数理解析研究所講究録
第 78 巻 1969 年 16-21

有界領域における多項式的増大関数に対する岡－Cartanの定理

名市大経　　岩橋亮輔

§1。序論

統計的仮説の検定理論で充足統計量による縮約を許す確率分布族の中で重要なのは指数型のものである。これはユークリッド標本空間の上のσ-有限な測度μに関して確率密度

$$p_\theta(x) = C(\theta)\cdot \exp\left[\sum_{j=1}^{s} Q_j(\theta) T_j(x)\right]\cdot h(x)$$

を持つ。2項分布，Poisson 分布，正規分布からの標本の分布がその例である。より自然な母数を用い，$h(x)$をμに吸収させて，指数型族を

$$\begin{cases} dP_\theta = p_\theta(x)\,d\mu(x) \\ p_\theta(x) = C(\theta)\cdot \exp\left[\sum_{j=1}^{s} \theta_j\cdot T_j(x)\right] \end{cases}$$

と表わす。母数　$\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_s)$ が複素数を取ることを許して、exp $\left[\sum_{j=1}^{s}\theta_j\cdot T_j(x)\right]$ の積分が有限であるようなθの全体を考える指数型族の自然母数空間という。これはR^sの凸集合を基底とする管状集合である。

標本空間上の有界可測関数$\phi(x)$に対して積分

$$\int \phi(x)\cdot \exp\left[\sum_{j=1}^{s}\theta_j\cdot T_j(x)\right] d\mu(x)$$

は自然母数空間の内部でθについて解析的である。複素解析が指数型族の研究に応用されることを示唆している。実際すでにH. Cramér　，

D. Dugué　、D. Raikov 等の研究があり最近では、ソ連の Yu. V. Linnik, V. Palamadu, A. Kagan の解析的統計学に発展している（［１］、［２］、［３］）。

また指数型族の研究において Laplace 変換は重要な手段として用いられる。Lebesgue 測度に関して殆ど到る所連続な関数 $m(T)=m(T_1,\cdots,T_s)$ の Laplace 変換 $L(m|\theta)$ は

$$L(m|\theta)=\int m(T)\cdot\exp[-\theta\cdot T]\,dT$$

で定義される。応用上は、$T_j<0,\ j=1,\cdots,s_1(\leqq s)$ において $m(T)=0$ の場合が多い。したがって、$L(m|\theta)$ は帯状領域 $0<\mathrm{Re}\,\theta_j<a_j\ (\leqq+\infty)$ の直積 P で θ について解析的と考えても一般性を失わない。統計的仮説の検定理論では、P での解析関数を $\overline{P}$ での解析的集合との関係において詳しく調べる必要がある。特に $F(\theta)$ が P で有界かつ解析的、$f_1(\theta),\cdots,f_r(\theta)$ が $1/(\theta_j+1)$、$j=1,\cdots,s$、について $\overline{P}$ で解析的であるとき、

$$\begin{cases} F(\theta)=\sum_{i=1}^{r} f_i(\theta)\,G_i(\theta) \\ G_i(\theta)\ \text{は}\ P\ \text{で解析的} \end{cases}$$

と表わしたときの $G_i(\theta)$ の挙動について知る必要がある。変換 $z_j=1/(\theta_j+1)$、によって P は $\mathbb{C}^s$ の有界領域 Ω に対応するから、問題を Ω で考えて論ずる方が都合がよい。

定理（Linnik［１］）。$f_1,\cdots,f_r$ を $\overline{\Omega}$ で解析的かつ Ω において共通零点を持つとする。F が Ω で解析的かつ有界：$|F(z)|\leqq M,\ z\in\Omega$ とする。$G_1,\cdots,G_r$ を Ω で解析的として、

$$F(z)=\sum_{i=1}^{r} f_i(z)\,G_i(z),\quad z\in\Omega$$

が成立するとき、

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(z)\right)=r,\quad z\in\overline{\Omega}$$

ならば、適当な c、ρ が存在して, F の表示で G_i を

$$|G_i'(z)|\leq c\cdot M\cdot(d(z))^{-\rho},\quad z\in\Omega,\ i=1,\cdots,r$$

なる G_i' で置換えることが出来る.
ここで $d(z)$ は z と $\int\Omega$ との距離を表わす。

この定理は $f_1,\cdots,f_r$ に対する強い制限の為応用上不便である。さらに F の有界性を弱めたい。$\mathbb{C}^s$ の有界な開集合 Ω での解析関数 F は適当な定数 c、ρ に対して

$$|F(z)|\leq c\cdot(d(z))^{-\rho},\quad z\in\Omega$$

を満たすとき、多項式的増大関数という。

定理（岩橋「3」、R. Narasimhan「4」）。f を $\overline{\Omega}$ において解析的、F を Ω において多項式的増大とする。$G=F/f$ が Ω において解析的ならば、G は Ω において多項式的増大関数である。これは Linnik の定理で $r=1$ としたものに当る。Linnik の証明では Łojasiewicz の不等式を利用しているが、この場合は直接の初等的な証明がある。一般の r の（場合に）拡張することが以下の目的である。しかし、Ω は多重円板の場合に限る。証明は Palamadov「5」の手法に負う。

§ 2. 多項式的増大関数に対する岡－Cartan の定理。

Ω を $\mathbb{C}^n$ の有界多重円板とし、Ω での解析関数の全体を $A(\Omega)$ で表わす。$Q(\Omega)$ で Ω での多項式的増大関数の全体を表わす。すべての $Q_{c,\rho}(\Omega)=$

$\{ f \in A(\Omega) \} \mid |f(z)| \leq c\cdot(d(z))^{-p},\ z\in\Omega \}$ を有界集合とする最強の位相を$Q(\Omega)$に入れる。$\alpha=(\alpha_{ij})\in A^{p\times q}(\overline{\Omega})$ は写像 $\alpha_Q: Q^q(\Omega)\to Q^p(\Omega)$ を引き起す。α_Qは位相的準同型写像であるか？また$\mathrm{Im}\,\alpha_Q$ はいかに特徴付けられるか？α自身については

定理（岡－Cartan）$\forall g\in A^p(\Omega)$ に対して、
$g\in \mathrm{Im}\,\alpha \iff \forall z\in\Omega:\ g_z\in\mathrm{Im}\,\alpha_z$ （g_z、α_z は z における芽を表わす）」がある。この定理はそのまま多項式的増大関数の場合にも成立する。

定理。$\forall g\in Q^p(\Omega)$ に対して、 $g\in\mathrm{Im}\,\alpha_Q \iff \forall z\in\Omega:\ g_z\in \mathrm{Im}\,\alpha_z$

また、α_Qは位相的準同型写像である。」 $p=1,\ q=r$ とすれば Linnik の定理の精密化が得られる：$\alpha=(f_1,\cdots,f_r)$. 証明の方針を述べる。

1°. $\alpha_z:\ \mathcal{O}^q_{\Omega,z}\to\mathcal{O}^p_{\Omega,z}$ の代りに $\tilde\alpha_z:\mathcal{S}_z^q\to\mathcal{S}_z^p$ （$\mathcal{S}_z$ は z 中心の形式的整級数環）を考えてよい。実際、$\mathcal{O}_{\Omega,z}$ の完備化 $\hat{\mathcal{O}}_{\Omega,z}$ は $\mathcal{S}_z$ に等しい。

2°. すべての $z\in\Omega$ に対して、$\mathcal{S}_z^p$ の恒等写像 I は

$$I=\tilde\gamma_z+\tilde\alpha_z\cdot\tilde\beta_z$$

と分解される。ここで、

$$\tilde\beta_z:\ \mathcal{S}_z^p\to\mathcal{S}_z^q\ ,\qquad \tilde\gamma_z:\ \mathcal{S}_z^p\to\mathcal{S}_z^p$$

は線型で、

$$\tilde\gamma_z \mid \mathrm{Im}\,\tilde\alpha_z = 0.$$

3°. $A_r = A(\overline{\Omega}_r)$ 、$\overline{\Omega}_r := \{z\in\Omega\} |z|\le r\}$ とするとき、$\tilde\beta_z$ は $0<\varepsilon\le1$ なる任意の ε に対して、写像 $A^p_\varepsilon\to A^q_{r(z)\varepsilon}$ を定義し、

$$\|\tilde\beta_z g\|_{r(z)\varepsilon}\le \frac{1}{(r(z)\varepsilon)^k}\|g\|_\varepsilon,\quad k>0.$$

ここで $r(z)$ は次のように定義される；解析的集合の列 $\overline{\Omega} = N_0>N_1>\cdots>N_{m+1}=\phi$ が存在して、$z\in N_\mu - N_{\mu+1}$ のとき、
$r(z)=c\cdot(d(z,N_{\mu+1}))^k$ $(\mu=0,\cdots,m)$.（$d(z,N_{m+1})=1$ と定める）.
$\tilde\gamma_z$ についても同様である.

4°. $\kappa \geqq 0$、$0<\lambda \leqq 1$ に対して、$z \in \Omega$ 中心の半径 $\lambda(d(z))^k$ の円板を ω_z で表わす。 $\mathfrak{U}_{\kappa,\lambda} := \{\omega_z\}_{z\in\Omega}$, $C^i_{\kappa,\lambda} := \{$係数が $z \to \partial\Omega$ のとき $O(d(z))^k$ である i-cochain ($\mathfrak{U}_{\kappa,\lambda}$ の上の) $\}$、$C^i_{\kappa,\lambda}$ には自然に位相が入る。coboundary $\delta^i : C^i_{\kappa,\lambda} \to C^{i+1}_{\kappa,\lambda}$ は連続である。 $\mathrm{Ker}\,\delta^0 = Q(\Omega)$.

5°. κ, λ; $i>0$ に対して $\zeta \in Z^i_{\kappa,\lambda}$ に $\gamma \in C^{i-1}_{\kappa,\frac{\lambda}{2}}$ が連続的に対応して、$\zeta = \delta^{i-1}\gamma$。これは多項式的増大の C^∞ 関数に対する Cauchy-Riemann に帰着させて証明される。

6°. $z \in \Omega$ 中心の半径 $\delta < d(z)$ の円板を ω とする。$g \in A(\Omega)$ がすべての $z \in \Omega$ に対して $\tilde{g}_z \in \mathrm{Im}\,\tilde{\alpha}_z$ を満たすとき、z 中心の半径 $\frac{\delta}{2}$ の円板 ω_0 で解析的な f が存在して

$$\alpha f = g, \quad \|f\|_{\omega_0} \leqq \frac{c}{(\delta,\ d(z, \complement\omega))^k}\|g\|_\omega$$

7°. $g \in Q^r(\Omega)$ がすべての z に対して、$\tilde{g}_z \in \mathrm{Im}\,\tilde{\alpha}_z$ を満すとする。すべての $z \in \Omega$ の近傍で $g = \tilde{\alpha}_z \tilde{\beta}_z g$.

このような近傍による Ω の被覆より細い被覆 $\mathfrak{U}_{\kappa,\lambda}$ をとる。$\tilde{\beta}_z g$ は $\mathfrak{U}_{\kappa,\lambda}$ の上の 0-cochain を定義する。$\gamma \in C^0_{\kappa,\lambda}$ が示される。$\delta^0\gamma =$ なら定理は証明された。$\delta^0\gamma \neq 0$ なら、$\alpha\delta^0\gamma = 0$ に注意すれば、6° によつて、$\delta^0\gamma$ は $\tilde{\alpha}^1_z\gamma'$ の形。ここで $\to \mathfrak{S}_z^{s^1} \xrightarrow{\tilde{\alpha}^1_z} \mathfrak{S}_z^{s} \xrightarrow{\tilde{\alpha}_z} \mathfrak{S}^1_z$ は完全列、$\gamma' \in (C^1_{\kappa,\lambda'})^{s'}$ ($\lambda' < \lambda$) $\delta^1\gamma' = 0$ のとき、5° によつて $\gamma' = \delta^0\gamma''$, $\gamma'' \in (C^0_{\kappa,\frac{\lambda'}{2}})^{s'}$ の形。したがつて、$f = \gamma' - \tilde{\alpha}^1_z\gamma''$ が求める関数である。$\delta^1\gamma' \neq 0$ のときは同様な議論を続ける。

参考文献

1. Yu. V. Linnik : *Statistical Problems with Nuisance Parameters*. Nauka, 1966 (英訳:Amer. Math. Soc., 1968)

2. ______________ : *Leçons sur les problèmes de statistique analytique*. Gauthier-Villars, 1967.

3. 岩橋亮輔 :数理統計学における複素解析的問題. Oikonomika, 4(1967),pp.14-18.

4. R. Narasimhan : On holomorphic functions of polynomial growth in a bounded domain. Annali Sc. N. S.Pisa, *III*,XXI(1967), pp.161-166.

5. V. P. Palamadov : *Linear Differential Operators with Constant Coefficients*. Nauka, 1967.