

Skorokhod の local structure (I)

名古屋工大 櫃田 倍之

§ 1. 序

A.V. Skorokhod は, "On the local structure of continuous Markov processes" (Theory of prob and its appl. XI (1966) 336-372) において, Markov 過程の local structure を, その process の M-functional (大體, additive functional である martingale となるもの) の構造を調べあげることによって, 決定することを考察した. ここではこの論文の基本的な部分を紹介する. (I) においては, 基本的な概念を導入 ~~する~~ ^{するだけにとどめ,} (II) において, 神田護氏によつて, 主な結果が紹介されるはずである. (I) の部分でいふことは, 既に日本において, 本尾, 国田, 渡辺信三氏らによつて得られている認識の一部とみなされうるものであるが, formulation の相違もあるので, なるべく忠実に追って行きたい. しかし, 完全に理解できなかったため, 必要に応じて, 仮定を設定したり, 註を加えることについて話を進める.

特に, (I) では stochastic integral が additive functional として定義されているが, この部分だけは, 書きしなさい.

§ 2. 基本的な概念

locally compact space E 上の continuous かつ homogeneous な Markov process で次のようなものを考察する: $U \subset E$ open set $\bar{U} \subset E$, \bar{U} compact で U から出るときに process は stop される. U の内部では stop しなさい.

この markov process を $X = \{X_t, \zeta, \mathcal{M}_t, P_x\}$, $\zeta = \tau_U$ (exit time from U) とかく. これは Dynkin の本による記号であるが, 特に, σ -algebra \mathcal{M}_t は, 次の意味で completion してあるものとする:

$$\mathcal{M}_t = \bigcap_x \overline{\sigma(X_s; s \leq t)}^x \quad \overline{\cdot}^x \text{ は } P_x \text{ についての completion}$$

さらに, X は strong Markov process とする.

条件 A. $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in U} P_x \{ \zeta > t \} = 0$.

shift operator θ_h が

$$\theta_h X_t = X_{t+h}$$

をみたすように, すべての \mathcal{M}_t -可測関数に定義されているとする (実は, 上の関数から一通りにきまる).

定義 α が additive almost homogeneous functional

$$\stackrel{dt}{\iff} 1) \text{ 各 } t, \quad \alpha_t \text{ は } \mathcal{M}_t \text{ 可測}$$

$$2) P_x(\theta_s \alpha_t = \alpha_{t+s} - \alpha_s) = 1 \quad x \in U, s > 0, t \geq 0.$$

以後、単に functional とよぶことにしよう。

$\forall x \in U, P_x(\alpha_t \text{ continuous}) = 1$ のとき、continuous functional

という。 $t \in [0, \infty)$ で定義された continuous functional α_t を

考えるが、時に、 $\alpha_{3-0} = \lim_{t \uparrow 3} \alpha_t$ が存在するとき (P_x measure

1 で) $\alpha_t = \alpha_{3-0}$ ($t > 0$) と拡張して使う。

定義 φ_t が W-functional である \iff

1) additive, almost homogeneous, continuous, ≥ 0 .

2) $\sup_{x \in U} E_x \varphi_t < \infty$ ($\exists t > 0$)

定義 continuous functional α_t が M-functional である \iff

1) $E_x \alpha_t = 0, \forall x \in U$

2) ある W-functional φ_t が存在して、 $E_x \alpha_t^2 = E_x \varphi_t, \forall x \in U$

α_t に対応する $\varphi_t \in$, $\langle \alpha, \alpha \rangle_t$ とかく。

例 1. X — Feller process. A — strong infinitesimal operator, $\varphi \in D_A$ とするとき、

$$\hat{\varphi}_t = \varphi(X_t) - \varphi(X_0) - \int_0^t A \varphi(X_s) ds$$

は M-functional である。

(このとき、対応する W-functional の存在 \iff いうには、Dynkin

[1] の Th. 6.6 による。)

例 2. X — Feller process, φ_t — W-functional τ , $E_x \varphi_t = t(x)$

が連続,かつ

$$\lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in U} E_x \varphi_t = 0$$

となるものとするとき,

$$\alpha_t = \psi(x_t) - \psi(x_0) + g_t$$

は M-functional である.

§ 3. Differentiation of M-functionals.

$\alpha_t, \beta_t \in M\text{-functionals}$ とする.

$$\langle \alpha, \beta \rangle_t \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} [\langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle_t - \langle \alpha, \alpha \rangle_t - \langle \beta, \beta \rangle_t]$$

と置くとき, $\alpha_t, \beta_t, \langle \alpha, \beta \rangle_t$ の関係は ^{Theorem} ~~Lemma~~ 3.1 によって明確になる. なお, $\langle \alpha, \beta \rangle_t$ のように, W-functional の和と差にかける functional を \tilde{W} -functional とする.

Lemma 3.1. $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t, \quad \lambda = \max_k (t_{k+1} - t_k)$

とするとき, $\forall x \in U,$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} E_x \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{t_{k+1}} - \alpha_{t_k})^2 = 0$$

この Lemma の証明は, 省略するが, α_t が M-functional であるとき, 任意の measure P_x ~~に対して~~, $x \in U,$ と \mathcal{W}_t に関する martingale になることを注意すれば, ~~Doobの~~ Doob の不等式によって, 導かれる.

Theorem 3.1. $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t, \quad \lambda = \max (t_{k+1} - t_k)$

とするとき,

$$\langle \alpha, \alpha \rangle_t = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{t_{k+1}} - \alpha_{t_k})^2 \quad \text{in prob. } P_x, x \in U$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle_t = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{t_{k+1}} - \alpha_{t_k})(\beta_{t_{k+1}} - \beta_{t_k}) \quad "$$

proof. $E_x \left(\sum_{k=0}^{n-1} [(\alpha_{t_{k+1}} - \alpha_{t_k})^2 - (\langle \alpha, \alpha \rangle_{t_{k+1}} - \langle \alpha, \alpha \rangle_{t_k})] \right)^2 \equiv \delta_x \xrightarrow{(\lambda \rightarrow 0)} 0$

を示せばよいが、これは

$$\delta_x \cong 2 E_x \sum_{k=0}^{n-1} (d_{t_{k+1}} - d_{t_k})^4 + 2 E_x \sum [\langle d, d \rangle_{t_{k+1}} - \langle d, d \rangle_{t_k}]^2$$

と、Lemma 3.1, Dynkin [1] Th. 6.2 から従う。(7)

$Y_t \in \tilde{W}$ -functional, $q_t \in W$ -functional とする。ある $g(s)$ - \mathcal{M}_s -可測関数が存在して、

$$Y_t = \int_0^t g(s) d\varphi_s \quad P_x\text{-a.e.}, x \in U, t > 0$$

とかけるとき、 Y_t は q_t に 絶対連続 であるといふことになる。

◦ Y_t が q_t に絶対連続: $Y_t < q_t$

$$\Leftrightarrow \int_B d\psi_s = 0 \quad \text{if} \quad \int_B d\nu_s = 0 \quad \text{a.s. } P_x \quad \text{但し, } B \text{ は}$$

任意の linear Borel set とする。

◦ $g(s) = f(x_s) \quad P_x \text{ a.e.}, x \in U, s > 0.$

となる可測関数 f が存在する。

[注意] この命題の証明には、 $\mathcal{M}_{t_0} = \mathcal{M}_t$ が必要であると思われる。いまの場合 Markov 過程 X の path の連続性から、 \mathcal{M}_t を上を見たいようにとりなおしてあげればよい。(例之は近藤[3]とみよ)

略証)
$$\overline{\psi}_s = \overline{\lim}_{h \downarrow 0} \frac{Y_{s+h} - Y_s}{\varphi_{s+h} - \varphi_s} \quad (\text{分母が0なら0と定義する})$$

は、 \mathcal{M}_{s+h} -可測、 $\forall h > 0$ 。従って、 \mathcal{M}_{s+} 可測。

$$\overline{\psi}_s = \lim_{(a.e. P_x) h \downarrow 0} \frac{\theta_s Y_{s+h}}{\theta_s \varphi_{s+h}} = \theta_s \overline{\psi}_0.$$

従って、Markov 性により、

$$\bar{\Psi}_s \stackrel{(a.e. P_x)}{=} M_x \{ \bar{\Psi}_s | \mathcal{M}_{s+} \} \stackrel{(a.e. P_x)}{=} M_x \{ \bar{\Psi}_s | x_s \} \stackrel{(a.e. P_x)}{=} M_{x_s} \bar{\Psi}_0 = f(x_s)$$

但し, $f(x) = M_x \bar{\Psi}_0$ とする.

Remark $\langle \alpha, \beta \rangle_t$ は $\langle \alpha, \alpha \rangle_t$ に絶対連続である. これは, 細分による構成法からわかる.

定義 $\langle \alpha, \beta \rangle_t = \int_0^t g(x_s) d\langle \alpha, \alpha \rangle_s \quad (a.e. P_x) (t > 0)$

とする. $g(x) \in M$ -functional β_t の α_t に関する derivative とし α $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}(x)$ とかく.

§ 4. M -functional に関する確率積分

$\alpha_t \in M$ -functional, $\langle \alpha, \alpha \rangle_t = \sigma(t)$ とする. $\lambda(t)$ が

1) $t > 0$, $\lambda(t)$ は \mathcal{M}_t -可測

2) $\sup_{x \in U} E_x \int_0^t \lambda(s)^2 d\sigma(s) < \infty \quad (t > 0)$

をみたすとき, Doob の方法によつて, stochastic integral $\int_0^t \lambda(s) d\alpha_s$ が定義される. この § において, stochastic integral $\int_0^t g(x_s) d\alpha_s$ が additive functional になるように構成する = とを目標にする. α_t が Wiener process のときには, Dynkin [1] がある.

Theorem 4.1 $g(x)$ - 可測, $\forall t > 0$

$$\sup_{x \in U} E_x \left(\int_0^t g(x_s)^2 d\langle \alpha, \alpha \rangle_s \right) < \infty$$

とすれば, ある M -functional I_t が存在して,

$$I_t = \int_0^t g(x_s) d\alpha_s \quad (a.e. P_x, x \in U)$$

そして,

$$\langle I, I \rangle_t = \int_0^t g(x_s)^2 d\langle \alpha, \alpha \rangle_s.$$

[注意] この Theorem の ~~証明~~ は, 原論文において, 2段階に分けて証明してある. 第1段階では $g(x)$ が連続な場合, 第2段階で一般の可測関数の場合を, 連続な $g_n(x)$ による近似によって I_t が M -functional になるような version がとれるとしている. この論拠がよく理解できなかった.

Theorem 4.2 α_t, β_t — M -functionals, $g_1(x), g_2(x)$ を可測関数で, $\int_0^t g_1(x_u) d\alpha_u, \int_0^t g_2(x_u) d\beta_u$ の存在するものとする. このとき,

$$\left\langle \int_0^t g_1(x_u) d\alpha_u, \int_0^t g_2(x_u) d\beta_u \right\rangle_t = \int_0^t g_1(x_u) g_2(x_u) d\langle \alpha, \beta \rangle_u$$

[注意] 原論文の証明は, Th 4.1 の場合と同様. $g_i(x), i=1, 2$ が連続の場合しか適用可能な形になる.

系 $I_t^{(1)} = \int_0^t g_1(x_u) d\alpha_u, I_t^{(2)} = \int_0^t g_2(x_u) d\beta_u$ とすると,

$$\frac{\partial I^{(2)}}{\partial I^{(1)}}(x) = \frac{g_2(x)}{g_1(x)} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}(x)$$

§ 5. Ito の公式

Theorem 5.1 $\alpha_t^{(1)}, \dots, \alpha_t^{(n)}$ — M -functionals

$\gamma_t^{(1)}, \dots, \gamma_t^{(m)}$ — \bar{W} -functionals

$\bar{\Phi}(\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_m)$ を $n+m$ 変数, real valued, 連続

な微係数 $\bar{\Phi}_{\xi_i}, \bar{\Phi}_{\eta_k}, \bar{\Phi}_{\xi_i \xi_j}$ $i, j=1, \dots, n, k=1, \dots, m$ を持つ.

このとき,

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\alpha_t^{(1)}, \dots, \alpha_t^{(n)}, \gamma_t^{(1)}, \dots, \gamma_t^{(m)}) &= \bar{\Phi}(0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0) \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_0^t \bar{\Phi}_{\beta_i}(\alpha_s^{(1)}, \dots, \gamma_s^{(m)}) d\alpha_s^{(i)} + \sum_{k=1}^m \int_0^t \bar{\Phi}_{\gamma_k}(\alpha_s^{(1)}, \dots, \gamma_s^{(m)}) d\gamma_s^{(k)} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \bar{\Phi}_{\beta_i \beta_j}(\alpha_s^{(1)}, \dots, \alpha_s^{(n)}, \gamma_s^{(1)}, \dots, \gamma_s^{(m)}) d\langle \alpha^{(i)}, \alpha^{(j)} \rangle_s \end{aligned}$$

がなりたつ.

(この定理は, 伊藤清氏による. 変換公式と本質的に同様の証明法により得られる.)

§ 6. 若干の注意.

この(1)でふれた部分についての, ほとんどの認識は, Kunita-S. Watanabe [2] の中にふくまれるように思える. 特に, ~~TR. 5.1~~ TR. 5.1 は, より一般に, 2乗可積分な martingale に関する変換公式として, 連続でない martingale の場合も含めて得られている. 従って, この部分の証明は全く行わなかつた. さらに, W-functional に関する定義の2)は, 考察する M-functional が2次の moment を α に関して一様に持つという強い制約を設けていることになり, この点でも local martingale として一般にとらえる Kunita-Watanabe の考え方がすぐれているといえよう.

Skorokhod の問題提起そのものは, 興味深い. いままで, Markov 過程論の「内部問題」に注目した文献は少ないように思わ

れからである。

細いことであるが, Th 5.1 の右辺の stochastic integral は,
 一般に additive functional ではないので, §4 における stochastic
 integral の範囲にはいってない。 $\int_0^t g(s, \omega) d\alpha_s$ の形の積
 分が $P_x, x \in U$ によらないう意味をもつことの証明は必要であ
 る。
例には Doob の意味での

文献

- [1] E. B. Dynkin, Markov processes, Springer, (1965)
- [2] H. Kunita and S. Watanabe, On square integrable
 martingales, Nagoya Math. J. vol 30 (1967) 209-245.
- [3] 近藤亮司, Markov 過程と Potential, Seminar on Prob.
 vol 11 (1962)