)\sin v + a + b.$$

となる．

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -b\sin u\sin v, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = (a + b\cos u)\cos v$$

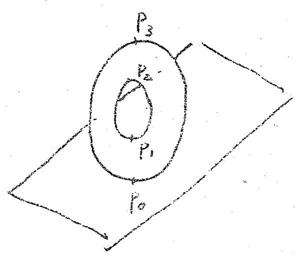
より臨界点を求めると，次の様な表を得る．

臨界点	(u, v)	(x, y, z)	$f(p)$	ヘッセの行列	指標
p_0	$(0, -\frac{\pi}{2})$	$(0, 0, -(a+b))$	0	$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$	0
p_1	$(\pi, -\frac{\pi}{2})$	$(0, 0, -(a-b))$	$2b$	$\begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$	1
p_2	$(\pi, \frac{\pi}{2})$	$(0, 0, (a-b))$	$2a$	$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$	1
p_3	$(0, +\frac{\pi}{2})$	$(0, 0, a+b)$	$2(a+b)$	$\begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$	2

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b\cos u\sin v & -b\sin u\cos v \\ -b\sin u\cos v & -(a + b\cos u)\sin v \end{pmatrix}$$

より各臨界点でのヘッセの行列，および指標は以上の表の様になる．従ってすべての臨界点は正則である．

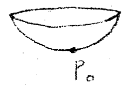
臨界点の位置は右の図の様になっている．



次に，c を実数としたとき，M^c の変化の様子をみてみよう．

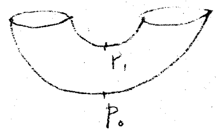
(1) $c < 0 = f(p_0)$ のとき M^c は空集合.

(2) $0 < c < 2b = f(p_1)$ のとき, M^c は



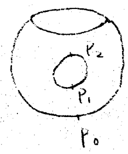
2-cell に同位相.

(3) $2b < c < 2a = f(p_2)$ のとき M^c は



円柱に同位相

(4) $2a < c < 2(a+b) = f(p_3)$ のとき, M^c は



円を境界にもつ genus 1 のコンパクトな曲面.

(5) $2(a+b) < c$ のとき $M^a = M$

以上の各々の場合のベッチ数を求めると次の表の様になり通り越した臨界点の指標が λ のとき, λ 次元のベッチ数が丁度 1 (臨界点の個数) だけ増していることがわかる。

c	$R_0(M^c)$	$R_1(M^c)$	$R_2(M^c)$
$c < 0$	0	0	0
$0 < c < 2b$	1	0	0
$2b < c < 2a$	1	1	0
$2a < c < 2(a+b)$	1	2	0
$2(a+b) < c$	1	2	1

この場合は $R_\lambda(M) = C_\lambda$ である.