数理解析研究所講究録
第 81 巻 1970 年 33-45

多値論理について

東大・理・数
細井 勉

"多値論理" というとき，一般には，Łukasiewicz の多値論理を指すものと受取られがちである．しかし，Łukasiewicz の多値論理は，Rosser と Turquette の仕事によって，基礎論的には，一段落しており，興味もうすれているようである．また，記号論理を研究する手段としては，Łukasiewicz の多値論理は，たいして有用なモデルを与えてはいない，という欠点も考えられる．記号"論理"の研究対象とはいささか異種のものを扱っていることが，その理由でもあろうか．

そこで，基礎論（特に数理論理学）においてよく利用されている多値論理と，そこでのいくつかの結果について，簡単に紹介したい．この種の多値論理は，Łukasiewicz の多値論理が二値論理の一種の拡張であるように，やはり，二値論理の一種の拡張であるが，Łukasiewicz のものとは別

の方向へ拡張がなされたものである.

多値論理は，あくまでも，論理であるので，まず，"論理"の定義からはじめねばならない.

1. 論理

論理を定義する方法はいろいろとあろう.

また，論理とは何か，と見る，見方もいろいろあろう. Łukasiewicz 系統(?)では，基本的な論理とは二値論理であり，その中での論理演算を本質と見て，論理を考えているようである. 工学的応用などでは，このことは有効なのであろう. これとは別に，論理とは，valid (provable) formula の集合としてみて，代数的な意味の論理演算には重きをおかない見方もある. ここでは，後者の立場で，議論を展開したい.

範囲を，命題論理に限定しておくことにする. 論理記号としては，$\rightarrow$ (if ……, then ……), & (and), V (or), $\neg$ (not) の四つを考える. 命題変数としては，アルファベットの小文字を用いる. 普通のようにして，wff (well-formed formula) を定義する. wff を表わすのに，アルファベットの大文字を用いる. wff 全体の集合

を $\mathbb{W}$ とする．

基礎論では，たいていの場合，"論理"を次のように定義する．

<u>定義 1.1</u> wff の集合で，modus ponens と代入法則に関して閉じたものを，"論理"とする．"論理"が公理系（or モデル）で定義されている場合，その"論理"に属す wff は，provable（or valid）であると言われる．"論理"全体を $\mathfrak{L}$ で表わす．

<u>例 1.2.</u> 次の $\mathbb{L}_0$, $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{LK}$, $\mathbb{LJ}$ は論理である．

$\mathbb{L}_0 \overset{\text{def.}}{=\!=} \mathbb{W}$

$\mathbb{L}_1 \overset{\text{def.}}{=\!=} \{A \to A \mid A \in \mathbb{W}\}$

$\mathbb{LK} \overset{\text{def.}}{=\!=}$ {二値論理で valid な wff}

$\mathbb{LJ} \overset{\text{def.}}{=\!=}$ {直観主義論理で provable な wff}

定義により，論理とは，wff の集合なので，論理と論理の間に，集合の意味での包含関係 $\supset$, $\supsetneqq$，等が定義される．二つの論理が集合として一致することを，記号 $\supset\subset$ で表わすことにする．

$\mathfrak{L}$ において，集合演算 $\cup$ と $\cap$ とを考えたい．

"modus ponens に関して閉じている" という条件から，$\cup$ の定義に工夫が必要となる．

<u>定義 1.3.</u> $\Lambda \neq \phi$, $\lambda \in \Lambda$, $\mathbb{L}_\lambda \in \mathcal{L}$ に対し，

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{L}_\lambda \overset{def.}{=\!=} \{A \mid A \in \mathbb{L}_\lambda \text{ for all } \lambda\in\Lambda\}$$

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{L}_\lambda \overset{def.}{=\!=} \bigcap \{\mathbb{L} \in \mathcal{L} \mid \mathbb{L} \supset \mathbb{L}_\lambda \text{ for all } \lambda\in\Lambda\}$$

により，$\cup$ と $\cap$ を定義する．

<u>系 1.4.</u> $\mathcal{L}$ は $\supset$ を順序関係とし，$\cup$ と $\cap$ に関して，complete lattice である．

基礎論では，$\mathbb{LK} \supset \mathbb{L} \supset \mathbb{LJ}$ であるような論理 $\mathbb{L}$（中間論理という）を取扱うことが多い．

<u>定義 1.5.</u> $\mathcal{J} = \{\mathbb{L} \mid \mathbb{LK} \supset \mathbb{L} \supset \mathbb{LJ}\}$

<u>定理 1.6.</u> $\mathcal{J}$ は complete lattice であり，関係

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{L}_\lambda\right) \cap \mathbb{L} \supset\subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (\mathbb{L}_\lambda \cap \mathbb{L})$$

は，ここで特長的である．

<u>問題 1.7.</u> $\mathcal{L}$, $\mathcal{I}$ の濃度は?

2. モデル

モデルにより論理を定義する方法も, いくつかあるが, ここでは, Łukasiewicz と類似の方法を用いることにする. (他にも, Kripke の方法等は有名である.)

モデル$\mathbb{M}$の定義法はよく知られている通りである. しかし, 念のため, はっきりさせておこう.

まず, truth value の集合 $V_{\mathbb{M}}$, designated value の集合 $D_{\mathbb{M}}$ として $V_{\mathbb{M}}$ の一つの部分集合, $V_{\mathbb{M}} \times V_{\mathbb{M}}$ から $V_{\mathbb{M}}$ への三つの関数 $\underset{\mathbb{M}}{\rightarrow}$, $\underset{\mathbb{M}}{\&}$, $\underset{\mathbb{M}}{\vee}$, $V_{\mathbb{M}}$ から $V_{\mathbb{M}}$ への関数 $\underset{\mathbb{M}}{\neg}$ を用意する. f を, {命題変数} から $V_{\mathbb{M}}$ への関数 (assignment function) とする. wff A に対し, $f(A)$ の値とは, A の中の命題変数に対し f で定まる $V_{\mathbb{M}}$ の元を代入し, $\rightarrow$, $\&$, $\vee$, $\neg$ をそれぞれ $\underset{\mathbb{M}}{\rightarrow}$, $\underset{\mathbb{M}}{\&}$, $\underset{\mathbb{M}}{\vee}$, $\underset{\mathbb{M}}{\neg}$ でおきかえたとき, その結果として定まる $V_{\mathbb{M}}$ の元のこととする.

<u>定義 2.1.</u> $\mathbb{M} = (\mathbb{V}_{\mathbb{M}}, D_{\mathbb{M}}, \underset{\mathbb{M}}{\rightarrow}, \underset{\mathbb{M}}{\&}, \underset{\mathbb{M}}{\vee}, \underset{\mathbb{M}}{\neg})$ が論理 $\mathbb{L}$ のモデルであるということを,

$$\mathbb{L} \supset \{A \mid A \in \mathbb{W}, f(A) \in D_{\mathbb{M}}, \text{ for all } f\}$$

により定義する．特に，論理$\mathbb{L}$というかわりに，略して，(多値)論理$\mathbb{M}$とも言う．$\mathbb{M}$は$(V_{\mathbb{M}}, D_{\mathbb{M}})$とか$(V, D)$とか，略記されることもある．

ある論理$\mathbb{L}$を定義するモデル(その存在は，すぐ後で述べる)は*unique*ではない．

<u>定理2.2.</u> $^{\forall}\mathbb{L} \in \mathcal{L}$に対し，$\mathbb{M} \supset\subset \mathbb{L}$となるモデル$\mathbb{M}$で，$^{\#}V$が可付番であるものが存在する．

(証明) $V_{\mathbb{M}} = \mathbb{W}$，$D_{\mathbb{M}} = \mathbb{L}$ととれば明きらか．この場合，$^{\#}D_{\mathbb{M}}$も可付番である($^{\#}\mathbb{L}$は必ず可付番)．

この定理により，論理を問題とするかぎり，たかだか，可付番モデルを考えれば十分，であることがわかる．

<u>定理2.3.</u> $\mathbb{L} \in \mathcal{J}$のモデル$\mathbb{M}$において，$u, v \in V_{\mathbb{M}}$に

$$\text{対し，} u \geqq v \iff u \xrightarrow[\mathbb{M}]{} v \in D_{\mathbb{M}}$$

と定義すると，$\geqq$は$V_{\mathbb{M}}$に対するpseudo-orderとなる．
特に，$^{\#}D_{\mathbb{M}} = 1$のときは，orderとなる．

(証明略)

<u>定義 2.4.</u> モデル $\mathbb{M}$ が次の4条件を満足するとき，k-regular であるという．

(1) $^{\#}D_{\mathbb{M}} = k \qquad (1 \leq k \leq \infty)$

(2) $D_{\mathbb{M}} \ni u,\ u \xrightarrow[\mathbb{M}]{} v \Rightarrow D_{\mathbb{M}} \ni v$

(3) $D_{\mathbb{M}} \ni v \Rightarrow D_{\mathbb{M}} \ni u \xrightarrow[\mathbb{M}]{} v$ for all $u \in V_{\mathbb{M}}$

(4) $\mathbb{M} \in \mathcal{L}$.

(条件 (3) は次の (3′) から得られるものである．

(3′) $D_{\mathbb{M}} \ni v \Rightarrow {}^{\exists}$ assignment function f. ${}^{\exists}A \in \mathbb{M}$, s.t. $f(A) = v$

<u>定理 2.5.</u> k-regular モデル $\mathbb{M}$ $(k > 1)$ に対し，$\mathbb{M} \supset\subset \mathbb{N}$ であるような 1-regular モデル $\mathbb{N}$ が存在する．

(証明) $V_{\mathbb{M}}$ 中の equivalence relation $\sim$ を

$$u \sim v \Leftrightarrow D_{\mathbb{M}} \ni u \xrightarrow[\mathbb{M}]{} v,\ v \xrightarrow[\mathbb{M}]{} u$$

により定義し，$\mathbb{N} = (V_{\mathbb{M}}/\sim,\ D_{\mathbb{M}}/\sim)$ とすればよい．$\xrightarrow[\mathbb{N}]{}$ 等は，代表元に対する $\xrightarrow[\mathbb{M}]{}$ 等により定めればよい．

$\mathcal{L}$ の元である論理を考えるとき，1-regular モデルが本質的であることがわかる．

一般には $\mathcal{L}$ の元 $\mathbb{M}$ においては，$^{\#}D_{\mathbb{M}} = 1$ に reduce できるとはかぎらない．たとえば，$\mathbb{L}_1$ はその反例となる．

定義2.4は，$^{\#}D_{\mathbb{M}}=1$ にreduceできるための十分条件を述べたものであって，ぎりぎりのところを述べたものではない．しかし，その中の条件(4)は少ししかゆるめられないであろう．

<u>定理2.6.</u> $^{\#}V_{\mathbb{M}}<\infty$ であるような1-regularモデルで定義される論理は，有限的に公理化できる(手続きがある)
(証明略)

<u>問題2.7.</u> $^{\#}V_{\mathbb{M}}=\infty$ の場合，あるいはむの元での場合ではどうか？

1-regularモデル $\mathbb{M}$ では，2.3の $\geqq$ を $V_{\mathbb{M}}$ の順序とするとき，$V_{\mathbb{M}}$ は $\underset{\mathbb{M}}{\&}$, $\underset{\mathbb{M}}{\vee}$ を $\cup$, $\cap$ としたlatticeであることがわかる．こまかい説明や定義は略すが，次の定理は有名．

<u>定理2.8.</u> 1-regularモデル $\Longleftrightarrow$ 最大元をもつ relatively pseudo-complemented lattice.

<u>問題2.9.</u> 一般の論理のモデル $\mathbb{M}$ では，$V_{\mathbb{M}}$ のlattice構造は

次に，Łukasiewicz の多値論理に準じた論理を定義する．

<u>定義 2.10.</u> $\mathcal{S}_n = (\{1, 2, \cdots, n, \omega\}, \{1\})$ $(1 \leq n \leq \omega)$

$$u \underset{\mathcal{S}_n}{\longrightarrow} v = \begin{cases} 1 & \text{if } u \geq v \\ v & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$u \underset{\mathcal{S}_n}{\&} v = \max\{u, v\}$$

$$u \underset{\mathcal{S}}{\vee} v = \min\{u, v\}$$

$$\underset{\mathcal{S}_n}{\neg} u = \begin{cases} \omega & \text{if } u \neq \omega \\ 1 & \text{if } u = \omega \end{cases}$$

ここで，$\omega > i$ $\quad (1 \leq {}^{\forall} i \leq n)$ とする．

<u>定理 2.11.</u> (1) $\mathcal{S}_n \in \mathcal{J}$

(2) $\mathbb{LK} \supset\subset \mathcal{S}_1 \supsetneqq \mathcal{S}_2 \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathcal{S}_n \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathcal{S}_\omega \supsetneqq \mathbb{LJ}$

(3) $\mathcal{S}_i$ と $\mathcal{S}_{i+1}$ の間の論理は存在しない $(i = 1, 2, \cdots)$

(証明略)

<u>定理 2.12.</u> $\mathcal{J}$ において

(1) $\neg$ はどんな論理においても定義不能．

(2) $\rightarrow$ と $\&$ は $\mathcal{S}_1$ においてのみ定義可能．

(3) $\vee$ は $\mathcal{S}_n$ $(1 \leq n \leq \omega)$ においてのみ定義可能．

（証明略）

3. operation

<u>定義3.1.</u> モデル$\mathbb{M}_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$に対し，その直積を，

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{M}_\lambda=\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}V_{\mathbb{M}_\lambda},\prod_{\lambda\in\Lambda}D_{\mathbb{M}_\lambda}\right)$$

（Πは直積を表わす）とし，論理演算を，

$$\Pi u_{\mathbb{M}_\lambda}\longrightarrow\Pi v_{\mathbb{M}_\lambda}\overset{def}{=}\Pi\left(u_{\mathbb{M}_\lambda}\underset{\mathbb{M}_\lambda}{\longrightarrow}v_{\mathbb{M}_\lambda}\right)$$

のようにして定義する．これはモデルである．

<u>定理3.2.</u> $\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{M}_\lambda=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{M}_\lambda$

<u>問題3.3.</u> モデル$\mathbb{M}_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$に対し，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{M}_\lambda$のモデルを得るためには，どのような，モデル上の演算を定義すればよいか？

<u>定義3.4.</u> $\mathbb{L}+A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n$とは，論理（モデルでもかまわない）$\mathbb{L}$に，$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$を公理として追加して得られる論理．

定理 3.5. $\mathbb{L} \in \mathcal{I}$ とし，A，B は共通な命題変数をもたないとする．

(1) $(\mathbb{L}+A)^{\cup}(\mathbb{L}+B) \supset\subset \mathbb{L}+A+B \supset\subset \mathbb{L}+A\,\&\,B$

(2) $(\mathbb{L}+A)\cap(\mathbb{L}+B) \supset\subset \mathbb{L}+A^{\vee}B$

$\mathcal{I}$ の元の 1-regular モデル $\mathbb{M}_1$，$\mathbb{M}_2$ に対し，$\mathbb{N}=\mathbb{M}_1 \uparrow \mathbb{M}_2$ として次のようなモデルを考えることがある．すなわち，lattice $V_{\mathbb{M}_1}$ の上に $V_{\mathbb{M}_2}$ をのせて（i.e. $V_{\mathbb{M}_2}$ の元は $V_{\mathbb{M}_1}$ の元より大きいとする）$V_{\mathbb{M}_1}$ の最大元と $V_{\mathbb{M}_2}$ の最小元を同一視して得られる lattice を，定理 2.8 によるモデルと見て，それを $\mathbb{N}$ とする．

問題 3.6. $\mathcal{S}_1$ に operation を施こして $\mathcal{I}$ の元をすべて得るためには，どのような operation を用意すればよいか．
（直積と $\uparrow$ だけでは足りない）．

4. 分類

$\mathcal{I}$ の元の分類を考える．

定義 4.1 $\mathcal{S}_n=\{\mathbb{L}\in\mathcal{I} \mid \mathbb{L}^{\cup}\mathcal{S}_\omega \supset\subset \mathcal{S}_n\}$ $(1\leq n\leq\omega)$

定理4.2. $\mathcal{J} = \sum_{n=1}^{\omega} \mathcal{S}_n$ （直和）

定義4.3. $Z = ((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c)$

$K = ((a_1 \to a_0) \to a_1) \to a_1$

$X_n = \bigvee_{1 \leq i < j \leq n+1} ((a_i \to a_j) \& (a_j \to a_i))$

$R_n = a_1 \vee (a_1 \to a_2) \vee (a_2 \to a_3) \vee \cdots \vee (a_{n-1} \to a_n) \vee \neg a_n$

$$\begin{cases} P_1 = K \\ P_{i+1} = ((a_{i+1} \to P_i) \to a_{i+1}) \to a_{i+1} \quad (i \geqq 1) \end{cases}$$

$\mathbb{LP}_n = \mathbb{LJ} + P_n$

定理4.4. (1) $S_n \supset\subset \mathbb{LJ} + R_n \supset\subset \mathrm{LJ} + P_n + Z$ $(n < \omega)$

(2) $S_\omega \supset\subset \mathbb{LJ} + Z$

定理4.5. S_nと$\mathbb{LP}_n$は$\mathcal{S}_n$の最大元と最小元.

定義4.6. $r(\mathbb{L}) = \min\{i \mid X_i \in \mathbb{L}\}$

定理4.7. (1) $\mathbb{L} \in \mathcal{S}_n \Rightarrow r(\mathbb{L}) \geqq n+1$

(2) $r(\mathbb{L}) = \omega \Rightarrow \mathbb{L}$は有限モデルを持たない.

(3) $\mathcal{S}_\omega$の元は有限モデルを持たない.

(4) $\mathbb{LJ}+A \in \mathcal{S}_n$ $(n<\omega) \Rightarrow A$は少くともn個の命題変数をもつ.

問題4.8. (1) $\mathbb{LP}_n$ のモデルは?

(2) $\mathcal{S}_n \ni \mathbb{L}$ のとき, $\mathbb{L} \supset\subset \mathbb{LJ}+A$ となるようなn変数のwff Aを定め得るか.

(3) $\gamma(\mathbb{L})=n$のとき, $\mathbb{L}$に対し $^{\#}V=n$ のモデルを与え得るか. Yesという説もあるが, 多分no?

(4) 1-regular モデルでは, かならず, 最小元のすぐ上の元が一つしかないような, 同値なモデルを見つけ得るか. Yesという説もあるが, 多分no?

(5) $\mathcal{S} \ni \mathbb{L}$に対し, $\mathbb{L}$がfinite modelを持たないことの有限的な判定法は?

(6) モデルがseparable axiomatization (定義略)をもつ必十条件は?

(7) M↑Nの公理化は?