数理解析研究所講究録
第73巻 1969年 67-74

有理関数による最良近似について

統計数理研　渋谷 政昭

Hastings et al [1] の計算機のための関数近似の公式集が 1955年に出版されて以来，この方面への関心と要求は強く，わが国でも数理科学綜合研究班による研究・開発が行われたりした．本稿では最近出版された，[1] の後継者とでも言うべき J. F. Hart [2] に沿って有理関数による最良近似の実用学の現状を概観する．

1. 有理関数近似の必要性．　これについて今更言うこともないが多項式近似について次の事実がある：

定理（Bernstein）：任意の系列 $\alpha_n \downarrow 0$ にたいし，$[a,b]$ で定義された連続関数であって，その n 次最良近似多項式 P_n が $\|f-P_n\| = \alpha_n$，$n=1,2,\cdots$，を満たすようなものが存在する．

逆に関数が滑らかであれば，k 回連続微分可能な関数につい

ての‘Jacksonの第2定理’，解析関数，整関数についての‘Bernsteinの定理’が多項式近似の良さを保証している．実際，有理関数近似の有効性の例は第1表のようである．単に有理関数に拡張するのではなくて，関数の特殊性を考慮した変形が著るしく有効であることは当然であるが，個々の場合の着想に依存している．

計算機が四則演算を基調とする以上多項式近似の次に有理関数近似が検討されるのは自然であるが，その先はどうか．たとえば $P(x, \sqrt{Q(x)})$，Pは2変数の，Qは1変数の多項式，という形の近似式が示唆されている．第4世代計算機では平方根算の演算も金物化される可能性がある．

2．近似式開発の現状．　[2]には次の諸関数の相対精度25けた（一部分は絶対精度）までの近似式が掲載されている：

平方根・立方根；指数・双曲線；対数；3角；逆3角；

ガンマとその対数；誤差；ベッセル；完全楕円積分．

表は詳細であって各次数のものを含み，定義区間の諸種の短縮法に応じて異なる区間における近似式を載せている．また係数のけた数は，最大誤差が0.1％以上変動しない範囲に丸めるという配慮がなされている．係数の表が151ページを占める大きな表で，非常に多くの計算機時間と労力とを費し

た産物である。若干の例をあげよう.

表1：

精度 = $\log_{10}$(最大相対誤差)；N, M = P, Q の次数

2^x, [0, 1/2]

$\approx P(x)$ N	精度	$\approx \frac{Q(x^2)+xP(x^2)}{Q(x^2)-xP(x^2)}$ N	M	精度
3	5.32	0	1	6.36
4	7.08	1	1	10.03
5	8.93	1	2	13.95
6	10.83	2	2	18.08
7	12.80	2	3	22.35

$\log_e x$, [$1/\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$], $z=\frac{x-1}{x+1}$

$\approx P(z^2)$ N	精度	$\approx z\frac{P(z^2)}{Q(z^2)}$ N	M	精度
1	5.41	1	1	8.48
2	7.68	2	2	13.92
3	9.92	2	3	16.65
4	12.13	3	3	19.38
5	14.33	3	4	22.10
6	16.52	4	4	24.83

$\sin \pi x/4$, [0, 1]

$\approx xP(x^2)$ N	精度	$\approx x\frac{P(x^2)}{Q(x^2)}$ N	M	精度
3	8.49	2	1	8.63
4	11.34	2	2	11.36
5	14.35	3	2	14.62
6	17.48	3	3	17.59
7	20.73	4	3	21.13
8	24.07	4	4	24.29

1 − erf(x), [0, 10]

$\approx P(x)/Q(x)$

N	M	精度
2	5	3.64
1	6	3.65
4	10	6.89
3	11	6.93

$J_0(x)$, [0, 8]

$\approx P(x^2)/Q(x^2)$

N	M	精度
5	5	8.54
7	3	9.43
8	8	19.22
12	4	20.54

erf(x), $J_0(x)$ の例は，分母子の次数の配分が精度にかなり関係する場合も，しない場合もあることを示している.

この本にはなお，諸形式の計算法，サブルーチンの作り方,

各関数の諸特性，等も詳しく説明されている．

もっとも使用頻度の高い関数については十分に調べられた感じだが，未だ残されているものも多い．NBS の Handbook [3] に述べられている諸関数は必ずしも良い近似式をもっていない．数理科学の諸分野で新しい要求が生じるだろうが，統計学でもたとえば，$\mathrm{erf}(x)$ の逆関数，$(e^{x}-1)/x$ の逆関数とその対数，$\exp[-\exp(-x)]$ およびその逆関数 $-\log(-\log x)$ などの近似が必要である．

多変数関数の近似は理論的困難が多く実用的結果が乏しいようであるが，たとえば，2変数正規分布の確率積分，不完全ベータ関数とその逆関数，非心ガンマ分布・非心ベータ分布の確率積分とその逆関数，などはかなりの手数をかけて計算している状況である．

3．有理関数近似の求め方．　有理関数近似の理論は，一松 [4] にまとめられているように，かなり明らかにされている．実際に近似式を求めるアルゴリズムについてはいろいろの試みがなされており，たとえば Cheney + Southard [5] に紹介されている．その中で有力と思われるのは，最良近似の次の特性を利用するものである．

定理（Chebyshev）　$[a,b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ と連続

正値関数 $w(x)$ にたいして，高々 (l, m) 次の有理関数 $R(x)=P_l(x)/Q_m(x)$ の中で

$$\delta_R = \max_{x\in[a,b]} |\varepsilon_R(x)|, \quad \varepsilon_R(x) = (f(x)-R(x))/w(x)$$

を最小にする $R^*(x)$ が（既約形としたとき）一意に存在する．$R^*(x)$ の次数を $(l-\lambda, m-\mu)$ とすると，$\varepsilon_R(x)$ は $[a,b]$ 上の少くとも $l+m+2-\min(\lambda,\mu)$ 個の点で，符号の交代する絶対値最大の値 $\pm\delta_{R^*}$ をとる．

この定理により δ_R を有限個の点での最大値と定義できることが E. Ya. Remez のアルゴリズムの要点である．

0° $a \leqq x_1^{(1)} < x_2^{(1)} < \cdots < x_{l+m+2}^{(1)} \leqq b$ を適当に定める．

1° 連立非線形方程式 $\varepsilon_R(x_i^{(k)}) = (-1)^i d^{(k)}$ を解いて，$R^{(k)}(x)$ の係数および $d^{(k)}$ を定める．

2° $R^{(k)}(x)$ に基いて新しい $\{x_i^{(k+1)}\}$ を定める．このとき δ_{R^*} のある下限が増加するように定める．

この 1°, 2° を反復する．1°, 2° の計算法により種々の変種が考えられる．$m=0$（多項式近似）の場合についてはかなりうまい方法が考えられている（たとえば Rice [6] を見よ．）が，$m\neq 0$ のときには次の2方法の局所収束（$\{x_i^{(1)}\}$ が十分に良い近似であるという条件の下での収束）が証明されている，Ralston [7]．

I（1点交代）　$|\varepsilon_{R^{(k)}}(x)|$ の最大点を s，$x_i^{(k)} \leq s \leq x_{i+1}^{(k)}$ とする．$x_i^{(k)}$，$x_{i+1}^{(k)}$ のいずれかで，その点での $\varepsilon_{R^{(k)}}(x)$ の符号が s における符号と等しい方のものを s で代えたものを $\{x_i^{(k+1)}\}$ とする．

II（全点変更）　$x_i^{(k)}$ をすべて，それと同符号でもっとも近い $\varepsilon_{R^{(k)}}(x)$ の極値点へ移す．

実際の数値アルゴリズムとしては，極値点・最大点をいかに定めるか，$\min(\lambda, \mu) \neq 0$ の縮退した場合にどうするか，を考えねばならない．

4. 実行プログラムの例．　Ralston [8] には詳しい流れ図が示してあり，Stoer [9, 10] は ALGOL のプログラムを発表している．いずれも II によっている．1° の連立方程式を解くのに，Ralston は $d^{(k)}$ の値を仮に定めて $\varepsilon_R(x_i^{(k)}) = (-1)^{i} d^{(k)}$ $i = 1, \cdots, l+m+1$ という線形化された方程式により $R^{(k)}(x)$ の係数を定め，$\varepsilon_{R^{(k)}}(x_{l+m+2}) - (-1)^{l+m+2} d^{(k)} = 0$ という $d^{(k)}$ についての方程式を secant 法で解く，という方式によっている．Stoer も $d^{(k)}$ の値を仮に定める点は同じであるが，最初の $l+m+1$ 点を通る補間連分数を差分商法により構成し，それと最後の点とのくい違いを0にするのに Newton 法を用いる（ただし改善は一回しか行わない），という方式である．

前述の $(e^x-1)/x$ の逆関数について Stoer のプログラムを利用してみたが，満足な結果を得るまでには曲折を経ねばならなかった．被近似関数を近似全区間で高い精度で正しく計算する方法を求めることが第1に必要である．また近似の効率を高めるには近似区間を分割した方がよいが，その分点を定めるのに試行錯誤によらねばならないことが多い，などの一般的な困難をここでも経験した．結果は近く別に発表したい．

[1] Hastings, C., Jr., et al (1955) Approximations for Digital Computers, Princeton Univ. Press.

[2] Hart, John F., et al (1968) Computer Approximation, John Wiley

[3] Abramowitz, M. and I.A. Stegun (ed.) (1964) Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards (1965 Dover)

[4] 一松 信 (1968) 有理関数近似について，数学，20，40 − 46.

[5] Cheney, E.W. and T.H. Southard (1963) A survey of methods for rational approximation, with particular

reference to a new method based on a formula of Darboux, SIAM Review, 5, 219 – 231.

[6] Rice, J. R. (1964) The Approximation of Functions, I., Addison – Wesley.

[7] Ralston, A. (1965) Rational Chebyshev Approximation by Remes' Algorithms, Numer. Math., 7, 322 – 330.

[8] Ralston, A. (1967) Rational Chebyshev approximation, Mathematical Methods for Digital Computers, A. Ralston and H. S. Wilf (eds.), John Wiley

[9] Stoer, J. (1964) A direct method for Chebyshev approximation by rational functions, Jour. ACM, 11, 59 – 69.

[10] Cody, W. J. and J. Stoer (1966) Rational Chebyshev approximation using interpolation, Numer. Math., 9, 177 – 188; Correction 12 (1968), 230.

[11] Lawson, C. L. (1968) Approximation theory with emphasis on computer applications, Comput. Rev., Vol. 9, No. 11, Bibliography 18, 691 – 699. [種々の項目の1つとして有理関数近似について26貢をあげているが十分に網羅的でない。]