数理解析研究所講究録
第 50 巻 1968 年 58-65

Exotic characteristic classes について

京大 数研 西田吾郎

§1 序

Fibre が球面とホモトピー同値であるような fibre space は spherical fibre space とよばれる。Spherical fibre space に対して、vector bundle と同様に classifying space B_{SF} が存在することが知られている。従ってその特性類を決定する事は $H^*(B_{SF}; G)$ を決定する事と同値である。ここに G は係数群である。G が位数 p の素体 Z_p の場合は、最近 土屋[ ] によって、その Hopf algebra 構造が決定された。特性類を定義する方法はいくつかあるが、その一つは cohomology operation を用いる Thom-Wu の方法である。ξ を底空間 X 上の spherical fibre space, T_ξ, U_ξ, Φ_ξ をそれぞれ ξ の Thom 複体 Thom 類 Thom 同型とする。P^n を Steenrod の reduced p-power とするとき

$$\mathscr{E}_n = \Phi_\xi^{-1}(\mathcal{P}^n(U_\xi)) \in H^{2n(p-1)}(X, Z_p)$$

は Wu 特性類とよばれる，ただし p は奇素数。 この時 Peterson - Toda [ ] によって次の事が知られている，

$$H^*(B_{SF}; Z_p) = Z_p[\mathscr{E}_n] \otimes \Lambda(\beta\mathscr{E}_n) \otimes C$$

ここに β はBockstein作用素，Cはある Steenrod 環上の Hopf algebra である。（従って，Cは Thom 類の上の primary cohomology operation では定義できない。）

ここでは、Cのある元を secondary cohomology operation で定義する F. P. Peterson [ ] の方法及びそれに関連した注意を述べる。

§2 Algebraic bundle

AをZ_p上の cocommutative, coassociative, connected graded Hopf algebra とする。又 R を graded A-algebra with unitで次の条件をみたすものとする。ただしpは素数

$$a(1) = 0 \quad \text{if } \deg(a) > 0$$

定義. $\xi ; A \to R$ (linear map) は次の条件をみたすときR上の A-bundle とよばれる。

(1) $\xi(1) = 1$

(2) $\xi(ab) = \sum (-1)^{|a''||b|} a'\xi(b)\cdot\xi(a'')$

ここに $\psi(a) = \sum a' \otimes a''$ は diagonal map, $|a| = \deg a$.

A, R を上述の通りとする。 AとRの semi tensor 積 R⊙Aとは、vector space としては R⊗A と同型であって、その積は、$(m\otimes a)\cdot(n\otimes b)=\sum(-1)^{|a''||n|}m\cdot a'(n)\otimes a''b$ で与えられる。 今 R上の A-bundle ξ が与えられた時、θ_ξ を

$$A \xrightarrow{\psi} A\otimes A \xrightarrow{\xi\otimes 1} R\otimes A \cong R\odot A$$

で定義する。 又、ξ の"negative" ξ^* を次の方法で帰納的に定義されたAからRへの linear map とする。

$$\xi^*(1)=1,\quad \sum \xi^*(a')\cdot\xi(a'')=0 \quad \text{for } \psi(a)=\sum a'\otimes a''.$$

定理1 θ_ξ は algebra の homomorphism である。

定理2. ξ^*; $A\longrightarrow R$ は R上の A-bundle である.

1は, Aの coassociativity と R⊙A の定義から容易に確かめられる。 定理2 も、複雑ではあるが、直接的な計算によって証明できる。

注意、ξ^* が ξ の negative である理由は次の通りである。今 二つのR上の A-bundle ξ, η が与えられた時、ξとηの Whitney和 ξ⊕η を

$$A \xrightarrow{\psi} A\otimes A \xrightarrow{\xi\otimes\eta} R\otimes R \xrightarrow{\text{product}} R$$

と定義すると、ξ⊕η もR上の A-bundle となる。又 ε; $A\longrightarrow R$ を $\varepsilon(1)=1$ $\varepsilon(a)=0$ if $\deg a>0$ とすれば ε もR上の A-bundle であって、次の事実が成り立つ。

R 上の A-bundle ξ に対して，　$\xi \oplus \xi^* = \varepsilon$

§3. exotic characteristic class の定義

この節では，A として mod p Steenrod algebra $\mathcal{A}_p$，R としては，$H^*(X;Z_p)$ をとる。　ξ を底空間 X 上の，stable spherical fibre space とする。このとき，$A=\mathcal{A}_p$ から R $=H^*(X;Z_p)$ への linear map ξ を等式　$a(U_\xi)=\xi(a)\cup U_\xi$ で定義する。ここに $a\in\mathcal{A}_p$，U_ξ は ξ の Thom 類である。

定理3．$\xi;\mathcal{A}_p \longrightarrow H^*(X;Z_p)$ は $H^*(X;Z_p)$ 上の $\mathcal{A}_p$-bundle

（証明）　$\xi(1)=1$ は明らか。

$$\xi(ab)\cup U_\xi = ab(U_\xi) = a(\xi(b)\cup U_\xi)$$

$$=\sum(-1)^{|a''||b|}a'(\xi(b))a''(U_\xi) = \sum(-1)^{|b||a''|}a'(\xi(b))\cdot\xi(a'')\cup U_\xi$$

従って (2) も成り立つ。

定理4．ξ を上の通りとし，ξ^* をその negative とする。このとき．$\mathcal{A}_p \ni a$，$H^*(X;Z_p)\ni x$ に対して

$$\theta_{\xi^*}(a)(x\cup U_\xi) = a(x)\cup U_\xi$$

特に　$\deg a>0$ ならば，　$\theta_{\xi^*}(a)(U_\xi)=0$.

（証明）　ξ は stable であるから $\deg U_\xi$ は even であるとしてよい。　$\mathcal{A}_p$ の coassociativity と ξ^* の definition より

$$\theta_{\xi^*}(a)(x\cup U_\xi) = \sum \xi^*(a')(a'')'(U_\xi)\cdot(a'')''(x)$$

$$=\sum \xi^*((a')')\,\xi((a')'')\,U_\xi\cdot a''(x) \;=\; a(x)\cup U_\xi$$

従って Thom類の上への "twisted" な primary operation は常にtrivialであり，Thomas[ ]の方法により，twisted な secondary operation が定義できる。Thomasの方法は長々しいが universal example を用いる標準的なものであるから略して結果だけ述べる事にする。

今 $f;Y\to X$ を topological spaces とその continuous mapとし，$B\subset Y$ とする。f^*によって $H^*(Y,B;Z_p)$ は $H^*(X;Z_p)$-moduleであり，従って $H^*(X;Z_p)\odot \mathcal{A}_p$-module である。$\underline{\alpha}\cdot\underline{\beta}=\sum \alpha_i\cdot\beta_i=0\in(H^*(X;Z_p)\odot\mathcal{A}_p)^{g+1}$ を一つの relation とする。このとき

定理5 次のような（twisted）secondary operation $\Phi_{\alpha,\beta}$が存在する。

$$\Phi_{\alpha,\beta}\ ;\ H^t(Y,B)\cap(\cap\operatorname{Ker}\beta_i)\longrightarrow H^{t+g}(Y,B)/\sum\operatorname{Im}\alpha_i.$$

さて ξをX上の$(n-1)$-spherical fibre space，(Y,B)をその Thom 複体とする。$\underline{a}\cdot\underline{b}=\sum a_i\cdot b_i=0\in(\mathcal{A}_p)^g$を$\mathcal{A}_p$の relation とすると，$\underline{\alpha}\cdot\underline{\beta}=\theta_{\xi^*}(\underline{a})\cdot\theta_{\xi^*}(\underline{b})=0$ は定理1により $H^*(X;Z_p)\odot\mathcal{A}_p$の relation である。従って定理4，定理5より次のような operation を得る。

$$\Phi^{\xi^*}_{a,b}\ ;\ H^n(T_\xi)\longrightarrow H^{n+g}(T_\xi)/\sum\operatorname{Im}\theta_{\xi^*}(a_i)$$

特別の場合として Φ_s^ξ を次の relation で定義される twisted secondary operation とする。（p : odd の場合）

$$\mathcal{P}^{p^{s-1}(p-1)}\mathcal{P}^{p^{s-1}} + \sum_{i=1}^{p^{s-1}-1} \lambda_i \mathcal{P}^{p^s-i}\mathcal{P}^i = 0. \quad (*)$$

定理6. Φ_s^ξ は Indeterminacy を持たない。

証明は容易である. さて、以上の事から（secondary）な exotic characteristic class e_s は次の様に定義される。

定義. $e_s(\xi) = \Phi_\xi^{-1}\Phi_s^\xi(U_\xi) \in H^{2p^s(p-1)-1}(X; Z_p)$

定理7. ξ を B_{SF} 上の universal fibre space とする。このとき. $e_1(\xi) \neq 0$. （Gitler-Stasheff）

注意1. 今. $\underline{a}\cdot\underline{b} = 0$ を $\mathcal{Q}_p$ の relation とする。 ξ を X 上の spherical fibre space で. $U_\xi \in \bigcap \ker b_i$ なるものとする。従って. U_ξ に通常の secondary operation $\Phi_{a,b}$ が定義できる。この時. 一般には. $\Phi_{a,b}(U_\xi) \neq \Phi_{a,b}^{\xi*}(U_\xi)$ である。その例として、ξ を $\pi_4(BSO) \cong Z \ni 2\cdot$generator に対応する S^4 上の vector bdle とする。 又. relation としては $S_q^1 S_q^4 + S_q^2 S_q^3 + S_q^4 S_q^1 = 0$ をとる。この時. $\Phi(U_\xi) \neq 0$ であり $\Phi^{\xi*}(U_\xi) = 0$ である。 実際. $\Phi^{\xi*}(U_\xi)$ は ξ の特性類であり ξ は vector bundle であるから $\Phi^{\xi*}(U_\xi)$ は Stiefel-Whitney 類の多項式である。しかるに. ξ の S-W 類は明らかにすべて 0 である。 従って $\Phi^{\xi*}(U_\xi) = 0$.

しかしながら e_sを定義する secondary operation Φ_s^ξ に対しては $\Phi_s^\xi \neq \Phi_s$ かどうかは わからない。ただし Φ_s は Φ_s^ξと同じ relation に対応する untwisted な secondary operation である。 次の注意に示すように もし $\Phi_s^\xi = \Phi_s$ ならば $e_s \neq 0$が 証明できる。

注意2. [ ]の方法によって 次のような finite CW complex K_sとその上の spherical fibre space ξ_sを構成する事ができる。 $g_i(\xi_s)=0$ ただし $i<p^s$, $g_{p^s}(\xi_s)\neq 0$ 従って Thom 類 U_s 上に Φ_s が定義できて $\Phi_s(U_s)\neq 0$.

参 考 文 献.

[1] F. P. Peterson; Twisted cohomology operations and exotic characteristic classes. to appear.

[2] F. P. Peterson - H. Toda; On the structure of $H^*(B_{SF}; Z_p)$. J. of Math. Kyoto Univ. (1967).

[3] E. Thomas; Postnikov invariants and higher order cohomology operations

[4] H. Toda; Extended p-th powers of Complexes and applications to homotopy theory. Proc of Japan Academy vol 44. (1968)

[5] A. Tsuchiya ; Characterisic classes for spherical fibre space. to appear