

非線型連立方程式の大域における数値解法

徳大・工短 篠原能材

§1. Basis of the method

非線型連立方程式

$$(1.1) \quad F(x) = \{f_r(x_1, x_2, \dots, x_n)\} = 0, \quad r=1, 2, \dots, n$$

の数値解を求める一つの方法を考える。

仮定

- (i) 方程式系(1.1)の各函数 $f_r$ は、 $n$ 次元空間 $R^n$ の或る領域 $D$ 内で定義されており、arguments  $x_1, x_2, \dots, x_n$  について領域 $D$ 内で連続であり、各 argument についての一階の偏導函数はすべて存在して連続であるとする。
- (ii) 方程式系(1.1)は領域 $D$ 内で解 $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ を持っているものとする。
- (iii)  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ は領域 $D$ に含まれる、 $(n-1)$ 個の方程式系

程式系

$$(1.2) \quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

の一つの解であるとし、領域  $D$  内のある有界部分領域  $\Omega$  ( $\Omega$  は点  $P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  および点  $Q(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  を共に含む) において、函数行列式

$$J(x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda) = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_{n-1})}{D(x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda)},$$

( $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  は  $1, 2, \dots, n$  の中の  $(n-1)$  個の互に異なる番号)

のうち、少なくとも一つは零に等しくおられないとする。

上述の三つの仮定の下で、陰函数の定理によって存在を保証される曲線は、 $\Omega$  内では特異点をもたないので曲線のパラメータとして弧長  $s$  を用いて

$$\begin{cases} x_1 = x_1(s), \\ x_2 = x_2(s), \\ \vdots \\ x_n = x_n(s), \end{cases}$$

と表わすことができ、 $s=0$  のとき点  $P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  を通る。(1.2)の両辺を  $s$  で微分すれば、

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \frac{dx_n}{ds} = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \dots + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \frac{dx_n}{ds} = 0, \end{cases}$$

ただし、

$$(1.3) \quad \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{ds}\right)^2 = 1.$$

行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{ds} & \frac{dx_2}{ds} & \dots & \frac{dx_n}{ds} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

において、 $dx_i/ds$  の余因数を  $D_i$  とおけば、仮定 (iii) より

(1.3) を用いて、

$$(1.4) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{ds} = \lambda D_1 \\ \frac{dx_2}{ds} = \lambda D_2 \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{ds} = \lambda D_n \end{cases}$$

ただし、

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n D_i^2}}$$

を得る。

常微分方程式系 (1.4) に初期条件  $s=0$  のとき  $x_i = x_i^{(0)}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$

の下で、Step by Step に数値積分を進行させる。そして、 $l$  枚

Step において得られた数値解を

$$x_i = \hat{x}_i^{(l)}, \quad i=1, 2, \dots, n$$

とおく。十分に小さく与えられた正数  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$  は数値積分の

精度にとるとよい) に対して

$$(1.5) \quad f_n(\hat{x}_1^{(l-1)}, \hat{x}_2^{(l-1)}, \dots, \hat{x}_n^{(l-1)}) - f_n(\hat{x}_1^{(l)}, \hat{x}_2^{(l)}, \dots, \hat{x}_n^{(l)}) \leq \varepsilon$$

かつ,

$$(1.6) \quad \begin{cases} |f_n(\hat{x}_1^{(l-1)}, \hat{x}_2^{(l-1)}, \dots, \hat{x}_n^{(l-1)})| \leq \varepsilon, \\ \text{また} \\ |f_n(\hat{x}_1^{(l)}, \hat{x}_2^{(l)}, \dots, \hat{x}_n^{(l)})| \leq \varepsilon, \end{cases}$$

となるような数値解

$$(1.7) \quad x_i = \hat{x}_i^{(l-j)} \quad ; i=1, 2, \dots, n, \quad j=0, 1$$

を求める。

得られた数値解 (1.7) に対して、簡単に計算可能な残差  $\|F(x)\|$  を用いての誤差評価法は、すでに、URABE [2] によって与えられている。すなわち、

#### URABE'S PROPOSITION

数値解  $\hat{x}$  に対して、函数行列式  $J(\hat{x}) \neq 0$  であり、適当な正数  $\delta$  と non-negative  $K < 1$  が存在して

$$D_\delta = \{x; \|x - \hat{x}\| < \delta\} \subset D,$$

$$\|J(x) - J(\hat{x})\| \leq \frac{K}{M} \quad \text{for any } x \in D_\delta,$$

$$\frac{M \cdot r}{1-K} \leq \delta,$$

ただし、

$$r = \|F(\hat{x})\|, \quad M = \|J^{-1}(\hat{x})\|$$

のときは、方程式系 (1.1) は  $D_\delta$  で、ただ一つの解  $\bar{x}$  をもち、

かつ、

$$(1.8) \quad \|\hat{x} - \bar{x}\| \leq \frac{M \cdot r}{1-K}$$

が成立する。

## § 2. Numerical examples

[A].

代数方程式

$$(2.1) \quad z^5 - 2z^4 + 10z^3 - 9z + 3 = 0$$

の根を求めることを考える。(UNO [1]).

$$z = x + iy$$

とおけば, (2.1) は連立方程式

$$(2.2) \quad \begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

ただし,

$$f_1(x, y) = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 - 2x^4 + 12x^2y^2 - 2y^4 \\ + 10x^3 - 30xy^2 - 9x + 3,$$

$$f_2(x, y) = y^5 - 10x^2y^3 + 5x^4y - 8x^3y + 8xy^3 + 30x^2y \\ - 10y^3 - 9y,$$

に帰着される。

計算結果は,

$$(2.3) \quad \begin{aligned} z = & -0.9691573277, \\ & 0.3997906784, \\ & 0.7374430457, \\ & 0.9159618019 + 3.108125866i, \\ & 0.9159618019 - 3.108125866i \end{aligned}$$

である。

誤差評価;

$\hat{x} = 0.3997906784$  の場合.

$$F(\hat{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\hat{x}, \hat{y}) \\ f_2(\hat{x}, \hat{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2910383046 \times 10^{-10} \\ 0.3795507282 \times 10^{-22} \end{pmatrix},$$

$$\therefore r = \|F(\hat{x})\| = 0.2910383046 \times 10^{-10},$$

$$J(\hat{x}) = \begin{pmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ f_{2x} & f_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4588486751 \times 10 & 0 \\ 0 & -0.4588486751 \times 10 \end{pmatrix},$$

$$\therefore \Delta = |J(\hat{x})| = (0.4588486751 \times 10)^2,$$

$$J^{-1}(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \frac{f_{2y}}{\Delta} & -\frac{f_{1y}}{\Delta} \\ -\frac{f_{2x}}{\Delta} & \frac{f_{1x}}{\Delta} \end{pmatrix},$$

$$\therefore M = \|J^{-1}(\hat{x})\| \leq 0.3082091414,$$

$$(2.4) \quad D_\delta = \{(x, y) : |x - \hat{x}| \leq H, |y - \hat{y}| \leq H, H = 1/16\}$$

と仮定す

$$\delta = \sqrt{2}H = 0.088388347625,$$

他方,

$$\|J(x) - J(\hat{x})\| \leq 0.2882004051 \times 10 \quad (\text{for any } x \in D_\delta).$$

$$(2.5) \quad M \cdot \|J(x) - J(\hat{x})\| \leq 0.8882599994.$$

また,

$$(2.6) \quad 1 - \frac{M \cdot r}{\delta} > 1 - 0.11 \times 10^{-9}$$

従って, (2.5), (2.6) より

$$\kappa = 0.8882599994$$

とすれば, PROPOSITION の条件はすべて満たされる。

そして,

$$\frac{M \cdot r}{1-K} < 0.803 \times 10^{-10},$$

すなわち,

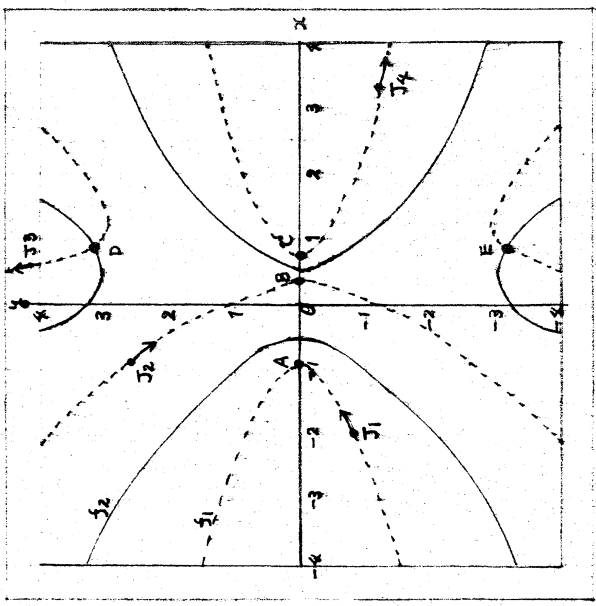
(2.7)  $\|\hat{x} - \bar{x}\| < 0.803 \times 10^{-10}$

を得る。

結論として, 与えられた代数方程式 (2.1) の解  $\bar{x}$  は, 領域  $D_5$  で存在して, たゞ一つであり, その近似解  $\bar{x} = 0.3997906784$  の精度は (2.7) で与えられる。

近似解 (2.3) の他の解についても同様に評価できる。

[計算経過説明図]



- A = (-0.9691573277, 0),
- B = (0.3997906784, 0),
- C = (0.7374430457, 0),
- D = (0.9159618019, 3.108125866),
- E = (0.9159618019, -3.108125866).

[B]. 日本列島の周辺の地図を作成する際に、歪を極小にする一つの投影法を決定する微分方程式

$$(2.8) \quad \sin^2 \theta \frac{d^2 r}{d\theta^2} + \sin \theta \cos \theta \frac{dr}{d\theta} - \eta^2 r = \sin \theta \cos \theta - \eta \sin \theta$$

の解のうち、条件

$$(2.9) \quad \left( \frac{dr}{d\theta} \right)_{\theta=\alpha} = \left( \frac{dr}{d\theta} \right)_{\theta=\beta} = 1$$

を満す解を求め、次に、parameter  $\eta$  を適当に定めて

条件 1.

$$(2.10) \quad \frac{\eta r(\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\eta r(\beta)}{\sin \beta},$$

条件 2.

$$(2.11) \quad \textcircled{1} ; \left( \frac{\eta r(\theta)}{\sin \theta} \right)' = 0 \quad \text{かつ} \exists \theta, (\alpha < \theta < \beta),$$

条件 3, 4.

$$(2.12) \quad \left( \begin{array}{c} \frac{dr(\theta)}{d\theta} - \frac{\eta r(\theta)}{\sin \theta} \\ \frac{dr(\theta)}{d\theta} + \frac{\eta r(\theta)}{\sin \theta} \end{array} \right)_{\theta=\alpha} = \left( \begin{array}{c} \frac{dr(\theta)}{d\theta} - \frac{\eta r(\theta)}{\sin \theta} \\ \frac{dr(\theta)}{d\theta} + \frac{\eta r(\theta)}{\sin \theta} \end{array} \right)_{\theta=\beta}$$

$$(2.13) \quad = - \left( \begin{array}{c} \frac{dr(\theta)}{d\theta} - \frac{\eta r(\theta)}{\sin \theta} \\ \frac{dr(\theta)}{d\theta} + \frac{\eta r(\theta)}{\sin \theta} \end{array} \right)_{\theta=\textcircled{1}}$$

を満す解を求める必要が生じた。上式において、 $\alpha$ ,  $\beta$ ,

$\eta$ ,  $\textcircled{1}$  は未知数である。先づ、(2.8)において、

$$t = \tan \frac{\theta}{2}$$

とおけば

$$(2.14) \quad t^2 \frac{d^2 r}{dt^2} + t \frac{dr}{dt} - \eta^2 r = \frac{2t-2t^3}{(1+t^2)^2} - \frac{2\eta t}{1+t^2}$$



従って,  $t = e^u$  とおけば, (2.14) は

$$(2.15) \quad \frac{d^2 r}{du^2} - \eta^2 r = \frac{2e^u - 2e^{3u}}{(1+e^{2u})^2} - \frac{2\eta e^u}{1+e^{2u}}$$

とおける。そこで,

$$r = \cot^2 \frac{\theta}{2} \int \tan^{\eta} \frac{\theta}{2} d\theta$$

が (2.8) の一つの特殊解であるので, (2.8) の一般解は

$$(2.16) \quad r = A \tan^{\eta} \frac{\theta}{2} + B \cot^{\eta} \frac{\theta}{2} + \cot^2 \frac{\theta}{2} \int_{x_1}^{\theta} \tan^{\eta} \frac{\theta}{2} d\theta, \quad x_1 = 55^\circ$$

とおける。従って,

$$\frac{dr}{d\theta} = \eta A \tan^{\eta-1} \frac{\theta}{2} / \sin \theta - \eta (B + \int_{x_1}^{\theta} \tan^{\eta} \frac{\theta}{2} d\theta) / \sin \theta \tan^{\eta} \frac{\theta}{2} + 1.$$

上式を用いれば, (2.9) は,

$$A \tan^{\frac{\eta}{2} \alpha} / \sin \alpha - B / \sin \alpha \tan^{\eta} \frac{\alpha}{2} = \int_{x_1}^{\alpha} \tan^{\eta} \frac{\theta}{2} d\theta / \sin \alpha \tan^{\eta} \frac{\alpha}{2},$$

$$\therefore A \tan^{\frac{\eta}{2} \alpha} - B = \int_{x_1}^{\alpha} \tan^{\eta} \frac{\theta}{2} d\theta,$$

同様にして,

$$A \tan^{\frac{\eta}{2} \beta} - B = \int_{x_1}^{\beta} \tan^{\eta} \frac{\theta}{2} d\theta.$$

故に,

$$(2.17) \quad \begin{cases} A = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \tan^{\eta} \frac{\theta}{2} d\theta}{\tan^{\frac{\eta}{2} \beta} - \tan^{\frac{\eta}{2} \alpha}}, \\ B = \frac{\tan^{\frac{\eta}{2} \alpha} \int_{x_1}^{\beta} \tan^{\eta} \frac{\theta}{2} d\theta - \tan^{\frac{\eta}{2} \beta} \int_{x_1}^{\alpha} \tan^{\eta} \frac{\theta}{2} d\theta}{\tan^{\frac{\eta}{2} \beta} - \tan^{\frac{\eta}{2} \alpha}}. \end{cases}$$

すなわち, (2.8) の一般解は (2.16), (2.17) で与えられる。

すると, 条件 1~4 を満す解を求めることは, 次の四元の

非線型 (超越) 連立方程式を解くことに帰着される。

$$(2.18) \quad \begin{cases} F_1(\kappa, \alpha, \beta) = 0, \\ F_2(\kappa, \alpha, \beta, \Theta) = 0, \\ F_3(\kappa, \alpha, \beta) = 0, \\ F_4(\kappa, \alpha, \beta, \Theta) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < \kappa < 1, \\ 40^\circ < \alpha < \beta < 70^\circ, \\ \alpha < \Theta < \beta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1 = r(\alpha) \sin \beta - r(\beta) \sin \alpha, \\ F_2 = \sin \Theta \left( \frac{dr(\Theta)}{d\Theta} \right)_{\Theta=\Theta} - \cos \Theta \cdot r(\Theta), \\ F_3 = [a(\kappa, x) - b(\kappa, x)] \cdot [a(\kappa, y) + b(\kappa, y)] \\ \quad - [a(\kappa, y) - b(\kappa, y)] \cdot [a(\kappa, x) + b(\kappa, x)], \\ F_4 = [a(\kappa, y) - b(\kappa, y)] \cdot [a(\kappa, \Theta) + b(\kappa, \Theta)] \\ \quad + [a(\kappa, \Theta) - b(\kappa, \Theta)] \cdot [a(\kappa, y) + b(\kappa, y)], \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(\kappa, \theta) = \frac{dr(\theta)}{d\theta} \\ \quad = \kappa A \tan \frac{\theta}{2} / \sin \theta - \kappa (B + \int_x \tan \frac{\theta}{2} d\theta) / \sin \theta \tan \frac{\theta}{2} \\ \quad + 1, \\ b(\kappa, \theta) = \frac{\kappa r(\theta)}{\sin \theta}, \\ x = 44^\circ \text{ (Co-latitude)}, \\ y = 66^\circ \text{ (Co-latitude)}. \end{cases}$$

計算結果は次のようになる。

$$(2.19) \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \\ \hat{\kappa} \\ \hat{\Theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7311676067 \\ 1.201858846 \\ 0.5735706625 \\ 0.9534080828 \end{pmatrix},$$

$$F(\hat{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\hat{x}) \\ F_2(\hat{x}) \\ F_3(\hat{x}) \\ F_4(\hat{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1455191523 \times 10^{-10} \\ 0.3637978807 \times 10^{-10} \\ 0.4706635082 \times 10^{-10} \\ 0.7139533409 \times 10^{-10} \end{pmatrix},$$

$$\therefore Y = \|F(\hat{x})\| = 0.9406265107 \times 10^{-10},$$

$$J(x) = \begin{pmatrix} F_{1\alpha} & F_{1\beta} & F_{1\gamma} & 0 \\ F_{2\alpha} & F_{2\beta} & F_{2\gamma} & F_{2\theta} \\ F_{3\alpha} & F_{3\beta} & F_{3\gamma} & 0 \\ F_{4\alpha} & F_{4\beta} & F_{4\gamma} & F_{4\theta} \end{pmatrix},$$

$$J^{-1}(\hat{x}) = \begin{pmatrix} -0.1193910638 \times 10^0 & 0.4962025422 \times 10^0 & -0.3636590463 \times 10^0 & -0.4033471572 \times 10^0 \\ -0.2442553447 \times 10^0 & -0.5973531052 \times 10^0 & 0.2353527234 \times 10^0 & 0.4855672108 \times 10^0 \\ -0.4977735887 \times 10^{-1} & 0.1151113706 \times 10^0 & 0.4772381296 \times 10^0 & -0.9357034707 \times 10^{-1} \\ 0.8655175970 \times 10^{-1} & 0.1022006925 \times 10^0 & -0.8310683846 \times 10^0 & -0.1196777041 \times 10^0 \end{pmatrix},$$

$$\therefore M = \|J^{-1}(\hat{x})\| \cong 11.32774994,$$

領域  $D_\delta \equiv$

$$D_\delta = \{x = (\alpha, \beta, \gamma, \theta); |\alpha - \hat{\alpha}|, |\beta - \hat{\beta}|, |\gamma - \hat{\gamma}|, |\theta - \hat{\theta}| \leq \frac{1}{2}H\},$$

$$H = 1^\circ = 0.0174532925 \text{ radian},$$

$$\therefore \delta = H.$$

他方,

$$\|J(x) - J(\hat{x})\| \leq 0.06720178962 \quad \text{for any } x \in D_\delta.$$

(2.20)

$$M \cdot \|J(x) - J(\hat{x})\| < 0.7612450684$$

また,

(2.21)

$$1 - \frac{M \cdot Y}{\delta} > 1 - 0.62 \times 10^{-7}.$$

(2.20), (2.21) より

$$K = 0.7612450684$$

とすれば, PROPOSITION の条件はすべて満たされる。

そして,

$$\|\hat{x}_1 - \bar{x}_1\| \leq \frac{M \cdot \gamma}{1 - K} < 4.5 \times 10^{-8}$$

を得る。

#### 参 考 文 献

- [1] 宇野利雄, 計算機のための数値計算, P. 111, 昭和41年.
- [2] URABE, M., Galerkin's procedure for nonlinear periodic system, Arch. Rational Mech. Anal. 20, 120-152, 1965.

	出発値	符号変化点	収束点
$\alpha$	0.8780735065 E+000	0.7127402786 E+000	0.7311676077 E+000
$\beta$	0.1018796810 E+001	0.1206217081 E+001	0.1201858845 E+001
$\theta$	0.9472482022 E+000	0.9442588734 E+000	0.9534080827 E+000
$\eta$	0.5834375000 E+000	0.5807454175 E+000	0.5735706625 E+000
F1	$-0.17 \times 10^{-7}$	$-0.51 \times 10^{-3}$	$0.43 \times 10^{-10}$
F2	$0.24 \times 10^{-9}$	$0.46 \times 10^{-3}$	$-0.72 \times 10^{-11}$
F3	$0.15 \times 10^{-9}$	$0.79 \times 10^{-2}$	$-0.12 \times 10^{-10}$
F4	$-0.34 \times 10^{-1}$	$0.11 \times 10^{-3}$	$-0.74 \times 10^{-10}$
		0.7998539537	
		0.8004847218	
		0.9445298029	
		0.5806490856	
		$0.90 \times 10^{-4}$	
		$0.76 \times 10^{-3}$	
		$0.80 \times 10^{-2}$	
		$0.72 \times 10^{-3}$	
$\alpha$	0.7982000536 E+000	0.7171003509 E+000	0.7311676069 E+000
$\beta$	0.1113003941 E+001	0.1208083201 E+001	0.1201858846 E+001
$\theta$	0.9496932435 E+000	0.9477230271 E+000	0.9534080828 E+000
$\eta$	0.5795312500 E+000	0.5778856116 E+000	0.5735706625 E+000
F1	$0.13 \times 10^{-9}$	$-0.37 \times 10^{-3}$	$-0.14 \times 10^{-10}$
F2	$0.14 \times 10^{-9}$	$0.27 \times 10^{-3}$	$0.36 \times 10^{-10}$
F3	$0.18 \times 10^{-9}$	$0.50 \times 10^{-2}$	$0.47 \times 10^{-10}$
F4	$-0.20 \times 10^{-1}$	$0.10 \times 10^{-2}$	$0.71 \times 10^{-10}$
		0.7853350307 E+000	
		0.7862964615	
		0.9470227826	
		0.5771328590	
		$0.15 \times 10^{-3}$	
		$0.73 \times 10^{-3}$	
		$0.75 \times 10^{-2}$	
		$0.11 \times 10^{-1}$	

(計算経過説明表)

