数理解析研究所講究録
第 73 巻 1969 年 11-20



# 一様分布論からの話題

信州大 理　鹿野　健

以下の紹介は主として〔19〕〔20〕による.

## §1.　定義と基本定理

実数列 $(x_n)$ $(n=1, 2, \ldots\ldots)$ に対し，その小数部分の列 $(\{x_n\})$， $\{x_n\}=x_n-[x_n]$ を考えると，それはすべて区間

$$I: \quad 0 \leq x < 1 .$$

に含まれる。

いま，I の部分区間

$$E: \quad a \leq x < b \quad , \quad E \subset I .$$

を取り，この E に含まれる $\{x_i\}$ $(1 \leq i \leq n)$ の個数を $N_n(a, b) = N_n(E)$ と表わすことにすると，もしこのような任意の E に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(E)}{n} = b-a ,$$

が成り立つとき，数列 $(x_n)$ は一様分布する（*uniformly distributed* *mod* 1.）という。

また，

$$D = D(x_1, \ldots, x_n) = \sup_{E \subset I} \left| N_n(E) - (b-a)n \right|$$

を $(x_n)$ の *discrepancy* とよぶ。

$(x_n)$ が一様分布するための判定条件は，H. Weyl [1] によって次の様に与えられた。

［定理 1］ $(x_n)$ が一様分布するための必要十分条件は，同値な次の2つである。

(1) 任意の自然数 $k$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i k x_j} = 0.$$

(2) $I$ 上定義された任意の Riemann 可積分函数 $f(x)$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \int_0^1 f(x)\,dx .$$

以上の定義や定理はそのまま多次元の場合に拡張できる。

§2. Weyl の原証明はいわば"定性的"なもので，収束の速さ，即ち $D$（あるいは $\frac{D}{n}$）に対する大きさの評価は与えられていない。 これに関して，Turán と Erdős [2] は次の結果を得た。

［定理 2］ $1 \leq k \leq m$ なる任意の自然数 $k$ に対して

$$\left| \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i k x_j} \right| \leqq \psi(k).$$

となるならば，ある絶対定数 $c$ が存在して，

$$D(x_1, \dots, x_n) < c\left( \frac{n}{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\psi(k)}{k} \right).$$

そして，最近 LeVeque [3] は次の定理を証明した。

[定理3]　任意の実数列 $(x_n)$ に対して

$$\frac{D}{n} \leqq \left( \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i k x_j} \right|^2}{k^2} \right)^{\frac{1}{3}},$$

が成り立ち，ここで右辺の指数 $\frac{1}{3}$ は best である。

一方，Van Aardenne-Ehrenfest [4] は，

[定理4]　任意の実数の無限列 $(x_n)$ に対して，

$$D(x_1, \dots, x_n) > c \frac{\log\log n}{\log\log\log n}.$$

となる $n$ が無数に存在する。

ことを示したが，Roth [5] によってこれは

[定理5]　任意の実数の無限列 $(x_n)$ に対して，

$$D(x_1, \dots, x_n) > c\sqrt{\log n}.$$

となる $n$ が無数に存在する，と改良された。これは[定理3]の証明において本質的な役割を果す。[定理5]の右辺は $\log n$ より'大きな'関数では置き換えられないことが知られている[4]。

一様分布する $(x_n)$ の具体例としては，

例 1）　任意の無理数 $\alpha$ に対して，　$x_n = n\alpha$ .

（Kronecker－Borel－Weyl）

例 2）　すべての素数列 $p_n$ （$2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ ： $n$ 番目の素数）と任意の無理数 $\alpha$ に対して，$x_n = p_n\alpha$ .

（Turán－Vinogradov）

例 3）　$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots\cdots < \lambda_n < \cdots$　なる任意の自然数列 $(\lambda_n)$ と，殆んどすべての実数 $\alpha$ に対して，$x_n = \lambda_n\alpha$ .

（Weyl）

例 4）　殆んどすべての $\theta > 1$ に対して，　$x_n = \theta^n$ .

（Koksma）

しかし，$(\theta^n)$ が一様分布するような具体的な $\theta$ の値は何も分っていない！

Erdős－Koksma [6] と Cassels [7] によれば，例 3 については次の定理が成り立つ。

［定理 6］　$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots\cdots < \lambda_n < \cdots$　なる任意の $(\lambda_n)$ と殆んどすべての実数 $\alpha$ に対して，　$x_n = \{\lambda_n\alpha\}$ の discrepancy について，

$$D(x_1, \ldots, x_n) = o\left(n^{\frac{1}{2}}(\log n)^{\frac{5}{2}+\varepsilon}\right)$$

が任意の $\varepsilon > 0$ に対して成立する。

$(\lambda_n)$ が特に lacunary である場合には，右辺はある正の定数 $\delta$ に対して，

$$o\left(n^{\frac{1}{2}}(\log\log n)^{\delta}\right)$$

となることが示せたが未発表であり，恐らく lacunary でなくとも成り立つだろうと Erdős は述べている。

§3： Hinčin [8] の予想として次のものがある。

『I の任意の可測部分集合 E に対して，点列 $\{k\alpha\}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ のうち E に含まれるものの個数を $f_n(\alpha)$ と表わせば，任意の E と殆んどすべての実数 $\alpha$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(\alpha)}{n}=m(E).$$

が成り立つであろう。』

これを一般化すれば次のような問題を得る。

『 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots$ なる自然数の無限列 $(\lambda_n)$ と，I 上定義された Lebesgue 可積分函数 $f(x)$ を考える。

すると，$(\lambda_n)$ と $f(x)$ に更にいかなる条件があれば，殆んどすべての実数 $\alpha$ に対して

(A) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\{\lambda_k\alpha\})=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

となるか？』

Raikov [9]，F. Riesz [10] によって，$\lambda_n = a^n$ （$a > 1$：自然数）については，(A) が任意の $f \in L$ に対して成り立つ事が示された。また，その収束の速さについても，Fortet [11]，Kac [12]，Mukutdinov [13]，Postnikov [14] etc. の研究がある。

一方 Erdős は次のような一連の結果を得ている [15]。

[定理 7]　$\{\lambda_n\}$ が lacunary で $f \in L^2$ のとき，$f(x)$ の Fourier 展開の部分和を $S_n(x)$ とすると，もし

(B) $$\int_0^1 |f(x) - S_n(x)|^2 dx = O\left(\frac{1}{(\log\log n)^{2+\varepsilon}}\right).$$

ならば (A) が成立する。

[定理 8]　(B) を除いてしまって無条件では (A) は成立しない。即ち，lacunary sequence $(\lambda_n)$ と $f \in L^p$ （$\forall p \geqq 1$）が存在して，殆んどすべての $\alpha$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\{\lambda_k \alpha\}) = +\infty.$$

詳しくは，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，

(c) $$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n(\log\log n)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \sum_{k=1}^{n} f(\{\lambda_k \alpha\}) = +\infty,$$

が成り立つ。

所が一方

[定理9] 任意の lacunary sequence $\{\lambda_n\}$ と，$f \in L^2$ について，

(D) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \sum_{k=1}^{n} f(\{\lambda_k \alpha\}) = 0 .$$

が殆んどすべての $\alpha$ と $\forall \varepsilon > 0$ に対して成り立つ。

Koksma は次の結果を証明した[16]。

[定理10] $f \in L^2$ とし，その Fourier 係数を $(c_n)$ とする。もし

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( |c_n|^2 \sum_{d|n} \frac{1}{d} \right) < +\infty .$$

ならば，殆んどすべての $\alpha$ に対して，

(E) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\{k\alpha\}) = \int_0^1 f(x)\,dx .$$

$\sum_{n=2}^{\infty} |c_n|^2 \log\log n < +\infty$ ならばこれは成立している。

Hinčin [17] によれば，

[定理11] 任意の無理数 $\alpha$ と $f \in L$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha k + \theta) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

が殆んどすべての $\theta$ について成り立つ。

これを一般化すれば次のような問題が考えられる。

「$(x_n)$ が一様分布するとき，$f \in L$ に対して

(F) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k+\theta)=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

が殆んどすべての $\theta$ について成立するための条件（$f$ と $(x_n)$ に関する）は何か？ 」

Salem は Erdős の方法によって，(F)の成立には何らかの条件が必要であることを示し [18]，更に次の結果を得た。

[定理 12] 任意の一様分布列 $(x_n)$ に対して，$f\in L^2$ が周期 1 をもち，

$$\int_0^1 f(x)\,dx=0,$$

であるならば，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n} f(t+x_k)\right|^2 dt=0.$$

[文　献]

[1] H. Weyl : Math. Ann. 77 (1916) p.313 〜 352.

[2] P. Turán − P. Erdős : Indag. Math. 10 (1948) p. 370 〜 378 and p. 406 〜 413.

[3] W. J. LeVeque : Proc. of Symposia in Pure Math. vol. VIII. (AMS) (1965) p. 22 〜 30.

[4] T. van Aardenne-Ehrenfest : Indag. Math. 11 (1949) p. 264 〜 269.

[5] K. F. Roth : Mathematatika, 1 (1954) p. 73 ~ 79.

[6] Erdös, J. F. Koksma : Indag. Math. 11 (1949) p. 299 ~ 302.

[7] J. W. S. Cassels : Proc. Camb. Phil. Soc. 46 (1950) p. 209 ~ 218.

[8] A. Ya. Hinčin : Math. Zeit. 18 (1923). p. 289 ~ 306.

[9] D. A. Raikov : Mat. Sbor. 1 (1936). p. 377 ~ 384.

[10] F. Riesz : Math. Helv. 17 (1945). p. 221 ~ 239.

[11] R. Fortet : Studia Math. 9 (1940). p. 54 ~ 70.

[12] M. Kac : Ann. of Math. (2) 47 (1946) p. 33 ~ 49.

[13] R. H. Muhutdinov : Dokl. Akad. 142 (1962) p. 36 ~ 37.

[14] A. G. Postnikov : Proc. Steklov Inst. Math. no. 82 (1966). AMS Translation (1967).

[15] P. Erdös : Trans. A. M. S. 67 (1949) p. 51 ~ 56.

[16] J. F. Koksma : Bull. Soc. Math. Belg. 6 (1953 ~ 54) p. 4 ~ 13.

[17] A. Ya. Hinčin : Recuil Math., Moscou 41 (1934) p. 11 ~ 13.

[18] R. Salem : Acta Sci. Math. Szeged 12 (1950) p. 87 ~ 96. Oeuvres Math. p. 455 (Hermann 1967).

[19] Kokima et al. : Comp. Math. 16 (1964) p. 1 ~ 203

[20] igler - Idelmberg : Jahr. der D. M. V 64 (1961) p. 1 ~ 50