

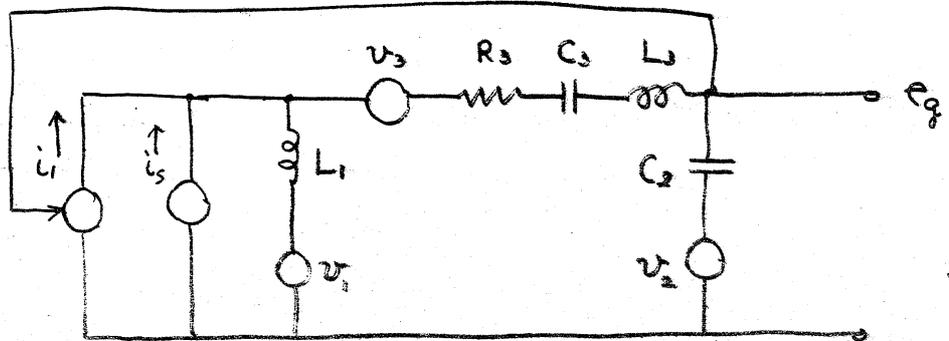
自励発振器の雑音解析

計量研究所 森村正臣

§ 1. まえがき

自励発振器の出力はショット雑音や熱雑音など素子に固有なゆらぎや周囲温度や電源電圧などの環境条件の変動の影響を受けて変動するため、パワースペクトルは有限な幅をもつ。発振器を単に狭帯域フィルタとみなすのは本質的に誤りであることは明らかであるが、従来の非線形微分方程式に基づくスペクトル密度の算出法には何らかの形で平均化が用いられて^{(1)~(5)}いた。発振器出力の雑音には回路素子の瞬時的非線形性が寄与しているので平均法を用いる限り現実の特性をじゅうぶん⁽⁶⁾に記述できない。平均法によらない解析を試みたのは Hafner が最初であると思われる。われわれは自励発振器の雑音測定を行なっているが、結果について物理的解釈を行なうのに Hafner による解析がよい見通しを与えるのでここに紹介する。

§ 2. 基礎方程式



自動発振器を上図のように等価回路で表わす。 i_s はショット雑音源、 v_3 は熱雑音源、 v_1 、 v_2 はそれぞれ L_1 、 C_2 回路に誘起される雑音であり、 i_1 は非線形素子を流れる電流ごとの特性を

$$i_1 = f(e_g)$$

と表わす。

回路の基礎方程式は

$$e_g'' + \frac{L_1}{LC_2} \left(\frac{R_3 C_2}{L_1} - \frac{df(e_g)}{de_g} \right) e_g + \omega_0^2 e_g = F(t) \quad (1)$$

である。ただし $L = L_1 + L_3$ 、 $1/C = 1/C_2 + 1/C_3$ 、

$$\omega_0^2 = 1/LC = 1/L_1 C_2,$$

$$F(t) = \frac{L_1}{LC_2} i_s + \omega_0^2 \frac{C}{C_2} (v_1 + v_3) + v_2'' + \frac{R_3}{L} v_2' + \frac{C}{C_3} \omega_0^2 v_2$$

である。

$F(t) = 0$ のときの定常解を

$$e_{g_0} = \sum A_{i_0} \cos(i\omega_i t + \varphi_i) \quad (2)$$

と書き、雑音があるときの解を

$$e_g = \sum (A_{i_0} + a_i(t)) \cos(i\omega_i t + \varphi_i + \phi_i(t)) \quad (3)$$

と書く。 $a_i(t)$, $\phi_i(t)$ はそれぞれ雑音による振幅および位相のゆらぎを表わす確率過程である。(3)を

$$e_g = e_{g_0} + u(t) \quad (4)$$

と書き(1)に代入する。 $u(t)$ がじゅうぶん小さいと仮定

して $u(t)$ の高次の項を省略すると u についての方程式

$$\ddot{u} + \frac{L_1}{LC_2} \left(\frac{R_3 C_2}{L_1} - \frac{df(e_{g_0})}{de_{g_0}} \right) \dot{u} + \left(\omega_0^2 - \frac{L_1}{LC_2} \frac{d}{dt} \frac{d}{de_{g_0}} f(e_{g_0}) \right) u = F(t) \quad (5)$$

を得る。

$$u(t) = \sum [a_i(t) \cos(i\omega_i t + \varphi_i) + A_{i_0} \phi_i(t) \sin(i\omega_i t + \varphi_i)] \quad (6)$$

と表わせると、また

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_s &= \sum_k a_{sk} \delta(t - t_k) \\ v_r &= \sum_k a_{rk} \delta(t - t_k) \quad (r = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

とおく。 $\delta(x)$ はデルタ関数である。(5)は線形であるから各インパルスに対する応答すなわち(5)の解の重ね合わせとして u が求められることになる。

§3. 基本波成分

非線形素子の特性の非線形項が小さいときは出力電圧の高調波成分はじゅうぶん小さいので、基本波成分について考察を進める。出力電圧のゆらぎを

$$u(t) = a_1(t) \cos(\omega_1 t + \varphi) + y_1(t) \sin(\omega_1 t + \varphi) \quad (8)$$

とおく。ただし $y_1(t) = -A_1 \phi_1(t)$ である。また

$$i_1 = f(e_g) = g_{m0} e_g - \beta e_g^3 \quad (9)$$

と表わし $\beta e_g^2 \ll g_{m0}$ とする。

(1) に

$$e_{g0} = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi) \quad (10)$$

と(9)を代入し $F(t) = 0$ とおくと

$$A_1^2 = \frac{4}{3\beta} \left(g_{m0} - \frac{C_2 R_3}{L_1} \right) \quad (11)$$

$$\omega_1 = \omega_0 \quad (12)$$

を得る。

$$g_m = g_{m0} - \frac{3}{4} \beta A_1^2 \quad (13)$$

とおけば $C_2 R_3 / L_1 = g_m$ となる。

ここで

$$\frac{\omega_1 L}{R_3} \equiv Q_T \equiv \frac{1}{\gamma_T}, \quad \frac{\omega_1 L_1}{R_3} \equiv Q_N \equiv \frac{1}{\gamma_N}, \quad \frac{L}{L_1} \equiv \bar{Q} \quad (14)$$

を定義しておく。

さて(10), (11)を(5)に代入すると u に関する方程式

$$\ddot{u} + \omega_1 \gamma (1 + 2 \cos 2(\omega_1 t + \varphi)) \dot{u} + \omega_1^2 (1 - 4\gamma \sin 2(\omega_1 t + \varphi)) u = F(t) \quad (15)$$

が得られる。ただし

$$\gamma = \frac{1}{\omega_1 C_2 Q} \frac{3}{4} \beta A_1^2 \quad (16)$$

である。後に示すように $2/\omega_1 \gamma$ は disturbance の減衰の時定数であるが、これは非線形性の弱いときはフィードバック回路の時定数 $2/\omega_1 \gamma_T$ にくらべてかなり大きいものとなる。

5.4. Mathieu 型方程式の解法

(15) 式は Mathieu 型で線形であるか、任意の励振 $F(t)$ に対する解はインパルスに対する解の重ね合わせとして得られる。

(2) 式を

$$e_{g_0} = \sum [a_n \cos n(\omega_1 t + \varphi) + b_n \sin n(\omega_1 t + \varphi)]$$

と書き直すと $df(e_{g_0})/de_{g_0}$ は

$$\frac{df(e_{g_0})}{de_{g_0}} = \sum [\alpha_n \cos n(\omega_1 t + \varphi) + \beta_n \sin n(\omega_1 t + \varphi)]$$

の形に表わせるから、 $u(t)$ が

$$u(t) = \sum [x_n(t) \cos n(\omega_1 t + \varphi) + y_n(t) \sin n(\omega_1 t + \varphi)] \quad (17)$$

と書けるとすると (5) 式は

$$\sum [\ddot{x}_n + g_n(t)] \cos n(\omega_1 t + \varphi) + \sum [\ddot{y}_n + h_n(t)] \sin n(\omega_1 t + \varphi) = F(t) \quad (18)$$

と表わされる。 F_c と F_s は $g_n(t)$, $h_n(t)$ は $(\ddot{x}_1, \dot{x}_1, x_1, \ddot{x}_2, \dot{x}_2, x_2, \dots)$ の定係数一次の関数である。

そこで

$$\left. \begin{aligned} F(t) &= F_c(t) \cos(\omega_1 t + \varphi) + F_s(t) \sin(\omega_1 t + \varphi) \\ F_c(t) &= F(t) \cos(\omega_1 t + \varphi) \\ F_s(t) &= F(t) \sin(\omega_1 t + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

と表わして (18) 式に代入すると

$$\begin{aligned} [\ddot{x}_1 + g_1(t) - F_c] \cos(\omega_1 t + \varphi) + [\ddot{y}_1 + h_1(t) - F_s] \sin(\omega_1 t + \varphi) \\ + \text{高調波成分} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

を得る。 F_{g0} , F_{h0} にも高調波成分が無視できるとすれば (20)

式は

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\omega_1 \dot{x}_1 + 2\omega_1 \gamma x_1 &= F_c \\ \ddot{y}_1 - 2\omega_1 \dot{x}_1 - 2\omega_1^2 \gamma x_1 &= F_s \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

となる。 $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数として

$$v_1 = 0, \quad v_2 = v_2 = 0, \quad v_3 = a_{3k} \delta(t - t_k)$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} F_c &= (\omega_1^2 / \alpha) a_{3k} \delta(t - t_k) \cos(\omega_1 t + \varphi) \\ F_s &= (\omega_1^2 / \alpha) a_{3k} \delta(t - t_k) \sin(\omega_1 t + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

となる。 $t = t_k$ で $x_1 = y_1 = \dot{x}_1 = \dot{y}_2 = 0$ として (21) の右辺に (22) を代入して解く。

このとき (21) 式の両辺のラプラス変換をとれば

$$\left. \begin{aligned} (s^2 + 2\omega_1 \gamma s) X_{13} + 2\omega_1 s Y_{13} &= L_c e^{-s t_R} \\ -2\omega_1 (s - \omega_1 \gamma) X_{13} + s^2 Y_{13} &= L_s e^{-s t_R} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

となる。ただし X_{13} , Y_{13} はそれぞれ上の条件の下での x_1 , y_1 のラプラス変換であり、また

$$L_c = (\omega_1^2 / \alpha) a_{3R} \cos(\omega_1 t_R + \varphi)$$

$$L_s = (\omega_1^2 / \alpha) a_{3R} \sin(\omega_1 t_R + \varphi)$$

である。(23) 式の特徴方程式は

$$s[s^2(s + 2\omega_1 \gamma) + 4\omega_1^2(s + \omega_1 \gamma)] = 0$$

であるが $\gamma^2 \ll 4$ のときこれは

$$s(s + \omega_1 \gamma)(s^2 + \omega_1 \gamma s + 4\omega_1^2) = 0$$

と近似できるからこれを用いて X_{13} , Y_{13} の逆変換はそれぞれ

$$\begin{aligned} X_{13R} &= -\frac{L_s}{2\omega_1} e^{-\omega_1 \gamma (t - t_R)} \\ &+ \frac{1}{2\omega_1} e^{-(\omega_1 \gamma / 2)(t - t_R)} [L_c \sin 2\omega_1 (t - t_R) + L_s \cos 2\omega_1 (t - t_R)] \\ &+ \frac{\gamma}{2\omega_1} e^{-(\omega_1 \gamma / 2)(t - t_R)} [L_c \cos 2\omega_1 (t - t_R) - \frac{L_s}{2} \sin 2\omega_1 (t - t_R)] \end{aligned} \quad (24a)$$

$$\begin{aligned} Y_{13R} &= \frac{L_c}{2\omega_1} \\ &+ \frac{1}{2\omega_1} e^{-(\omega_1 \gamma / 2)(t - t_R)} [L_s \sin 2\omega_1 (t - t_R) - L_c \cos 2\omega_1 (t - t_R)] \\ &- \frac{\gamma}{4\omega_1} e^{-(\omega_1 \gamma / 2)(t - t_R)} [L_s \cos 2\omega_1 (t - t_R) + \frac{L_c}{2} \sin 2\omega_1 (t - t_R)] \end{aligned} \quad (24b)$$

となる。たゞし γ^2 の項は省略した。

さらに γ の項も省略すると(15)式の近似解として

$$u(t) = (\omega_1/2\bar{Q}) a_{3R} \cos(\omega_1 t_R + \varphi) \sin(\omega_1 t + \varphi) \\ - (\omega_1/2\bar{Q}) a_{3R} \sin(\omega_1 t_R + \varphi) e^{-\omega_1 \delta (t-t_R)} \cos(\omega_1 t + \varphi) \\ + (\omega_1/2\bar{Q}) a_{3R} e^{-(\omega_1 \delta/2)(t-t_R)} \sin \omega_1 (t-t_R) \quad (25)$$

が得られる。

一般に $t = t_R$ における1サイクル

$$v_1 = a_{1R} \delta(t-t_R), \quad v_2 = a_{2R} \delta(t-t_R), \quad v_3 = a_{3R} \delta(t-t_R)$$

$$i_s = a_{sk} \delta(t-t_R)$$

に対する応答は γ , γ^2 の項を無視すれば

$$u_R(t) = d_R e^{-\omega_1 \delta (t-t_R)} \cos(\omega_1 t + \varphi) - A_1 \eta_R \sin(\omega_1 t + \varphi) + n_R(t) + v_2 \quad (26)$$

と表わせる。ただし

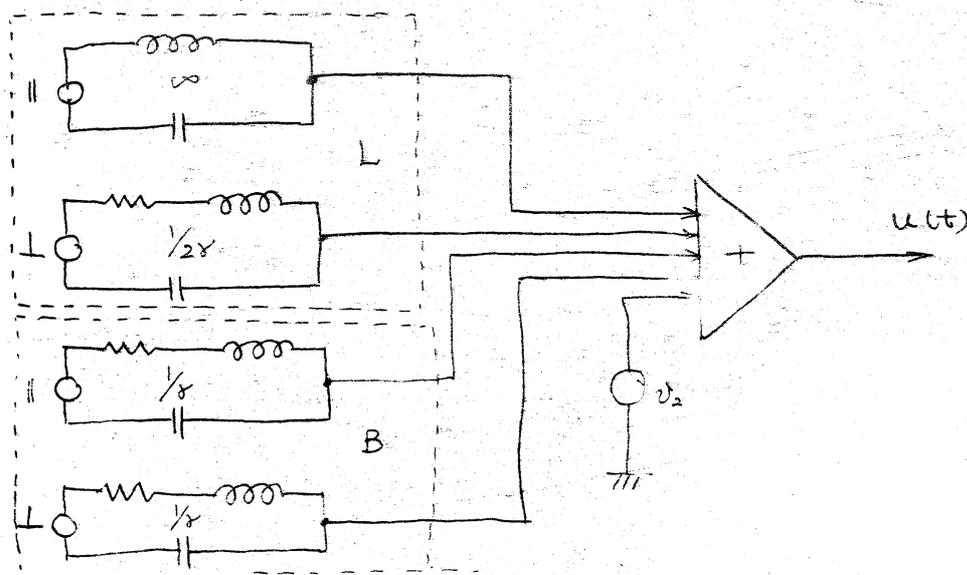
$$n_R(t) = [M_R \sin \omega_1 (t-t_R) + N_R \cos \omega_1 (t-t_R)] e^{-(\omega_1 \delta/2)(t-t_R)} \\ \left. \begin{aligned} d_R &= -M_R \sin(\omega_1 t_R + \varphi) + N_R \cos(\omega_1 t_R + \varphi) \\ \eta_R &= -\frac{M_R}{A_1} \cos(\omega_1 t_R + \varphi) - \frac{N_R}{A_1} \sin(\omega_1 t_R + \varphi) \\ M_R &= \omega_1 (a_{1R} + a_{3R} - a_{2R}) / 2\bar{Q} \\ N_R &= \omega_1 (a_{sk}/q_m + a_{2R}) / 2\bar{Q} Q_N \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

である。

§5 $u(t)$ についての等価回路

一般に low pass filter のインパルス応答 (インパルス励振に対する応答) は e^{-at} ($a \geq 0$) に比例し, band pass filter のインパルス応答は $e^{-at} \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t}$ に比例するから, (24) 式から, x_1, y_1 はいずれも low pass term と band pass term よりなるとみなされる。したがって (26) 式の $n_k(t)$ は後者に対応し, 最初の二項は前者に対応するが, このうち第一項は無損失の共振を表わしこれは (15) 式におけるパラメトリックポンピングによってもたらされるものでポンピングと同相の成分である。これと直交する第二項は減衰振動を示し band pass term の減衰の時定数の2倍の時定数をもっている。

以上の考察から $u(t)$ について下図のような等価回路が得られる。



§ 6. 自動発振器の出力信号

$t = t_k$ における雑音インパルスに対する応答を含む自動発振器の出力信号の基本波成分は (4), (10), (26) 式より近似的に

$$e_g = [A_1 + \alpha_k e^{-\omega_0 \delta (t-t_k)}] \cos(\omega_0 t + \eta_k + \varphi) + n_k(t) + v_2 \quad (28)$$

$$= [A_1 + \alpha_k(t)] \cos(\omega_0 t + \eta_k + \delta_k(t) + \varphi) + v_2 \quad (29)$$

と表わせる。ただし

$$\left. \begin{aligned} \alpha_k(t) &= \alpha_k (e^{-\omega_0 \delta (t-t_k)} + e^{-(\omega_0 \delta / 2)(t-t_k)}) \\ \eta_k + \delta_k(t) &= \eta_k (1 + e^{-(\omega_0 \delta / 2)(t-t_k)}) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

である。

白色雑音に対する発振器の応答はインパルス応答の重ね合わせとして得られる。よって

$$e_g = (A_1 + \alpha(t)) \cos(\omega_0 t + \bar{\eta}(t) + \theta(t)) + v_2$$

δ がじゅうぶん小さいときは

$$e_g = A_1 \cos(\omega_0 t + \bar{\eta}(t)) + \alpha(t) \cos(\omega_0 t + \bar{\eta}(t)) - A_1 \theta(t) \sin(\omega_0 t + \bar{\eta}(t)) + v_2$$

$$= E_c + E_A + E_\theta + E_N \quad (31)$$

と表わせる。ただし

$$\alpha(t) = \sum \alpha_k(t), \quad \bar{\eta}(t) = \sum \eta_k, \quad \theta(t) = \sum \theta_k(t) \quad (32)$$

で総和は $t_k < t$ なるすべての k についてとる。

E_c は前図での L // 回路の出力によってゆらぎを受ける

carrier 成分, E_A は $L \perp$ および $B \perp$ 回路の出力の合成による振幅のゆらぎ, E_ϕ は $B \parallel$ 回路による位相のゆらぎを表現している。 E_N は出力回路に並列な雑音源の出力である。

$i_s, v_r (r=1, 2, 3)$ を確率過程とし, これら相互に無相関とすれば, e_g の自己相関々数 $\Gamma_{ee}(\tau)$ は

$$\Gamma_{ee}(\tau) = \Gamma_{cc}(\tau) + \Gamma_{AA}(\tau) + \Gamma_{\phi\phi}(\tau) + \Gamma_{NN}(\tau)$$

と表わされ, パワースペクトル密度 $G_{ee}(f)$ は

$$G_{ee}(f) = 4 \int_0^{\infty} \Gamma_{ee}(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

で与えられる。 τ として $\omega = 2\pi f$ である。また $\Gamma_{cc}(\tau),$

$\Gamma_{AA}(\tau), \Gamma_{\phi\phi}(\tau), \Gamma_{NN}(\tau)$ はそれぞれ E_c, E_A, E_ϕ, E_N の自己相関々数である。

§7. 結言

自励発振器の雑音を解析するのに摂動法を用いた。すなわち発振器の動作を記述する非線形微分方程式の解をフーリエ級数で表示し, ゆるやかに変動するフーリエ係数を無雑音の場合に対応する一定値の項と摂動項に分け後者に対する線形の Mathieu 型の微分方程式を解くことにより出力信号を求めた。この方法によれば雑音の要因を物理的に把握することができるので, 実験による検証がかけやすい。

参考文献

- (1) A. van der Ziel 著, 滝, 飯島, 田宮 訳: 雑音
p. 300, 近代科学社(BB 32)
- (2) M. A. Garstens: Noise in nonlinear oscillators
Jour. Appl. Phys., 28, 352 (1957)
- (3) W. A. Edson: Noise in oscillators
Proc. IRE, 48, 1454 (1960)
- (4) J. A. Mullen: Background noise in nonlinear oscillators
Proc. IRE, 48, 1467 (1960)
- (5) P. Grivet & A. Blaquièrre: Nonlinear effects of
noise in electronic clocks, Proc. IEEE, 51, 1606 (1963)
- (6) E. Hafner: The effects of noise in oscillators
Proc. IEEE, 54, 179 (1966)