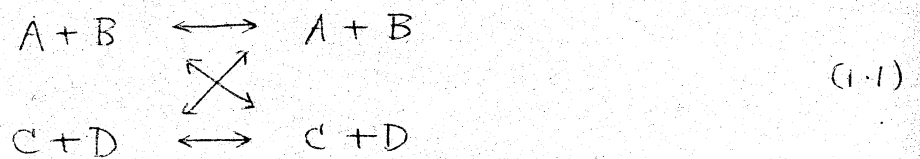


素粒子論における threshold effects

東大教養 藤井 保憲

§1 Introduction

原子核の反応の理論では，新しい channel が開ける energy (threshold energy) において elastic scattering cross section に anomaly が生ずるといふことが知られて¹⁾いる。もう少し具体的に書くと



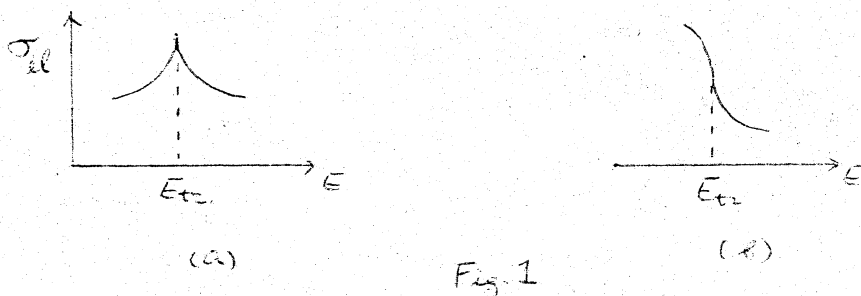
という反応で

$$m_A + m_B < m_C + m_D$$

とする。但し m_A は A という粒子の質量である。便宜上 A と B との系を channel 1, C と D との系を channel 2 と呼ぶことにする。又全エネルギー E に関して $E_{th} = m_A + m_B$,

$E_{t2} = m_C + m_D$ を夫々 elastic threshold energy, inelastic threshold energy と呼ぶ。 $E_{t1} < E < E_{t2}$ では elastic scattering $A+B \rightarrow A+B$ のみが起こり, $E > E_{t2}$ の場合 (1) に矢印で示したすべての過程が起こる, 特には $A+B \rightarrow C+D$ を production process 又は inelastic process と呼ぶ。 E のある中領域を通じて $A+B \rightarrow A+B$ を elastic scattering と呼ぶことにし, その cross section を σ_{el} と書くことにする。又 $A+B \rightarrow C+D$ の cross section を σ_{inel} と書く。

最初に記した anomaly とは次のようなものである。 C と D との間の relative motion の角運動量が 0 である (s state) 時には, σ_{el} が $E = E_{t2}$ における次の図のような反振舞を示す。



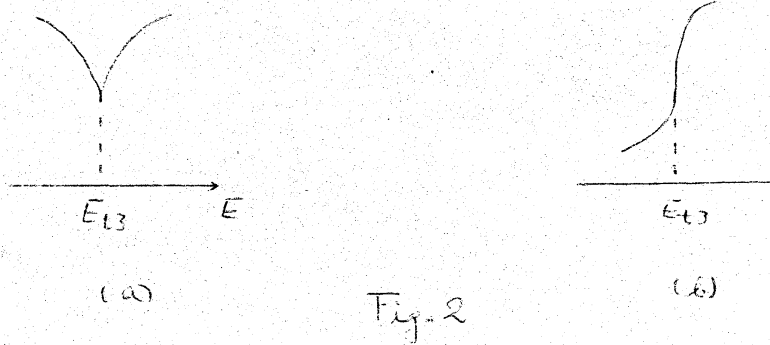
即ち $E = E_{t2}$ の一帯, 又は両側に於いて

$$\frac{d\sigma_{el}}{dE} = \pm \infty$$

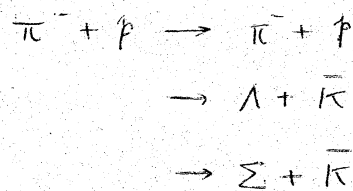
となる。特に (a) の場合は Wigner の cusp として知られている。もし更に σ_{inel} の channel E, F が有り,

$$E_{t3} = m_E + m_F > E_{t2}$$

であるならば、 σ_{tot} は $E = E_{t3}$ にはボルト、Fig. 1 の形の他に Fig. 2 のような形も示し得る。



素粒子の反応にボルトは、例えれば



のようたものが表えられ、 $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$ とする elastic scattering cross section に、 $\Lambda + \bar{K}$ 、又は $\Sigma + \bar{K}$ の threshold energy で anomaly が現れりことが予想され、これが Λ 、 Σ 、 \bar{K} などの spin, parity を決定するの役に立つと思われたことがあったが、^{2), 3)} 現在までに実験的に確立されてははいない多分、anomalous な部分の大きさが非常に小さいためであると思われる。(原核反応の例については Ref. 2 の引用を参照)

このような anomaly が現れりのは、散乱にボルト

unitarity や causality の結果である。現在までに種々の等式が示されているが、以下に示しているのは、bound state や resonance などの現象と統一して、散乱振幅の pole による表現する方法を紹介する。^{4), 5)} 便宜上、簡単な model や近似を用いるが、大部分の結果は非常に一般的なものである。又、channel は二つだけに限定する。

数式を書く上の繁雑さを避けるために $\hbar = c = 1$ の単位系を使う。従って energy 及び momentum は質量と同じ dimension を持ち、或る質量 m に伴う rest energy mc^2 及び mc を基準にして測られる。又長さ、時間は共に質量の逆の dimension を持ち、質量 m の Compton 波長 \hbar/mc 及び \hbar/mc^2 が基準になる。

§2. Nonrelativistic single channel scattering

非相対論的の Schrödinger 方程式に基づく散乱問題を考へる。Hamiltonian は

$$H = H_0 + V$$

と書かれる。ここで H_0 , V は夫々 free Hamiltonian, potential

energy である。無限遠点で $\sim e^{ikr}/r$ のように振舞う定常解の Fourier 成分 $\Psi_a^{(+)}(E_a)$ は

$$\Psi_a^{(+)}(E_a) = \Phi_a(E_a) + \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} V \Psi_a^{(+)}(E_a) \quad (2.1)$$

という積分方程式"を満たす。ここに $\Phi_a(E_a)$ は

$$H_0 \Phi_a(E_a) = E_a \Phi_a(E_a)$$

の解である。(2.1) が

$$H \Psi_a^{(+)}(E_a) = E_a \Psi_a^{(+)}(E_a)$$

を満たすことは容易に確かめられる。(2.1) の右2項の分母の ε は正の無限小量である。Green 函数 $(E_a - H_0 + i\varepsilon)^{-1}$ の singularity をこのように指定することにより、上に述べた outgoing wave の境界条件を満足させることができる。[註1]
 (2.1) を V について successive に展開し、又まとめ直すと

$$\Psi_a^{(+)}(E_a) = \left(1 + \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} V \right) \Phi_a(E_a) \quad (2.2)$$

を得る。散乱振幅 $T_{\ell a}$ は

$$T_{\ell a} = (\Phi_{\ell}, V \Psi_a^{(+)})$$

により定義される。(2.2) の左から $\Phi_{\ell}^*(E_{\ell}) V$ をかけ、更に右2項に H の (H_0 でない) 固有状態で張られた完全系を挿入すると

$$T_{ba} = V_{ba} + \sum_c \frac{T_{bc} (T^\dagger)_{ca}}{E_a - E_c + i\epsilon} \quad (2.3)$$

を得る。但し

$$V_{ba} = (\Phi_b, V \Phi_a)$$

である。実際に計算する散乱振幅にはおなじく $E_a = E_b \equiv E$ とおくので

$$T_{ba}(E) = V_{ba}(E) + \sum_i \frac{y_{i ba}}{E - \lambda_i} + \int_{E_t}^{\infty} \frac{y_{ba}(E')}{E - E' + i\epsilon} dE' \quad (2.4)$$

となる。こゝで H の固有状態は $E < E_t$ に discrete eigenstate (eigenvalue λ_i) を持ち、 $E \geq E_t$ では continuous spectrum (散乱状態) を持つとした。前者は bound state に対応し、(2.4) の才2項を与え、後者は散乱状態で、(2.4) の才3項を与える。[(2.3)の才2項の \sum_c を積分でおきかえた。] 以後、特定の部分波のみを考えることが多いので、suffices a, b を書かないことにする。

$$\frac{1}{x + i\epsilon} = \frac{P}{x} - i\pi \delta(x) \quad (2.5)$$

と11の關係 [P は Cauchy's principal value] を使えば、(2.4) の real part と imaginary part とを分けることができる。

$$\operatorname{Re} T(E) = V(E) + \sum_i \frac{\gamma_i}{E - \lambda_i} + P \int_{E_t}^{\infty} \frac{\gamma(E')}{E - E'} dE', \quad (2.6a)$$

$$\operatorname{Im} T(E) = -\pi \gamma(E) \theta(E - E_t). \quad (2.6b)$$

ここで $\theta(x)$ は

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

で与えられる step function である。又 $V(E)$, γ_i , $\gamma(E)$ 等はすべて real である。(2.6b) を (2.6a) に代入すれば

$$\operatorname{Re} T(E) = V(E) + \sum_i \frac{\gamma_i}{E - \lambda_i} - \frac{P}{\pi} \int_{E_t}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} T(E')}{E - E'} dE' \quad (2.7)$$

を得るが、これは先の複素散乱振幅に関する Kramers-Kronig の関係式として知られるものと同じ形であり、原子核、素粒子論においてこの分散式として非常に有用である。

さて (2.4) を用いて、 $T(E)$ を complex energy z に解析接続することができ。即ち

$$T(z) = V(z) + \sum_i \frac{\gamma_i}{z - \lambda_i} + \int_{E_t}^{\infty} \frac{\gamma(E')}{z - E'} dE' \quad (2.8)$$

で与えられる $T(z)$ を考え、物理的な散乱振幅は

$$T(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} T(E + i\epsilon)$$

なる boundary value であると考えるのである。(2.8) から $T(z)$ の singularities はどんなものかが判る。

- (i) $V(z)$ の特異点 *singularities*. これは一般に $E < 0$ における *poles* 又は *cut* である。
- (ii) λ_0 における *pole*. [実軸上]
- (iii) 実軸上 $E_0 \leq E < \infty$ における *cut*. これは普通 *unitarity cut* (又は *right-hand cut*) と呼ばれている。

又 (2.5) から

$$[T(z)]^* = T(z^*) \quad (2.7)$$

という関係が得られる, これは *reality condition* と呼ばれている。

§3. Single channel scattering in field theory

相対論的な場の理論においては, 基礎になる方程式が前節の場合のように簡単ではない。しかし一見甚だ異なった方法 (例えば "Low 方程式"⁶⁾, Lehman-Symanzik-Zimmerman の方法⁷⁾) によっても, 散乱振幅に因しては (2.4) と非常によく似た表示が得られる。こゝでは (2.4), 又はその拡張である (2.5), (2.7) 等はそのまま受け継がれるものとして以後の話

を進めることにする。実際、素粒子論では、(2.4)等を厳密に導くことができない(又は基礎方程式がない!)場合でも、(2.4)等のような解析的な性質だけは正しいと仮定して、むしろそれを一つの基礎方程式の如きものとみなすことがある。

相対論的な素粒子の反応では2つの粒子の間の質量差や spin 等のために、実はもう少し複雑な singularities が現れることが多い。しかしこの稿の中心課題である threshold 附近の anomaly は、そのような事情によつては余り左右されないと考えられるので、以後はさういふ複雑なことの現れない場合——二つの同じ質量の spinless particles の散乱——のみを考えることにする。又散乱振中を部分波に分けて、 $l=0$ の状態 (s 波) の振中のみを考える。

素粒子論における慣用に従つて幾つかの notation を導入する。前節で用いた energy E の代りに相対論的に不変な S という量を考える。これは二粒子の不変質量 (= 重心系での全エネルギー) を W としてその自乗に等しい。

$$S = -(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = W^2.$$

粒子の質量を μ とすると、threshold は

$$S = S_1 \equiv (2\mu)^2 = 4\mu^2$$

に相当する。 $S \geq S_1$ に對して S 波の散乱振中 $T(S)$ は

$$T(s) = \frac{1}{P(s)} e^{i\delta(s)} \sin \delta(s) \quad (3-1)$$

の形で与えられる。ここで $\delta(s)$ は散乱の phase shift であり、
elastic である限り real である。又

$$P(s) \equiv \sqrt{1 - \frac{s_1}{s}} = \frac{2k}{W} \quad (3-2)$$

は invariant phase volume である。

$$k = \sqrt{\frac{s}{4} - \mu^2} = \frac{1}{2} \sqrt{s - s_1} \quad (3-3)$$

は重心系における relative momentum である。 $s \approx s_1$ である

は

$$P(s) \approx \frac{k}{\mu}, \quad \text{for } s \approx s_1 \quad (3-4)$$

となり、 $P(s)$ は大体 momentum に比例する。以下 threshold
附近の振舞を調べる際には、この形をよく用いる。散乱の

cross section $\sigma(s)$ は

$$\sigma(s) = \frac{8\pi}{k^2} \sin^2 \delta(s) = 8\pi \frac{4}{s} |T(s)|^2 \quad (3-5)$$

で与えられる。 threshold の近くでは

$$\sigma(s) \approx \frac{8\pi}{\mu^2} |T(s)|^2, \quad \text{for } s \approx s_1 \quad (3-6)$$

である。又 $s \geq s_1$ では δ が real であることを用いれば

(3-1) より

$$\begin{aligned} \text{Im } T(s) &= \rho^{-1} \sin^2 \delta(s) \\ &= \rho |T|^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$= \frac{kW}{16\pi} \sigma \quad (3.7')$$

$$\approx \frac{\mu}{8\pi} k\sigma \quad (s \approx s_1) \quad (3.7'')$$

を得る。又、(3.7)より

$$\text{Im } T^{-1} = -\rho \quad \text{for } s \geq s_1 \quad (3.8)$$

を得る。これは $\delta = \text{real}$ の結果を最も簡単に表現したものであり、unitarity relation. と呼ばれている。

さて (2.8) に対応して

$$T(z) = V(z) + \sum_i \frac{\gamma_i}{z - \lambda_i} + \int_{s_1}^{\infty} \frac{\gamma(s')}{z - s'} ds' \quad (3.9)$$

を満たす $T(z)$ を考え、実際の $T(s)$ は

$$T(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} T(s + i\epsilon) \quad (3.10)$$

なる boundary value として得られるものとする。 $T(z)$ の singularities を図示すると Fig. 3 のようになる。又 reality

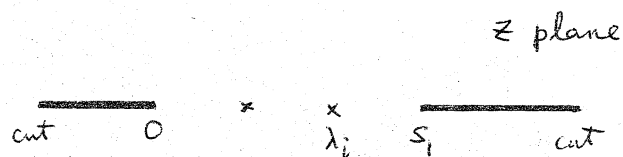


Fig. 3

condition

$$[T(z)]^* = T(z^*) \quad (3.11)$$

も満たされておるとする。[これは元来 time reversal invariance から出てくるものである]

(3.9) から $T^{-1}(z)$ についても同様な表現が得られる。

$$T^{-1}(z) = U(z) + \sum_i \frac{\hat{\gamma}_i}{z - \hat{\lambda}_i} + \int_{s_1}^{\infty} \frac{\hat{\gamma}(s')}{z - s'} ds' \quad (3.12)$$

ここで $\hat{\lambda}_i$, $\hat{\gamma}_i$ は (3.9) の λ_i , γ_i とは全く別である。以後 threshold 付近での T のふるまいを調べるのが主な目的であるので、left-hand cut ($s \leq 0$) からの寄与については、これを無視することにする。再び (3.11) によると

$$\text{Im} T^{-1}(s) = \frac{1}{2i} [T^{-1}(s+i\epsilon) - T^{-1}(s-i\epsilon)] \quad (3.13)$$

であるが、これ以上述べたように left-hand cut を無視する場合には、unitarity cut における gap に他ならない。

(3.12) に $z = s \pm i\epsilon$ を代入し、(2.5) から得られた公式

$$\frac{1}{s - s' + i\epsilon} - \frac{1}{s - s' - i\epsilon} = -2\pi i \delta(s - s')$$

を使えば

$$(3.13) = -\pi \hat{\gamma}(s) \theta(s - s_1)$$

を得る。これを unitarity relation (3.8) と比べると

$$\hat{\gamma}(s) = \frac{1}{\pi} f(s)$$

を得、従つて (3.12) は

$$T^{-1}(z) = U(z) + \sum_i \frac{\tilde{\gamma}_i}{z - \tilde{\lambda}_i} + \frac{1}{\pi} \int_{s_1}^{\infty} \frac{\rho(s')}{z - s'} ds' \quad (3.14)$$

となる。[註2] 従つて gap の値は

$$T^{-1}(s+i\varepsilon) - T^{-1}(s-i\varepsilon) = -2i\rho(s)\Theta(s-s_1) \quad (3.15)$$

である。

こゝで $\rho(s)$ という函数も複素数の s に拡張しておくのが便利である。但し (3.4) に相当する簡略化を行つてしまひ

$$\rho(z) = \frac{1}{2\mu} (z - s_1)^{1/2} \quad (3.16)$$

とする。実際の $\rho(s)$ はやはり boundary value として

$$\rho(s) \equiv \rho(s+i\varepsilon) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{s-s_1} > 0 \quad \text{for } s \geq s_1 \quad (3.17a)$$

で与えられる。又、

$$\rho(s-i\varepsilon) = -\frac{1}{2\mu} \sqrt{s-s_1} < 0 \quad \text{for } s \geq s_1 \quad (3.17b)$$

である。一方 $s \leq s_1$ に対しては

$$\rho(s) = \rho(s+i\varepsilon) = \rho(s-i\varepsilon) = i \frac{1}{2\mu} \sqrt{s-s_1} \quad \text{for } s \leq s_1 \quad (3.18)$$

となる。従つて gap は

$$\rho(s+i\varepsilon) - \rho(s-i\varepsilon) = 2\rho(s)\Theta(s-s_1) \quad (3.19)$$

で与えられる。一般に

$$[p(z)]^* = -p(z^*) \quad (3.20)$$

を満足す。

次に

$$K^{-1}(z) \equiv T^{-1}(z) + ip(z) \quad (3.21)$$

によつて $K(z)$ なる函数を導入する。これによつては (3.15),

(3.19) から

$$K^{-1}(s+i\epsilon) = K^{-1}(s-i\epsilon) \quad \text{for all } s \quad (3.22)$$

が示される。即ち $K^{-1}(z)$ に W (unitarity) cut が無い。従つて

$K(s) = K(s+i\epsilon) = K(s-i\epsilon)$ は real である。 (3.1) を (3.21)

に代入してみると

$$K^{-1}(s) = p \frac{e^{-i\delta}}{\sin \delta} + ip = p \cot \delta \quad \text{for } s \geq s_1 \quad (3.23)$$

なることが判る。これは散乱の理論におつて K 行列として知ら

れてゐる量である。 T が outgoing wave solution に対応

するのに対応して K は standing wave solution に対応するもの

のである。 K を使つて

$$T^{-1}(z) = K^{-1}(z) - ip(z) \quad (3.24)$$

と書けるが、この式は、 $T(z)$ を analytic 部分と、cut を持

つ部分に分けてゐる点で便利である。

さて

$$T_{II}^{-1}(z) \equiv T^{-1}(z) + 2ip(z) \quad (3.25)$$

よって $T_{II}(z)$ という函数を定義する。(3.24) によれば

$$T_{II}^{-1}(z) = K^{-1}(z) + iP(z) \quad (3.26)$$

とも書ける。これについては, (3.15), (3.19) を使って

$$T^{-1}(s \pm i\varepsilon) = T_{II}^{-1}(s \mp i\varepsilon) \quad \text{for } s \geq s_1 \quad (3.27)$$

なることが確かめられる。即ち $T_{II}(z)$ は, unitarity cut を横切つて $T(z)$ を σ_{II} Riemann 面に解析接続した函数である。

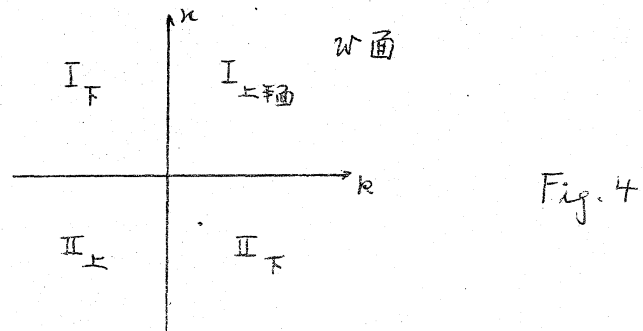
unitarity cut によつてつながれる二枚の面を一枚に寫像することができ。それには (3.3) により, momentum k を complex にすればよい。

$$w = k + i\kappa \equiv \frac{1}{2}(z - s_1)^{1/2} \quad (3.28)$$

(3.4) 又は (3.16) の近似ではこれは $\mu P(z)$ に他ならない。

(3.24) に見るように $T^{-1}(z)$ の cut は結局 $P(z)$ の cut に他ならないから, w の函数と考えると T には unitarity cut が無い。

z 面と w 面との関係を図示すると次図のようになる。



w 面の原素は $s = s_1$ に対応し, 実軸, 虚軸は夫々 $s \geq s_1$, 及び $s \leq s_1$ に対応する。(3.22) は $K^{-1}(z)$ が w^2 の函数であること

と同等である。T を w の函数と考えると、 $T(z)$ と $T_{II}(z)$ とを
まとめ

$$T^{-1}(w) = K^{-1}(w^2) - i \frac{w}{\mu} \quad (3.29)$$

と書くことができる。

$K^{-1}(z)$ は $z \approx s_1$ で正則だから

$$K^{-1}(z) \approx (\mu a)^{-1} + \frac{1}{8\mu} (z - s_1) \gamma \quad (3.30)$$

のように Taylor 展開することができる。これは又 (3.29) を使
つて

$$K^{-1}(w^2) \approx (\mu a)^{-1} + \frac{1}{2\mu} w^2 \gamma \quad (3.31)$$

と書くこともできる。(3.23) を参照すると

$$k \cot \delta \approx a^{-1} + \frac{1}{2} k^2 \gamma \quad \text{for } s \geq s_1 \quad (3.32)$$

となるが、これは核子-核子散乱その他で昔から知られてい
る effective range 展開に他ならず、 a , γ は夫々 scattering
length, effective range と呼ばれている。又 (3.24), (3.30) から

$$T(s_1) = \mu a \quad (3.33)$$

なることが判る。以下、この展開で扱える若干の例を挙げて
みる。

Zero-range 近似 ($\gamma = 0$)

s が threshold s_1 に非常に近い時には effective range
を 0 とおいてよいであろう。このとき (3.32) は

$$k \cot \bar{\delta} \approx \frac{1}{a} \quad (3.34)$$

となる。 $\bar{\delta}$ が充分小さい範囲では

$$\bar{\delta} \approx ka \quad (3.35)$$

である。このとき, (3.29) から

$$\mu T^{-1} \approx a^{-1} - i\omega \quad (3.36)$$

を得る。この式から明かなように T は

$$\omega = -ia^{-1} \quad (3.37)$$

に pole を持つ。 $a < 0$ (で且つ $|a|$ が充分大きければ) ならば, これは w 面の正虚軸上にある。或は z 面の実軸上の

$$s = s_B \equiv s_1 - \frac{4}{a^2} < s_1 \quad (3.38)$$

なる点の pole と言つてもよい。これは bound state を表わす。

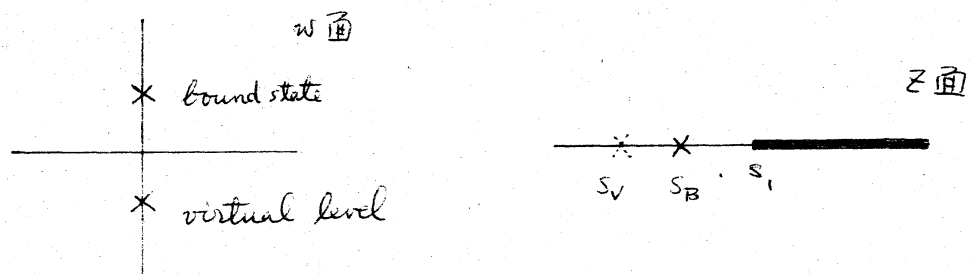


Fig. 5

$a > 0$ (且つ $|a|$ が大きければ) であれば, pole は w 面の負の虚軸上にあり, 又 z 面では z 面の実軸上

$$s = s_V \equiv s_1 - \frac{4}{a^2} \quad (3.39)$$

での pole に対応する。これは virtual level を表わすと言われているが, その物理的意味は次のようなものである。

もしある程度の引力があつたその結果 bound state ができている時, potential の引力の強さを次々に弱くして行くと binding energy が減少する。その結果 S_B における pole は実軸上を s_1 に向つて右の方へ移動する。ω 面では, これに対応して pole が正虚軸上を下方へ移動する。pole が丁度原点 ($\omega = 0$, 又は $s = s_1$) に達したときの状態を zero-energy bound state と呼び, $a = \infty$ である。更に引力を弱めると, ω 面での pole は虚軸上をそのまま下方へ移動して, 負虚軸上の pole となるのである。従つてそのような pole に対応する virtual level とは, bound state を作りには少し不足してゐる引力に対して実軸上の或る種の“状態”と考えればよい。

Effective range 近似 ($\gamma \neq 0$)

特に $\gamma < 0$, $a > 0$ ならば, $\delta = 90^\circ$, $d\delta/ds > 0$ となるような s の値 s_R が存在する。これは共振状態 (resonance) と呼ばれ, (3.32) は

$$k \cot \delta \approx -\frac{2k_R}{\gamma}(s - s_R), \quad (3.40)$$

$$\left(\gamma > 0, \quad k_R = \frac{1}{2} \sqrt{s_R - s_1} \right)$$

の形に書かれる。resonance 付近での cross section の振舞は次のようになる。

$$\sigma = \frac{8\pi}{k^2} \sin^2 \delta = 8\pi \frac{1}{(k \cot \delta)^2 + k^2} \quad (3.41)$$

に (3.40) を代入して

$$\sigma \approx \frac{8\pi}{k_n^2} \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}{(s - s_n)^2 + \left(\frac{\gamma}{2} \frac{k}{k_n}\right)^2} \quad (3.42)$$

を得るが、これがいわゆる Breit-Wigner の one-level formula である。これを s について plot すると図のようになる。 σ が maximum $\approx 8\pi/k_n^2$ の半分になる s は $s \approx s_n \pm \frac{\gamma}{2}$ である。

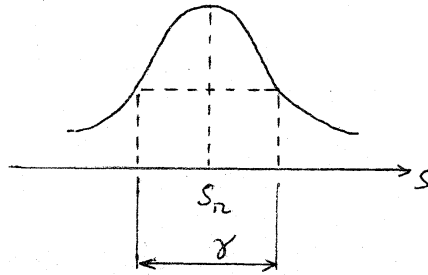


Fig. 6

えられるので、 γ はこの resonance の巾と呼ばれる。[Breit-Wigner formula は普通 s ではなく、energy W について書かれ、 Γ も、 $W \approx W_n \pm \frac{\Gamma}{2}$ なる所で cross section が maximum の半分になる energy として定義される。上に導入した γ とは $\gamma = \Gamma W_n = \Gamma \sqrt{s_n}$ の関係になっている。]

所で (3.31) を参照すれば (3.40) は

$$k^{-1}(w^2) \approx -\frac{8k_n}{\gamma\mu} (w^2 - k_n^2) \quad (3.43)$$

に等しいことが判る。或は又 (3.29) を用いて

$$\mu T^{-1}(\omega) \approx -\frac{\gamma k_n}{\gamma} (\omega^2 - k_n^2) - i\omega \quad (3.44)$$

を得るが、これは ω に関する二次式である。従つて (3.44) の右辺

$$\omega = -i \frac{\gamma}{16 k_n} \pm \sqrt{k_n^2 - \left(\frac{\gamma}{16 k_n}\right)^2} \quad (3.45)$$

に zero を持つ。その位置は Fig. 7 に示した通りである。

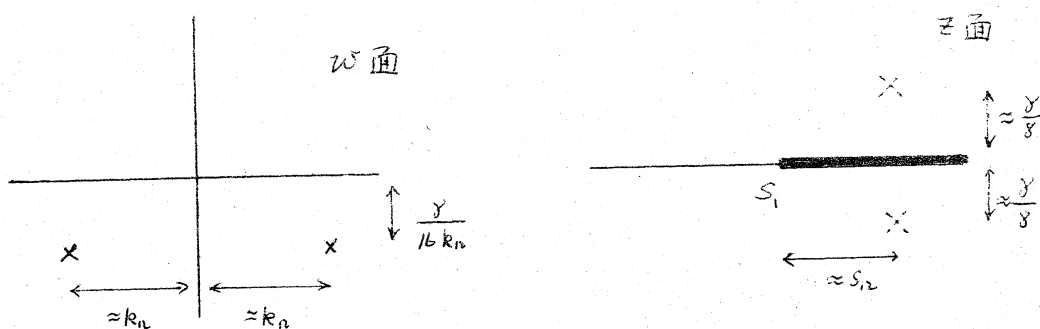


Fig. 7

ω 面では下平面上に左右の一对、従つて z 面では II 面の complex conjugate pair である。中が充分小さければ (3.45) は

$$\omega \approx -i \frac{\gamma}{16 k_n} \pm k_n \quad (3.46a)$$

となる。これに対応する z の II 面の pole の位置は

$$z \approx s_n \pm i \frac{\gamma}{8} \quad (3.46b)$$

となる。即ち z の II 面の pole の位置は、その real part が resonance energy (squared) s_n を表わし、実軸からの距離が

中に比例するのである。計り中では、この resonance が 2 つの
 粒子に decay する確率に比例するから zero にはなり得ない。
 このことから左面の unitarity cut 上 (実軸上) には pole が現
 れず、必ず complex conjugate pair となることが推察される。
 [註3].

§4 Two channel scattering

質量 μ_1 の二つの spinless particles の S state の系を
 channel 1, 質量 $\mu_2 (> \mu_1)$ の同様な系を channel 2 とす
 る。夫々の threshold は

$$s_1 = 4\mu_1^2, \quad s_2 = 4\mu_2^2$$

である。channel i から channel j への散乱の振幅を T_{ij} と
 書くとき, time reversal invariance から

$$T_{12} = T_{21} \quad (4.1)$$

が示される。これらの T_{ij} を matrix の形で

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

と書くことにする。(3.8) に対応して unitarity は

$$\partial_m T^{-1}(s) = -B(s) \quad (4.3)$$

の如く一般化される。但し、左辺の ij element は逆行列 T^{-1} の ij element であつて、 $(T_{ij})^{-1}$ ではない。右辺の B は

$$B(s) = \begin{pmatrix} P_1(s) \theta(s-s_1) & 0 \\ 0 & P_2(s) \theta(s-s_2) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

で与えられる。(4.3) が実際に unitarity の条件であることは次のようにして判る。(4.3) は

$$\partial_m T = T^* B T = T B T^* \quad (4.5)$$

と同等であるが、例之はこれの 11 element をとると

$$\partial_m T_{11} = B_1 |T_{11}|^2 + B_2 |T_{12}|^2 \quad (4.6)$$

となる。こゝで (3.5) に代へして

$$|T_{11}|^2 = \frac{s}{32\pi} \sigma_{el}(s) \quad \text{for } s \geq s_1 \quad (4.7)$$

であり、同様に

$$|T_{12}|^2 = \frac{s}{32\pi} \frac{k_1}{k_2} \sigma_{inel}(s) \quad \text{for } s \geq s_2 \quad (4.8)$$

である。こゝで

$$k_i = \frac{1}{2} \sqrt{s - s_i} \quad (4.9)$$

は squared total energy s に對する channel i の relative momentum である。又 total cross section σ_{tot} は

$$\sigma_{tot} = \begin{cases} \sigma_{el} & \text{for } s_1 \leq s \leq s_2 \\ \sigma_{el} + \sigma_{inel} & \text{for } s \geq s_2 \end{cases}$$

であるから, 結局 (4.6) は

$$\text{Im } T_{11} = \frac{1}{16\pi} k_1 W \sigma_{tot} \quad (4.10)$$

に他ならず, (3.7') の直接の拡張である。

さて今度は unitarity cut が二つある。一つは $P_1(s)$ に由来して実軸上 s_1 から右に存在するものであり, 他の一つは $P_2(s)$ に基づいて, 実軸上 s_2 から右にある。 $s \geq s_2$ では二つの cuts は重なっている。(3.21) 又は (3.24) と同様にして matrix の K を

$$T^{-1} = K^{-1} - iP \quad (4.11)$$

によって導入すれば K は何れの cut も持たないことが判る。

ここで

$$P(s) = \begin{pmatrix} P_1(s) & 0 \\ 0 & P_2(s) \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

である。(4.1) を参照すれば

$$K_{12} = K_{21} \quad (4.13)$$

を得るから, 結局 $K(s)$ は real symmetric である。

さて (3.25) に対応して

$$T_{II}^{-1}(z) = T^{-1}(z) + 2i \begin{pmatrix} P_1(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

$$= K^{-1}(z) + i \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{pmatrix} \quad (4.14')$$

を導入すると

$$\mathbb{T}_{II}^{-1}(s \pm i\varepsilon) = \mathbb{T}^{-1}(s \mp i\varepsilon) \quad \text{for } s_1 \leq s \leq s_2 \quad (4.15)$$

なることが示される。これは $s_1 \leq s \leq s_2$ の "elastic cut" の上で始めに序之いた面 (physical sheet) につながる sheet II への解析接続を意味する。次に $s \geq s_2$ の "inelastic cut" の上で physical sheet につながる sheet III を序之ると、 $\mathbb{T}(z)$ の解析接続は

$$\mathbb{T}_{III}^{-1}(z) = \mathbb{T}^{-1}(z) + 2iP(z) \quad (4.16)$$

$$= K^{-1}(z) + iP(z) \quad (4.16')$$

で与えられる。即ち

$$\mathbb{T}_{III}^{-1}(s \pm i\varepsilon) = \mathbb{T}^{-1}(s \mp i\varepsilon) \quad \text{for } s \geq s_2 \quad (4.17)$$

である。更に sheet III に elastic cut 上でつながる面は、sheet II に inelastic cut 上でつながる面に等しいことが判る。これを sheet IV と呼ぶことにすると

$$\mathbb{T}_{IV}^{-1}(z) = K^{-1}(z) + i \begin{pmatrix} -P_1(z) & 0 \\ 0 & P_2(z) \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

を得る。即ち

$$\mathbb{T}_{IV}^{-1}(s \pm i\varepsilon) = \begin{cases} \mathbb{T}_{III}^{-1}(s \mp i\varepsilon) & \text{for } s_1 \leq s \leq s_2, \\ \mathbb{T}_{II}^{-1}(s \mp i\varepsilon) & \text{for } s \geq s_2 \end{cases} \quad (4.19)$$

とわかるわけである。図示すると次のようになる。⁸⁾

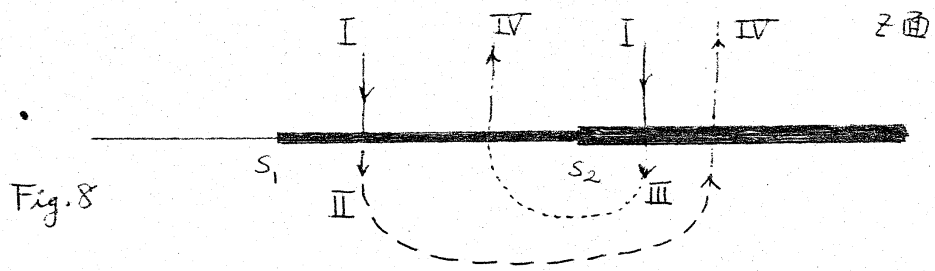


Fig. 8
 §3 におけると同じように, complex momentum の面に
 移ると, 4枚の面が2枚に寫像される。例えは channel 2 の
 momentum を complex にして

$$w_2 = \frac{1}{2}(z - s_2)^{1/2} \quad (4-20)$$

を独立変数に之らふと, w_1 は

$$w_1^2 = w_2^2 + \frac{s_2 - s_1}{4} \quad (4-21)$$

で表わされ, z 面と w_2 面との関係は図のようになる。

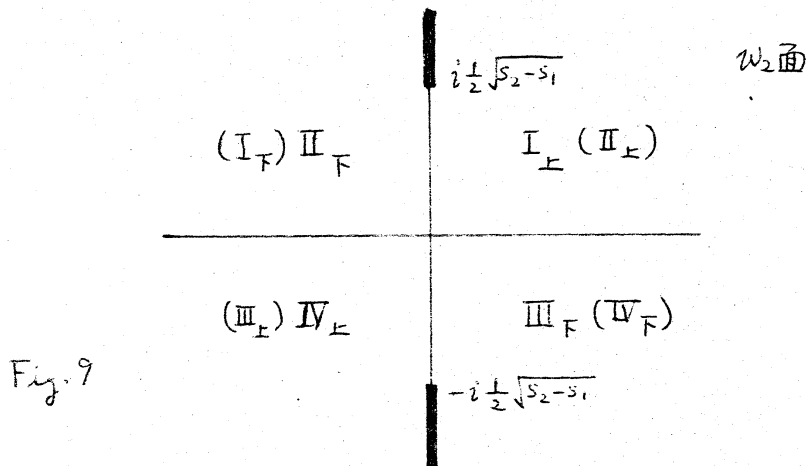


Fig. 9
 $w_2 = 0$ は $z = s_2$ に対応し, 実軸は $z = s \geq s_2$ に, 虚軸は
 $z = s \leq s_2$ に対応する。又 $w_2 = \pm i \frac{1}{2} \sqrt{s_2 - s_1}$ は $z = s_1$ に

対応する。これらの矢から座標上を走る cuts によって面は 2 枚になつてゐるが、 w_2 の各象限で () の中に示したのは、この意味でのオ 2 の面に関するものである。図に見るよゝに、オ 1 の面だけでは、その面の 4 枚の面をすべて言ひてゐる。オ 2 の面は、その面での上半面又は下半面を補うに過ぎない。従つて簡単な議論においては、オ 1 の面のみ考慮すれば充分であることが多い。どうしても 1 枚の面に寫像したときには

$$w_1 = \frac{1}{4} \sqrt{s_2 - s_1} \left(\omega + \frac{1}{\omega} \right) \quad (4.22)$$

と 11 変数 ω を使えばよい。⁹⁾ 複素 ω 面と s 面との関係は

Fig. 10 に示す通りである。

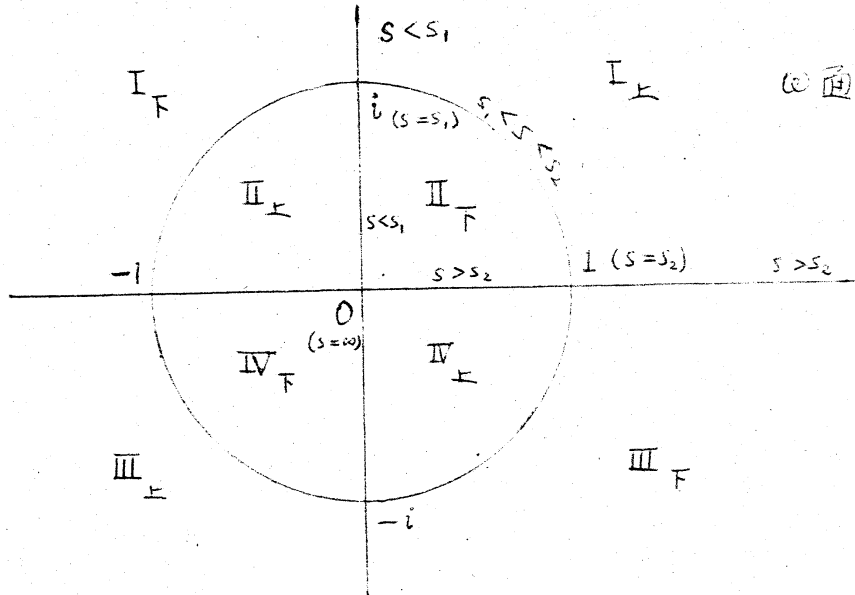


Fig. 10

前に述べたよゝに K は symmetric real function である。従つて¹⁰⁾

$$K^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha(z)}{\mu_1} & \frac{\gamma(z)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \\ \frac{\gamma(z)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} & \frac{\beta(z)}{\mu_2} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

と書くと, $\alpha(z)$ 等は z の real function である。 ($[\alpha(z)]^* = \alpha(z^*)$)

これを (4.11) に代入すると

$$T^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha(z) - i\omega_1}{\mu_1} & \frac{\gamma(z)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \\ \frac{\gamma(z)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} & \frac{\beta(z) - i\omega_2}{\mu_2} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

となる。これより

$$T(z) = \frac{1}{D(z)} \begin{pmatrix} \mu_1 (\beta(z) - i\omega_2) & -\sqrt{\mu_1 \mu_2} \gamma(z) \\ -\sqrt{\mu_1 \mu_2} \gamma(z) & \mu_2 (\alpha(z) - i\omega_1) \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

を得る。但し

$$D(z) = (\alpha(z) - i\omega_1)(\beta(z) - i\omega_2) - \gamma^2(z) \quad (4.26)$$

である。もし $D(z)$ が "zero を持つば", それは T_{ij} のすべて
の element に共通に現れる pole である。

$\alpha(z)$ 等は, ω_1^2 又は ω_2^2 の函数の筈である。従つて前
述の 4 枚の sheets における $T(z)$ を, 一般に次のように簡
単に表わすこともできる。今 T を ω_1 と ω_2 の函数と考へて

$$T(z) = F(\omega_1, \omega_2) \quad (4.27)$$

と書くとき

$$\left. \begin{aligned} T_{II}(z) &= F(-w_1, w_2), \\ T_{III}(z) &= F(-w_1, -w_2), \\ T_{IV}(z) &= F(w_1, -w_2) \end{aligned} \right\} \quad (4.27')$$

と表わすことができる。

inelastic threshold - 近接での zero-range 展開

§3 に於いて行なった zero-range 近似は, $K(z)$ を constant とおくことと同等であると言えることができる。(例として (3.30) を見よ。) これに対応して $z \approx s_2$ では $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ をすべて real constant とおいてやる。又 channel L の momentum k

$$w_1 \approx \frac{1}{2} \sqrt{s_2 - s_1} \equiv \bar{k}_1 \quad (4.28)$$

のように constant とおく。このとき (4.26) は

$$D \approx -i(\alpha - i\bar{k}_1)(w_2 - \zeta) \quad (4.29)$$

の形になる。但し

$$\zeta = \xi + i\eta = -i \left(\beta - \frac{\gamma^2}{\alpha - i\bar{k}_1} \right) \quad (4.30)$$

で与えられる。又は

$$\xi = -\gamma^2 \frac{\bar{k}_1}{x^2 + \bar{k}_1^2} < 0 \quad (4.31)$$

$$\eta = -\beta + \gamma^2 \frac{x}{x^2 + \bar{k}_1^2} \quad (4.32)$$

2' がある。 $\Pi(z)$ のすなわち z の element は $\omega_2 = \xi$ に於いて共通の pole を持つ。 (4.31) に見るように $\xi < 0$ であるから、この pole は sheet II 又は sheet IV にはのみ現れることが判る。

[Fig. 9 参照] sheet I に現れないのは当然であるが、

sheet III に現れないのは、zero-range 近似のためである。

(4.29) を (4.25) に代入すれば

$$T_{22} \approx i \frac{\mu_2}{\omega_2 - \xi} \quad (4.33)$$

を得る。そこで (3.33) に従って

$$\mu_2(a_2) = T_{22}(s_2) \quad (4.34)$$

によって channel 2 の scattering length a_2 を定義すると、これは明らかに complex である。

$$a_2 \equiv k + ic = -i \frac{1}{\xi} \quad (4.35)$$

となる。又は

$$\xi = -i a_2^{-1} \quad (4.36)$$

と書くこともでき、これは丁度 (3.37) に対応する。(4.35)は

又

$$\epsilon = \frac{-\gamma}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{-\xi}{\xi^2 + \eta^2} \quad (4.34)$$

と書いてもよいが、(4.31) から

$$\epsilon > 0 \quad (4.35)$$

を得る。これは実は unitarity から導かれる非常に一般的な関係である。即ち (4.5) の 22 element をとつて $s = s_2$ とおけば

$$\mu_2 \epsilon = \text{Im} T_{22}(s_2) = f_1(s_2) |T_{12}(s_2)|^2 > 0 \quad (4.37)$$

を得るのである。

さて (4.31), (4.32) に於いて $\gamma \rightarrow 0$ とすると

$$\xi \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow -\beta$$

となる。もし $\beta < 0$ ならば、これは w_2 面の正の虚軸上の pole に対応する。同時に $u_2 = \text{real} < 0$ である。(3.57) 以下の議論によれば、これは channel 間の coupling を切った時、channel 2 に bound state が存在することを示している。 $\gamma \neq 0$ に対しては、この bound state pole が sheet II (又は sheet IV) に出てくるのである。その物理的の意味は次の通りである。

channel 間の coupling があると、元來 channel 2 の粒子から構成されていたこの bound state は channel 1 の粒子と組って decay する。従つてもはや安定な bound

state $\beta < 0$, channel 1 の elastic scattering における resonance として観測される。同様に $\beta > 0$ $\beta < 0$, decoupled channel 2 に virtual level が存在し, $\gamma \neq 0$ の時, channel 1 の σ_{el} に何等かの影響を与えるであろう。

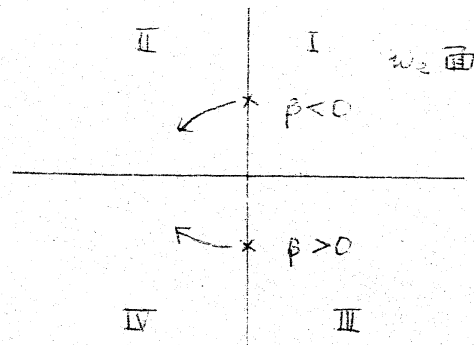


Fig. 11

そこで一般に sheet II 又は sheet IV に存在する pole のために σ_{el} がどのような振舞を示すかを調べてみる。先づ簡単のためには T_{II} の分子 $\sim \beta - i\omega_2$ の影響を無視して

$$\sigma_{el}(s) \sim \frac{1}{|D(s)|^2} \sim \frac{1}{|\omega_2 - s|^2} \equiv F(s) \quad (4.40)$$

を考察してみる。

$$\omega_2 = k + i\kappa$$

と書くと $k = \frac{1}{2}\sqrt{s - s_2}$, $\kappa = \frac{1}{2}\sqrt{s_2 - s}$ であり

$$F(s) = \begin{cases} \frac{1}{|i\kappa - s|^2} = \frac{1}{(\kappa - \eta)^2 + \xi^2} & \text{for } s \leq s_2 \\ \frac{1}{|k - s|^2} = \frac{1}{(k - \xi)^2 + \eta^2} & \text{for } s \geq s_2 \end{cases} \quad (4.41)$$

となる。このように s_2 の右と左で函数の形が異なることに注意する。又

$$dk/ds = 1/8k, \quad d\eta/ds = -1/8\eta$$

を使えば

$$\frac{d}{ds} F(s) = \begin{cases} \frac{1}{4\eta} \frac{\kappa - \eta}{(\kappa - \eta)^2 + \xi^2} & \text{for } s \leq s_2 \\ -\frac{1}{4k} \frac{k - \xi}{(k - \xi)^2 + \eta^2} & \text{for } s \geq s_2 \end{cases} \quad (4.42)$$

を得る。これらから、 $s \approx s_2$ における $F(s)$ の形について次の四つの場合があることが判る。これらは、 ω 面における pole の場所に関連している。

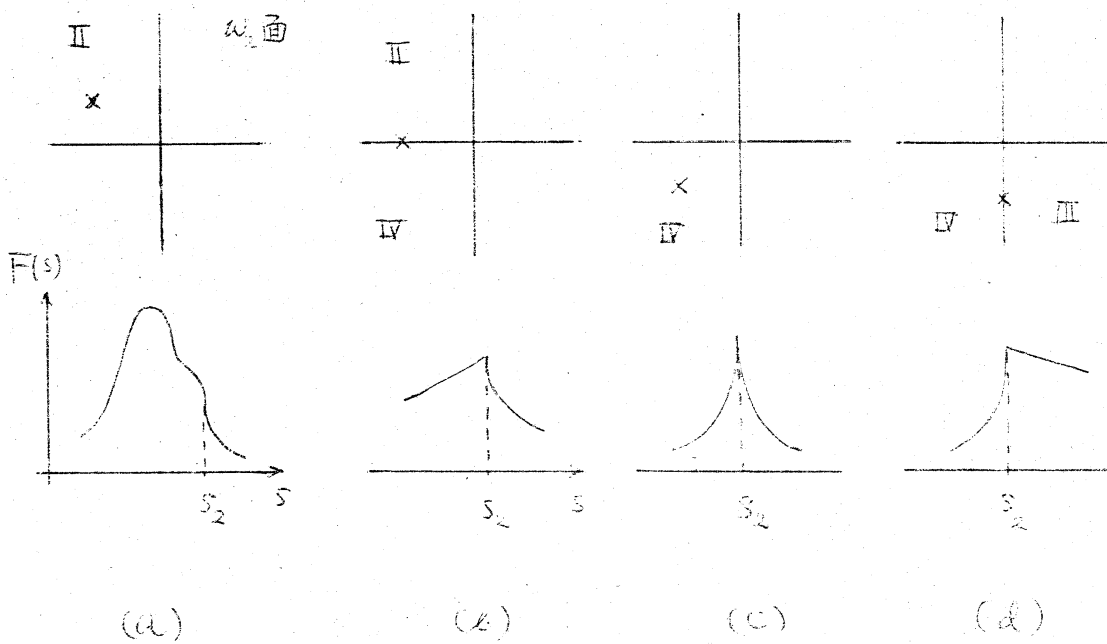


Fig. 12

(c) における s_2 の左側, (d) における s_2 の右側では dF/ds が有限であるが, その他の場合, dF/ds は $s=s_2$ において無限大である。 (c) が典型的な "cusp" であるが, 以上のようなものを総合して *threshold anomaly* と称する。

大ざっぱに言えば, sheet II の pole は $s < s_2$ における resonance と, それに伴う *threshold anomaly* に対応するが, pole が sheet IV に近づくと resonance が s_2 に近づくと *threshold anomaly* と融合する。 pole が sheet II にはいれば cusp としてのみ痕跡をとどめ, peak は s_2 より右には行かない。このように見ると, いわゆる cusp は, resonance, 特に decoupled channel の bound state が decay するものと密接な関係があり, 又 decoupled channel の virtual level の変形とも考えられる。又, cusp の大きさがどの位であったかということも, pole の場所及び residue に関係する。 pole が u 面では充分厚みに近く, 又 residue が大きくない限り, 観測にかかる程の大きな cusp は覆れたいである。

以上の derivation は $s \approx s_2$ における zero-range 近似の式に基づいているが, 収斂半径の大きさを別にするとすれば, これは近似といえども, 散乱振中の analyticity の直接の裏打ちであると考えられる。一方我々の仮定した

analyticity を表現する式, 例之は (27) は, causality から導かれる Kramers-Kronig の関係式に他なるない。従つて threshold anomaly K , その大きさ+号として, causality と unitarity とがもたらす極めて一般的の結果であると言ふことが出来る。

但し, これまで考へたのはすべて s 波 ($l=0$) の場合であつた。この場合 cross section の微分 (或は高次の微分) が inelastic threshold において不連続であつたが, 一般に $l_2 \neq 0$ (即ち channel 2 の angular momentum が高い) 場合には, cross section の l_2+1 階 (以上) の微分が不連続になる。従つて $l_2 \geq 1$ の場合には, anomaly を実験的に発見するのは困難である。[註4]

註1 Outgoing wave の境界条件に於ける singularity

H_0 に對する Green 函数 $G_E(\vec{x})$ を

$$(E - H_0)G_E(\vec{x}) = \delta(\vec{x}) \quad (A-1)$$

によつて定義する。又

$$H_0 = -\frac{\nabla^2}{2m}, \quad E = \frac{k^2}{2m} \quad (A-2)$$

とすると (A-1) は

$$(\nabla^2 + k^2) G_k(\vec{x}) = 2m \delta(\vec{x}) \quad (A-3)$$

となる。明らかに

$$G_k(\vec{x}) = G_k(-\vec{x}) = G_k(r) \quad (r = |\vec{x}|)$$

であるから、Fourier 分解して

$$G_k(r) = \int K(p) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} d\vec{p} \quad (A-4)$$

とすると

$$K(\vec{p}) = K(-\vec{p}) = K(p) \quad (p = |\vec{p}|)$$

である。又

$$\delta(\vec{x}) = (2\pi)^{-3} \int e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} d\vec{p} \quad (A-5)$$

である。(A-4), (A-5) を (A-3) に代入すると

$$(k^2 - p^2) K(p) = 2m (2\pi)^{-3} \quad (A-6)$$

を得る。この解として

$$K(p) = -2m (2\pi)^{-3} \frac{1}{p^2 - k^2 - i\varepsilon} \quad (A-7)$$

($\varepsilon \rightarrow +0$)

とすると, outgoing wave を表わす境界条件を満足することを示す。(A-7) は

$$p = k + i\varepsilon', \quad p = -k - i\varepsilon' \quad (\varepsilon' \rightarrow +0)$$

に pole を経る

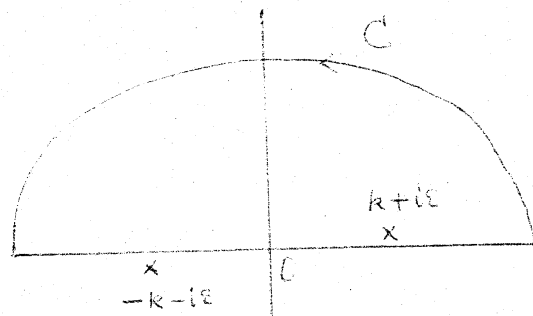


Fig-13

(A-7) を (A-4) に代入すると

$$\begin{aligned}
 G_R(r) &= \int d\Omega_p \int_0^\infty p^2 dp K(p) e^{i p r \cos\theta} \\
 &= 2\pi \int_0^\infty p^2 dp K(p) \int_{-1}^1 e^{i p r \cos\theta} d\cos\theta \\
 &= \frac{2\pi}{i\gamma} \int_0^\infty p dp K(p) (e^{i p r} - e^{-i p r}) \\
 &= -\frac{2m}{i\gamma} (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^\infty p \frac{e^{i p r}}{p^2 - k^2 - i\epsilon} dp
 \end{aligned}$$

となる。ここで $\gamma > 0$ とすると、積分は Fig-13 の上半面の半円を含む積分路 C にとることが出来る。その時、 $p = k + i\epsilon$ での pole からの寄与があつて

$$G_R(r) = -\frac{m}{2\pi} \frac{e^{i k r}}{r} \quad (A-8)$$

を得る。これは丁度 outgoing wave を表してゐる。

(A-7) を symbolic に表して

$$(2\pi)^3 K(p) \rightarrow \frac{1}{\frac{V^2}{2m} + \frac{k^2}{2m} + i\epsilon} = \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon}$$

のように書くのが普通である。

註2. 積分の収斂について

(3.2)を考慮すれば (3.14) の右辺の積分は収斂しない。このような場合には、引き算を用いる。即ち、一般に

$$F(z) = \int_{s_1}^{\infty} \frac{y(s')}{z-s'} ds' \quad (B.1)$$

の積分が収斂しない場合、 $z = t = \text{const.}$ における式

$$F(t) = \int_{s_1}^{\infty} \frac{y(s')}{t-s'} ds' \quad (B.2)$$

を (B.1) から引くことによつて

$$F(z) = F(t) - (z-t) \int_{s_1}^{\infty} \frac{y(s')}{(z-s')(t-s')} ds' \quad (B.3)$$

を得る。この積分の収斂性は前よりよい。これども収斂しなければ、収斂する迄引き算を繰り返す。引き算の回数が有限である限り、以下に議論が必要は analyticity に関する性質は変わらない。

註3. pole の場合と波動函数の漸近的ふるまい

pole が Γ 面の正虚軸上 ($i\kappa$; $\kappa > 0$) にある時, 対応する波動函数の漸近ふるまいは

$$\sim \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{i\omega r/\gamma}}{\omega - i\kappa} d\omega = \frac{e^{i\omega r}}{\gamma} \Big|_{\omega = i\kappa} = \frac{e^{-\kappa r}}{\gamma} \quad (C-1)$$

となり, bound state が Γ 面領域内に閉じこめられていることと consistent である。同じ考え, resonance に対応する Γ 面の pole に適用したらどうなるであろうか。(3.46a) の

$$\omega = -i \frac{\gamma}{16kn} \pm k_n \quad (C-2)$$

に対して, 波動函数は

$$\frac{e^{\pm ik_n r}}{\gamma} \exp\left(\frac{\gamma}{16kn} r\right) \quad (C-3)$$

となる。 $\gamma > 0$ であるから, これは $\gamma \rightarrow \infty$ と共に増大する。これは少しおかしいようであるが, 実はこうでなければならぬのである。

resonance があると, これから decay する粒子がどこへどこへ逃げて出て行く。従って Schrödinger 方程式の定常解としては, 結局, 逃げてばかり粒子が見出されるような状態が対応する。又 resonance の life time (これの逆数が中) に対して energy の固有値は complex になる。(座標部分 ~ 中) 所が元来 hermitic な Hamiltonian からどうして complex eigenvalue が得られたのであるのか。そのようなことは, 波動函数が normalizable である限りあり得ない。即ち decay state を表す波動函数は必然的に unnormalizable である。[詳しい議論は,

T. Goto, Prog. Theor. Phys. 21, 1 (1959) を参照] このように考へれば (C-2) のような形を理解することができるとある。逆に resonance が I 面の pole には対応しないことも結論される。[I 面に pole が現れないことは、実は、もっと一般的な causality の結果である。] この解釈によれば、virtual level も一種の decaying state と考へることができるとある。

註4. 補篇

本文での議論からは、threshold anomaly は $\gamma \rightarrow 0$ と共に bound state や virtual level に近づくものばかりであるように思われるかも知れないが、実は全く異つた種類のものも可能である。例之は channel 間の結合を切れれば、何も相互作用がなく、従つて decoupled channel としておける bound state など勿論ない場合も考へられる。channel 間の結合のみが唯一の相互作用である。こういう極端な場合にも、sheet II や sheet IV の pole が存在し得ることが示されている。^{4), 5)}

又、簡単のために (4.40) では T_{11} の分子を省略したが、 σ_{22} を正確に調べるためには、これも重要である。実際、Fig. 12 に示された四つの型への分類はもう少し精密にする必要があり、又 pole の場所との対応も少し変更を受け得る。詳しい議論については Ref. 4 の §7, 又は Refs. 9, 10, 11 等を見て頂きたい。

素粒子の反応の場合、Fig. 12 の (a) の型が



に於いて見出されておるようである。この場合、 γ_0^* は R_A 最近の s 状態から来たものと考へるのが最も自然である。

channel 又は簡成粒子粒子が、それ自身不安定である場合が考へられる。このとき γ_0 の anomaly に関し $d\gamma_0/ds$ が ∞ にはなならない。例之は cusp は woolly cusp になる。このような場合は A. Baz [Soviet Physics - JETP 13, 1055 (1961)], M. Nauenberg and A. Pais [Phys. Rev. 126, 360 (1962)], Y. Fujii [Nuovo Cimento 34, 552 (1964)] によつて議論されておる。

参考文献

- 1) E. P. Wigner, Phys. Rev. 73, 1002 (1948);
A. I. Baz, Soviet Physics - JETP 6, 709 (1959).
- 2) Y. Yamaguchi, Prog. Theor. Phys. Suppl. 2, 1 (1959).
- 3) L. Foulda and R. G. Newton, Nuovo Cimento 14, 1027 (1959); Ann. Phys. 10, 490 (1960),
M. Ross and G. Shaw, Ann. Phys. 9, 31 (1960);
ibid 13, 147 (1961).

- 4) Y. Fujii and M. Uehara, Prog. Theor. Phys. Suppl. 21, 138 (1962).
- 5) Y. Fujii, Phys. Rev. 139, B472 (1965).
W.R. Frazer and A.W. Hendry, Phys. Rev. 134, B1307 (1964).
- 6) F. E. Low, Phys. Rev. 97, 1392 (1955).
- 7) H. Lehmann, K. Symanzik, and W. Zimmermann, Nuovo Cimento 1, 205 (1955).
- 8) R. Oehme, Z. Physik 162, 426 (1961).
- 9) M. Kato, Ann. Phys. 31, 130 (1965).
- 10) R. H. Dalitz and S. F. Tuan, Ann. Phys. 3, 307 (1960).
- 11) Y. Fujii, Phys. Rev. 131, 2681 (1963).