

三値しきい値関数について

三 根 久

(京都大学工学部数理工学教室)

藤 田 志 郎

(津山工業高等専門学校)

On Three-Valued Threshold Functions

Hisashi Mine

(Faculty of Engineering, Kyoto University)

Shiro Fujita

(Tsuyama Technical College)

§ 序 論

二値しきい値関数の判定と実現に際しては、庄々その重みは整数であると仮定されるが、二値論理の場合は、与えられた論理関数がしきい値関数であれば整数の重みが存在することが証明されている。¹⁾ 三値しきい値関数の判定と実現に際しても、重みを整数と仮定することによってその手法の展開が容易になることは十分考えられる。そこで、まず三値しきい値関数における公差 (tolerance) を定義し、三値論理の場合も、与えられた論理関数がしきい値関数であれば整数の重みをもつことを示す。

つぎに、三値論理関数の特性パラメータを定義し、しきい値関数はこのパラメータと対応することも示す。さらに、特性パラメータとしきい値関数の重み、しきい値等の間には成立するいくつかの性質について述べる。

§ 1 三値しきい値関数

しきい値関数の定義

論理変数 x およびその関数 f の真理値は整数値 $0, 1, 2$ とする。真理値自身および他の実数値との四則演算を考える。

また、大小関係は $0 < 1 < 2$ とする。

n 個の論理変数 x_1, x_2, \dots, x_n は x_i ($i=1, 2, \dots, n$) を i 座標

とする n 次元空間の点(格子点)とみなすと, $x_i = 0$ or 1 or 2 であるから, (x_1, x_2, \dots, x_n) はこの空間の 3^n 個の格子点に対応する。そこで、今後 (x_1, x_2, \dots, x_n) を X とかく。

n 変数の論理関数 $f(X)$ において

$$w(X) \geq T_2 \quad \text{ならば} \quad f(X) = 2$$

$$T_2 > w(X) > T_0 \quad \text{ならば} \quad f(X) = 1 \quad (1)$$

$$T_0 \geq w(X) \quad \text{ならば} \quad f(X) = 0$$

となる実定数 $w_1, w_2, \dots, w_n, T_2, T_0$ ($T_2 > T_0$) が存在するとき $f(X)$ をしきい値関数という。

$$\text{ここで,} \quad w(X) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n$$

があり, w_i を重み, T_2, T_0 をしきい値という。

$$F_2 = \{X; f(X) = 2\}, \quad F_1 = \{X; f(X) = 1\}, \quad F_0 = \{X; f(X) = 0\}$$

とすると, しきい値関数は n 次元空間における平行なる二つの超平面

$$w(X) = T_2, \quad w(X) = T_0$$

が存在して, F_2, F_1, F_0 を分離していると考えうるので,

$$S = (w_1, w_2, \dots, w_n; T_2, T_0)$$

をしきい値関数の分離系 (separating system) という。とくに,

(1)式において $=$ のないときは完全分離系という。

つづいて本報告に必要な定義を述べる。

否定

論理変数 x の否定を \bar{x} とかき $\bar{x} = 2 - x$ とする。

対称関数

$f(X)$ において

$$f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

のとき x_i と x_j に関して対称であるといふ。任意の x_i, x_j ($1 \leq i, j \leq n$) に関して対称であるとき $f(X)$ を対称関数といふ。

unate な関数

$f(X)$ において $x_{i_1} = \alpha_1, x_{i_2} = \alpha_2, \dots, x_{i_k} = \alpha_k$ ($\alpha_j = 0$ or 1 or 2) とした関数を

$$f_{i_1, i_2, \dots, i_k}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \quad \text{とかく。}$$

また $f(X), g(X)$ において

$$F_2 \supseteq G_2, \quad F_2 \cup F_1 \supseteq G_2 \cup G_1 \quad \text{が成立するとき}$$

$$f(X) \geq g(X) \quad \text{とする。}$$

$f(X)$ において

$$f_i(0) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} f_i(1) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} f_i(2) \quad \text{が成立するとき}$$

x_i に関して単調増加(減少)であるといふ。すべての x_i について単調増加または減少であるとき $f(X)$ を unate な関数といふ。

以下、しきい値関数について成立するいくつかの性質を述

べる。

[命題 1.1] $f(X)$ をしきい値関数とすると、その完全分離系は必ず存在する。

(証明) $f(X)$ の分離系を $S(w_1, w_2, \dots, w_n; T_2, T_0)$ とする。

$$\text{すなわち, } L_2 = \min\{w(X); X \in F_2\}, \quad U_1 = \max\{w(X); X \in F_1\}$$

$$L_1 = \min\{w(X); X \in F_1\}, \quad U_0 = \max\{w(X); X \in F_0\}$$

とする。 $T_2 \neq L_2$, $T_0 \neq U_0$ ならば、 S 自身が完全分離系である。

ゆえに、 $L_2 = T_2$, $U_0 = T_0$ の場合を考える。

$$\frac{1}{2}(L_2 - U_1) = C_2 \quad \text{として} \quad T_2' = T_2 - C_2 \quad \text{とする。}$$

$$w(X) \geq T_2 > T_2 - C_2 = T_2'$$

すなわち、 $w(X) > T_2'$ のとき $f(X) = 2$ となる。

また明らかに、 $T_2' > w(X) > T_0$ のとき $f(X) = 1$ である。

$$\text{つまり、} \frac{1}{2}(L_1 - U_0) = C_0 \quad \text{として} \quad T_0' = T_0 + C_0 \quad \text{とする。}$$

$$T_2' > w(X) > T_0' \quad \text{のとき} \quad f(X) = 1$$

$$w(X) \leq T_0 < T_0 + C_0 = T_0' \quad \text{のとき} \quad f(X) = 0 \quad \text{となる。}$$

ゆえに、 $S'(w_1, w_2, \dots, w_n; T_2', T_0')$ は $f(X)$ の完全分離系である。

[定理 1.1] しきい値関数 $f(X)$ の分離系を $S(w_1, w_2, \dots, w_n; T_2, T_0)$ とする。このとき $f(x_1, x_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_n)$ もまたしきい値関数であり、分離系は $S'(w_1, w_2, \dots, -w_i, \dots, w_n; T_2 - 2w_i, T_0 - 2w_i)$ となる。

一般に、 $f(\bar{X}) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n)$ もまたしきい値関数で、
分離系は $(-w_1, -w_2, \dots, -w_i, \dots, -w_n; T_2', T_0')$ となる。

$$\begin{aligned} \text{ただし、} \quad T_2' &= T_2 - 2(w_1 + w_2 + \dots + w_n) \\ T_0' &= T_0 - 2(w_1 + w_2 + \dots + w_n) \end{aligned}$$

(証明) $\bar{x}_i = 2 - x_i$ なる中2に、

$$w'(X') = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + (-w_i) \bar{x}_i + \dots + w_n x_n = w(X) - 2w_i$$

となる。ここで、 $w(X) \geq T_2$ なるば

$$w'(X') \geq T_2 - 2w_i \quad \text{となり、このとき } f(X) = 2.$$

$$T_2 > w(X) > T_0 \quad \text{なるば}$$

$$T_2 - 2w_i > w'(X') > T_0 - 2w_i \quad \text{となり、このとき } f(X) = 1.$$

$$T_0 \geq w(X) \quad \text{なるば}$$

$$T_0 - 2w_i \geq w'(X') \quad \text{となり、このとき } f(X) = 0.$$

したがって、 $f(x_1, x_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_n)$ の分離系は

$$(w_1, w_2, \dots, -w_i, \dots, w_n; T_2 - 2w_i, T_0 - 2w_i) \quad \text{で与えられる。}$$

定理の後半はこの証明より明らかである。

つぎの命題はしきい値関数の定義より明らかである。

[命題 1.2] しきい値関数 $f(X)$ の分離系を $(w_1, w_2, \dots, w_i, \dots, w_j, \dots, w_n; T_2, T_0)$ とする。 $f(X)$ において x_i と x_j を入れかえた関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$ もまたしきい値関数で、その分離系は $(w_1, w_2, \dots, w_j, \dots, w_i, \dots, w_n; T_2, T_0)$ となる。

[命題 1.3] $f(X)$ はしきい値関数とする。

もし、 $\zeta(w_1, w_2, \dots, w_n; T_2, T_0)$ と $\zeta'(w_1', w_2', \dots, w_n'; T_2', T_0')$ が同時に $f(X)$ の分離系とすると、 $\zeta^*(w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*; T_2^*, T_0^*)$ もまた $f(X)$ の分離系となる。

$$\begin{aligned} \text{ただし、} \quad w_i^* &= w_i + w_i' \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ T_2^* &= T_2 + T_2', \quad T_0^* = T_0 + T_0' \end{aligned}$$

[定理 1.2] $f(X)$ をしきい値関数とし、重みを w_i ($i=1, 2, \dots, n$) とする。 $\alpha > \beta$ なるすべての α, β ($\alpha, \beta = 0$ or 1 or 2) に対して

$$w_i \geq w_j \quad \text{ならば} \quad f_{ij}(\alpha, \beta) \geq f_{ij}(\beta, \alpha)$$

$$w_i \leq w_j \quad \text{ならば} \quad f_{ij}(\alpha, \beta) \leq f_{ij}(\beta, \alpha)$$

が成立する ($i \neq j, n \geq 2$)

(証明) $w_i \geq w_j$ とする。もし、 $\alpha > \beta$ ならば

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{k \neq i, j} w_k \alpha_k + w_i \alpha + w_j \beta \right\} - \left\{ \sum_{k \neq i, j} w_k \alpha_k + w_i \beta + w_j \alpha \right\} \\ &= (w_i - w_j)(\alpha - \beta) \geq 0 \end{aligned}$$

ゆえに、しきい値関数の定義より $f_{ij}(\alpha, \beta) \geq f_{ij}(\beta, \alpha)$ をうる。後半も同様に示しうる。

§2. 公差

$f(X)$ をしきい値関数とし、その完全分離系を $\zeta(w_1, w_2, \dots, w_n; T_2, T_0)$ とする。 L_2, U_1, L_1, U_0 を [命題 1.1] にあけるものと同じ記号とする。

$$m_2 = \min\{(L_2 - T_2), (T_2 - U_1)\}, \quad m_0 = \min\{(L_1 - T_0), (T_0 - U_0)\} \quad (2)$$

$$M_2 = |T_2| + 2 \sum_{i=1}^n |w_i|, \quad M_0 = |T_0| + 2 \sum_{i=1}^n |w_i| \quad (3)$$

とする。このとき任意の X に対して

$$|T_2| + \sum_{i=1}^n |w_i| x_i \leq M_2, \quad |T_0| + \sum_{i=1}^n |w_i| x_i \leq M_0. \quad (4)$$

が成立する。

$$\text{よって,} \quad \min\left\{\frac{m_0}{M_0}, \frac{m_2}{M_2}\right\} > |\lambda_i| \quad (5)$$

$$\frac{m_0}{M_0} > |\lambda_0|, \quad \frac{m_2}{M_2} > |\lambda_2|$$

なる λ_i ($i=1, 2, \dots, n$), λ_0, λ_2 をとり

$$w'_i = (1 + \lambda_i) w_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

$$T'_0 = (1 + \lambda_0) T_0, \quad T'_2 = (1 + \lambda_2) T_2$$

とする。

$X \in F_2$ に対しては $w(X) \geq L_2$ なるゆえに

$$w(X) - T_2 \geq L_2 - T_2 \geq m_2 \quad \text{が成立する。}$$

一方、この X に対して

$$\begin{aligned} w'(X) - T'_2 &= \sum_{i=1}^n (1 + \lambda_i) w_i x_i - (1 + \lambda_2) T_2 \\ &= [w(X) - T_2] + \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i w_i x_i - \lambda_2 T_2 \right] \end{aligned}$$

最後の式の第一項 $\geq m_2$ であり、第二項については

$$\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i x_i - \lambda_2 T_2 \right| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| |w_i| x_i + |\lambda_2| |T_2| < \frac{m_2}{M_2} \left[\sum_{i=1}^n |w_i| x_i + |T_2| \right] \leq m_2$$

となる。したがって、 $w'(X) > T'_2$ となる。

$X \in F_1$ とすると $U_1 \geq w(X) \geq L_1$ なるゆえに

$$T_2 - w(X) \geq T_2 - U_1 \geq m_2, \quad w(X) - T_0 \geq L_1 - T_0 \geq m_0$$

が成立する。

$$\begin{aligned} \text{この } X \text{ に対して } T_2' - w'(X) &= (1 + \lambda_2)T_2 - \sum_{i=1}^n (1 + \lambda_i)w_i x_i \\ &= [T_2 - w(X)] + [\lambda_2 T_2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i x_i] \end{aligned}$$

最後の式の第一項 $\geq m_2$ であり、第二項については

$$|\lambda_2 T_2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i x_i| \leq |\lambda_2| |T_2| + \sum_{i=1}^n |\lambda_i| |w_i| x_i < M_2 \left[|T_2| + \sum_{i=1}^n |w_i| x_i \right] \leq m_2$$

となる。ゆえに $T_2' > w'(X)$ が成立する。

$$\begin{aligned} \text{また } w(X) - T_0 &= \sum_{i=1}^n (1 + \lambda_i)w_i x_i - (1 + \lambda_0)T_0 \\ &= [w(X) - T_0] + \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i w_i x_i - \lambda_0 T_0 \right] \end{aligned}$$

最後の式の第一項 $\geq m_0$ 、第二項については

$$\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i x_i - \lambda_0 T_0 \right| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| |w_i| x_i + |\lambda_0| |T_0| < M_0 \left[\sum_{i=1}^n |w_i| x_i + |T_0| \right] \leq m_0$$

となる。したがって $w'(X) > T_0'$ となる。

ゆえに、 $X \in F_1$ なる X に対しては

$$T_2' > w'(X) > T_0' \quad \text{が成立する。}$$

$X \in F_0$ なる X に対しても全く同様にして

$$T_0' > w'(X) \quad \text{を示しうる。}$$

以上より、つぎの定理をうる。

[定理 2.1] $f(X)$ をしきい値関数とし、その完全分離系を $S(w_1, w_2, \dots, w_n; T_2, T_0)$ とする。

このとき $S'(w_1', w_2', \dots, w_n'; T_2', T_0')$ もまた $f(X)$ の完全分離系となる。ただし、 w_i' ($i=1, 2, \dots, n$)、 T_2' 、 T_0' は (6) 式によって与えられるものとする。

ここで、つぎの定義を述べる。

公差 (tolerance)

$$\tau(\xi) = \tau(w_1, w_2, \dots, w_n; T_2, T_0) = \min \left\{ \frac{m_0}{M_0}, \frac{m_2}{M_2} \right\}$$

を分離系の公差という。(ξは完全分離系とする)

[命題 2.1] $\tau(w_1, w_2, \dots, w_n; T_2, T_0) \leq 1$

(証明) 任意の X に対して $|w(X)| = 2 \sum_{i=1}^n |w_i|$ なる中では、

明らかに $|L_2| \leq 2 \sum_{i=1}^n |w_i|$ が成立する。

$$m_2 = |L_2 - T_2| = |L_2| + |T_2| \leq 2 \sum_{i=1}^n |w_i| + |T_2| = M_2$$

ゆえに、 $\frac{m_2}{M_2} \leq 1$

また、 $|U_0| \leq 2 \sum_{i=1}^n |w_i|$ なる中では、

$$m_0 = |T_0 - U_0| \leq |T_0| + |U_0| = |T_0| + 2 \sum_{i=1}^n |w_i| = M_0$$

したがって、 $\frac{m_0}{M_0} \leq 1$

ゆえに、 $\tau(w_1, w_2, \dots, w_n; T_2, T_0) \leq 1$

[命題 2.2] $f(X)$ をしきい値関数とし、完全分離系を

$$(w_1, w_2, \dots, w_n; T_2, T_0) \quad \text{とする。}$$

$$C_2 = \frac{1}{2}(L_2 + T_1), \quad C_0 = \frac{1}{2}(L_1 + T_0) \quad \text{とする。}$$

$$\tau(w_1, w_2, \dots, w_n; T_2, T_0) \leq \tau(w_1, w_2, \dots, w_n; C_2, C_0)$$

が成立する。

(証明) $(w_1, w_2, \dots, w_n; C_2, C_0)$ が $f(X)$ の完全分離系なるこ

とは明らかである。

$$m_2^* = \frac{1}{2}(L_2 - T_1) \quad M_2^* = |C_2| + 2 \sum_{i=1}^n |w_i| \quad \text{とする。}$$

$$m_2^* = m_2 + |C_2 - T_2| \quad \text{は明らかである.}$$

$$\text{また, } |C_2| - |T_2| \leq |C_2 - T_2|$$

$$\text{ゆえに, } |C_2| \leq |C_2 - T_2| + |T_2| \quad \text{が成立する.}$$

$$\frac{m_2}{M_2} \leq \frac{m_2 + |C_2 - T_2|}{|T_2| + 2 \sum_{i=1}^n |w_i| + |C_2 - T_2|} = \frac{m_2^*}{|C_2| + 2 \sum_{i=1}^n |w_i|} = \frac{m_2^*}{M_2^*}$$

$$\text{したがって, } m_2/M_2 \leq m_2^*/M_2^* \quad \text{もつ.}$$

$$\text{つきに, } m_0^* = \frac{1}{2}(L_1 - \sigma_0), \quad M_0^* = |C_0| + 2 \sum_{i=1}^n |w_i| \quad \text{とする.}$$

$$m_0^* = m_0 + |C_0 - T_0|, \quad |C_0| = |C_0 - T_0| + |T_0| \quad \text{ゆえに,}$$

$$\frac{m_0}{M_0} \leq \frac{m_0 + |C_0 - T_0|}{|T_0| + 2 \sum_{i=1}^n |w_i| + |C_0 - T_0|} = \frac{m_0^*}{|C_0| + 2 \sum_{i=1}^n |w_i|} = \frac{m_0^*}{M_0^*}$$

$$\text{したがって } m_0/M_0 \leq m_0^*/M_0^*$$

$$\tau(w_1, w_2, \dots, w_n; T_2, T_0) = \min \left\{ \frac{m_0}{M_0}, \frac{m_2}{M_2} \right\}$$

$$c(w_1, w_2, \dots, w_n; C_2, C_0) = \min \left\{ \frac{m_0^*}{M_0^*}, \frac{m_2^*}{M_2^*} \right\}$$

なるゆえに,

$$\tau(w_1, w_2, \dots, w_n; T_2, T_0) \leq c(w_1, w_2, \dots, w_n; C_2, C_0)$$

[定理 2.2] $f(X)$ を ξ の値関数とすると、整数の完全分離系をもつ。

(証明) $f(X)$ の完全分離系を $\xi(w_1, w_2, \dots, w_n; T_2, T_0)$ とする。

いま、これらが有理数であるとする。公差を $\tau(\xi)$ とする。

$$|\lambda_i| < \tau(\xi) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad |A_0| < \tau(\xi), \quad |A_2| < \tau(\xi)$$

なる λ_i, A_0, A_2 を用いて

$$w_i' = (1 + \lambda_i) w_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$T_0' = (1 + \lambda_0) T_0, \quad T_2' = (1 + \lambda_2) T_2$$

とすれば [定理 2.1] より $(w_1', w_2', \dots, w_n'; T_2', T_0')$ はまた $f(X)$ の完全分離系となる。そして、有理数の稠密性より $\lambda_i, \lambda_0, \lambda_2$ を適当にえらば w_i', T_2', T_0' を有理数としよう。

つぎに、 d を有理数 w_i', T_2', T_0' の分母の最小公倍数とすると、 $w_i^* = d w_i' (i=1, 2, \dots, n)$, $T_2^* = d T_2'$, $T_0^* = d T_0'$ は整数となる。また、 $(w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*; T_2^*, T_0^*)$ が $f(X)$ の完全分離系なることは明らかなである。 (証明終)

この定理は、しきい値関数は必ず整数の分離系をもつことを示している。

§ 3. 特性パラメーター

$f(X)$ において F_2, F_0 の数を $p(F_2), p(F_0)$ で表わす。また、 $F_2 \ni X$ なるすべての X の i 座標 $(x_i) (i=1, 2, \dots, n)$ の和を $s_i(F_2)$ と記す。 $s_i(F_0)$ についても同様とする。

$$\left\{ \begin{array}{l} s_i(F_2) - s_i(F_0) \\ p(F_2) \quad p(F_0) \end{array} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

で与えられる $(n+2)$ 個の数を $f(X)$ のパラメーターとしい。

$$s_i(f) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad p(f)_2, \quad p(f)_0 \quad \text{と記す。}$$

[定理 3.1] $f(X)$ を一つの論理関数とし、 $g(X)$ を一つのし

きの値関数とする。もし、 $f(X)$ と $g(X)$ のパラメーターが同じ
 であれば、 $f(X) = g(X)$ である。

(証明) $g(X)$ の完全分離系を $(w_1, w_2, \dots, w_n; T_2, T_0)$ とする。

いま、 $f(X) \neq g(X)$ と仮定する。このときつぎの三つの場合
 が考えられる。

(i) $F_2 \neq G_2, F_0 = G_0$. (ii) $F_2 = G_2, F_0 \neq G_0$. (iii) $F_2 \neq G_2, F_0 \neq G_0$.

(i) の場合

$P(F_2) = P(G_2)$ より $P(F_2 \cap G_1) = P(G_2 \cap F_1) = p$ とする*。

そして、 $F_2 \cap G_1 \ni Z_1, Z_2, \dots, Z_k$

$G_2 \cap F_1 \ni Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ とする。

いま、 $G_2 \cap F_2 \neq \phi$ として

$G_2 \cap F_2 \ni X_1, X_2, \dots, X_j$ とする。

明) かに、 $G_2 = \{X_1, X_2, \dots, X_j, Y_1, Y_2, \dots, Y_k\}$

$F_2 = \{X_1, X_2, \dots, X_j, Z_1, Z_2, \dots, Z_k\}$ である。

また、 $G_0 = F_0 = \{X'_1, X'_2, \dots, X'_l\}$ とする。

ここで、 $X_r = (x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rn})$ ($r=1, 2, \dots, j$)

$Y_r = (y_{r1}, y_{r2}, \dots, y_{rn})$ ($r=1, 2, \dots, k$)

$Z_r = (z_{r1}, z_{r2}, \dots, z_{rn})$ ($r=1, 2, \dots, k$)

$X'_r = (x'_{r1}, x'_{r2}, \dots, x'_{rn})$ ($r=1, 2, \dots, l$) とする。

$S_i(F_2) - S_i(F_0) = S_i(G_2) - S_i(G_0)$ より

$$\sum_{r=1}^j x_{ri} + \sum_{r=1}^k z_{ri} - \sum_{r=1}^l x'_{ri} = \sum_{r=1}^j x_{ri} + \sum_{r=1}^k y_{ri} - \sum_{r=1}^l x'_{ri} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

* $P(A)$ は集合 A の個数を表わす。

ゆえに、
$$\sum_{r=1}^k Z_{ri} = \sum_{r=1}^k Y_{ri} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

が成立する。($G_2 \cap F_2 = \phi$ ならば明らかに (8) は成立する)

ところが、 $G_2 \ni Y_1, Y_2, \dots, Y_k$, $G_1 \ni Z_1, Z_2, \dots, Z_k$
なるゆえに $w(Y_r) > T_2 \quad (r=1, 2, \dots, k)$ となる k 個の

式を辺々加えて
$$\sum_{i=1}^n \left[w_i \sum_{r=1}^k Y_{ri} \right] > kT_2 \quad (9)$$

もつる。また、 $T_2 > w(Z_r) \quad (r=1, 2, \dots, k)$ なる k 個の

式を辺々加えて
$$kT_2 > \sum_{i=1}^n \left[w_i \sum_{r=1}^k Z_{ri} \right] \quad (10)$$

もつる。(8)式を考慮すれば、(9)と(10)は明らかに矛盾がある。

(ii) の場合

(i) と全く同様にして矛盾を導きうる。

(iii) の場合

$p(G_2) = p(F_2)$ より $p[F_2 \cap (G_1 \cup G_0)] = p[G_2 \cap (F_1 \cup F_0)] = n$ と
する。ゆえに、 $G_2 \cap (F_1 \cup F_0) \ni Y_1, Y_2, \dots, Y_k$

$F_2 \cap (G_1 \cup G_0) \ni Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ とする。

$G_2 \cap F_2 \neq \phi$ ならば $G_2 \cap F_2 \ni X_1, X_2, \dots, X_j$ として

$$G_2 = \{ X_1, X_2, \dots, X_j, Y_1, Y_2, \dots, Y_k \}$$

$$F_2 = \{ X_1, X_2, \dots, X_j, Z_1, Z_2, \dots, Z_k \} \quad \text{とする。}$$

また、 $p(G_0) = p(F_0)$ より

$$p[G_0 \cap (F_2 \cup F_1)] = p[F_0 \cap (G_2 \cup G_1)] = m \quad \text{とする。}$$

$$G_0 \cap (F_2 \cup F_1) \ni Y_1', Y_2', \dots, Y_m', \quad F_0 \cap (G_2 \cup G_1) \ni Z_1', Z_2', \dots, Z_m'$$

$G_0 \cap F_0 \neq \phi$ の場合は

$$G_0 \cap F_0 \ni X_1', X_2', \dots, X_\ell' \quad \text{と } 3 \text{ 3 } \text{c.}$$

$$G_0 = \{X_1', X_2', \dots, X_\ell', Y_1', Y_2', \dots, Y_m'\}$$

$$F_0 = \{X_1', X_2', \dots, X_\ell', Z_1', Z_2', \dots, Z_m'\} \quad \text{と } 3 \text{ 3 } \text{c.}$$

$$\text{よ } 2 \text{ c.} \quad X_r = (x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rn}) \quad (r=1, 2, \dots, j)$$

$$Y_r = (y_{r1}, y_{r2}, \dots, y_{rn}) \quad (r=1, 2, \dots, k)$$

$$Z_r = (z_{r1}, z_{r2}, \dots, z_{rn}) \quad (r=1, 2, \dots, k)$$

$$X_r' = (x_{r1}', x_{r2}', \dots, x_{rn}') \quad (r=1, 2, \dots, \ell)$$

$$Y_r' = (y_{r1}', y_{r2}', \dots, y_{rn}') \quad (r=1, 2, \dots, m)$$

$$Z_r' = (z_{r1}', z_{r2}', \dots, z_{rn}') \quad (r=1, 2, \dots, m)$$

$$\text{よ } 7. \quad S_i(G_2) - S_i(G_0) = S_i(F_2) - S_i(F_0) \quad \text{よ } 7$$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^j x_{ri} + \sum_{r=1}^k y_{ri} - \sum_{r=1}^{\ell} x_{ri}' - \sum_{r=1}^m y_{ri}' \\ = \sum_{r=1}^j x_{ri} + \sum_{r=1}^k z_{ri} - \sum_{r=1}^{\ell} x_{ri}' - \sum_{r=1}^m z_{ri}' \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

よ } 3. 中 } 2 } 2

$$\sum_{r=1}^k y_{ri} - \sum_{r=1}^m y_{ri}' = \sum_{r=1}^k z_{ri} - \sum_{r=1}^m z_{ri}' \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

よ } 3. ($G_2 \cap F_2 = \phi$, $G_0 \cap F_0 = \phi$ の一方または両方が成立するときは (11) は明らかになり成立する。)

$$G_2 \ni Y_1, Y_2, \dots, Y_k \quad G_1 \cup G_0 \ni Z_1, Z_2, \dots, Z_k$$

$$G_0 \ni Y_1', Y_2', \dots, Y_m' \quad G_2 \cup G_1 \ni Z_1', Z_2', \dots, Z_m'$$

$$\text{よ } 3 \text{ 中 } 2 \text{ c.} \quad w(Y_r) > T_2 \quad (r=1, 2, \dots, k)$$

なる k 個の式を辺々加えて

$$\sum_{i=1}^n \left[w_i \sum_{r=1}^k y_{ri} \right] > k T_2 \quad (12)$$

もう、 $T_2 > w(\Sigma_r)$ ($r=1, 2, \dots, k$) なる k 個の式を辺々加えて、

$$k T_2 > \sum_{i=1}^n \left[w_i \sum_{r=1}^k z_{ri} \right] \quad (13)$$

もう、また、 $T_0 > w(Y'_r)$ ($r=1, 2, \dots, m$) なる m 個の式を辺々加えて

$$m T_0 > \sum_{i=1}^n \left[w_i \sum_{r=1}^m y'_{ri} \right] \quad (14)$$

となる。最後に、 $w(\Sigma'_r) > T_0$ ($r=1, 2, \dots, m$) なる m 個の式を辺々加えて

$$\sum_{i=1}^n \left[w_i \sum_{r=1}^m z'_{ri} \right] > m T_0 \quad (15)$$

もう、(12) と (14) より

$$\sum_{i=1}^n \left[w_i \left\{ \sum_{r=1}^k y_{ri} - \sum_{r=1}^m y'_{ri} \right\} \right] > (k T_2 - m T_0) \quad (16)$$

(13) と (15) より

$$(k T_2 - m T_0) > \sum_{i=1}^n \left[w_i \left\{ \sum_{r=1}^k z_{ri} - \sum_{r=1}^m z'_{ri} \right\} \right] \quad (17)$$

もう、(16) 式を考慮すると (16) と (17) は明らかに矛盾がある。したがって、 $f(X) = g(X)$ となる。

つぎの系は明らかである。

[系 3.1] 二つの異なる関数 $f(x)$, $g(x)$ が同じパラメータをもつならば、どちらもしきい値関数でない。

[系 3.2] しきい値関数はそのパラメータと一対一対応する。

[系 3.2] によって、この $(n+2)$ 個のパラメータはしきい値関数を特徴づけるものと考えうるので、これを特性パラメータ (characterizing parameters) という。

以下、特性パラメータについて成立するいくつかの性質を述べる。

[命題 3.1] 任意の論理関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ と

$g(y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n) = f(x_1, x_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_n)$ に対して、

$$p(g)_2 = p(f)_2 \quad p(g)_0 = p(f)_0.$$

$$s_i(g) = 2(p(f)_2 - p(f)_0) - s_i(f), \quad s_k(g) = s_k(f) \quad (k \neq i)$$

が成立する。

(証明) $p(g)_2 = p(f)_2$, $p(g)_0 = p(f)_0$ は明らかである。

$$\begin{aligned} s_i(g) &= s_i(G_2) - s_i(G_0) = \sum_{Y \in G_2} y_i - \sum_{Y \in G_0} y_i \\ &= \sum_{X \in F_2} (2 - x_i) - \sum_{X \in F_0} (2 - x_i) = 2(p(f)_2 - p(f)_0) - (s_i(F_2) - s_i(F_0)) \\ &= 2(p(f)_2 - p(f)_0) - s_i(f) \end{aligned}$$

$k \neq i$ のとき $s_k(g) = s_k(f)$ は明らかである。

つぎの命題も明らかである。

[命題 3.2] $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$ に対して

$g(y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_j, \dots, y_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$ とす

るとき、

$$P(g)_2 = P(f)_2, \quad P(g)_0 = P(f)_0$$

$$S_i(g) = S_i(f), \quad S_j(g) = S_i(f)$$

$$S_k(g) = S_k(f) \quad (k \neq i, j)$$

が成立する。

[定理 3.2] unate 関数 $f(X)$ が x_i について独立ならば

$$S_i(f) = P(f)_2 - P(f)_0$$

が成立する。また、その逆も成立する。

ここで、 x_i について独立とは、 $f_i(0) = f_i(1) = f_i(2)$ を意味する。

(証明) x_i について独立であるから、もし、 $f_i(2) = 2$ ならば、必ず $f_i(1) = f_i(0) = 2$ となる。

ゆえに、 $S_i(F_2) = P(f)_2$

また、 $f_i(2) = 0$ ならば、必ず $f_i(1) = f_i(0) = 0$ となる。

ゆえに、 $S_i(F_0) = P(f)_0$

したがって、 $S_i(f) = S_i(F_2) - S_i(F_0) = P(f)_2 - P(f)_0$

逆に、 $f(X)$ は unate であり、かつ

$$S_i(f) = P(f)_2 - P(f)_0 \quad \text{とする。}$$

いま、 $f_i(0) = f_i(1) = f_i(2)$ と仮定する。

$f_i(0) = 1$ のとき $f_i(2) = 2$ となる個数を l

$f_i(0) = 0$ のとき $f_i(2) = 2$ となる個数を m

$f_i(0) = 0$ のとき $f_i(2) = 1$ となる個数を n とする。
条件と、パラメータの定義を考慮して

$$(2l + 2m) - (0 \cdot m + 0 \cdot n) = (l + m) - (m + n)$$

をうる。ゆえに、

$$l + 2m + n = 0$$

したがって、 $l = m = n = 0$ をうる。

ゆえに、 $f_i(0) = 2$ ならば $f_i(2) = 2$

$f_i(0) = 1$ ならば $f_i(2) = 1$

$f_i(0) = 0$ ならば $f_i(2) = 0$ をうる。

これは、 $f(X)$ が x_i について独立であることを示している。

$f_i(0) \geq f_i(1) \geq f_i(2)$ の場合も全く同様に示しうる。

つぎの命題は [命題 3.2] より明らかである。

[命題 3.3] $f(X)$ において x_i と x_j に関して対称ならば、

$$S_i(f) = S_j(f) \quad \text{が成立する。}$$

[定理 3.3] $f(X)$ はつぎの条件をみたすものとする。

すなわち、 $\alpha > \beta$ なるすべての α, β ($\alpha, \beta = 0$ or 1 or 2) に

ついて $f_{ij}(\alpha, \beta) \geq f_{ij}(\beta, \alpha)$ が成立するか、

または $f_{ij}(\alpha, \beta) \leq f_{ij}(\beta, \alpha)$ が成立するかで
 $\alpha > \beta$ なるすべての α, β ($\alpha, \beta = 0$ or 1 or 2) について、
あるとする。

このとき、 $S_i(f) = S_j(f)$ ならば、 $f(X)$ は x_i と x_j に関して対称である。

(証明) いま, $f_{ij}(\alpha, \beta) \geq f_{ij}(\beta, \alpha)$ が成立しているとする。 (α, β) は $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ の3通りでありから,

$$f_{ij}(1, 0) = 2 \quad \text{で} \quad \begin{cases} f_{ij}(0, 1) = 1 & \text{が } k_1 \text{ 個} \\ f_{ij}(0, 1) = 0 & \text{が } k_2 \text{ 個} \end{cases}$$

$$f_{ij}(1, 0) = 1 \quad \text{で} \quad f_{ij}(0, 1) = 0 \quad \text{が } k_3 \text{ 個}$$

$$f_{ij}(2, 0) = 2 \quad \text{で} \quad \begin{cases} f_{ij}(0, 2) = 1 & \text{が } l_1 \text{ 個} \\ f_{ij}(0, 2) = 0 & \text{が } l_2 \text{ 個} \end{cases}$$

$$f_{ij}(2, 0) = 1 \quad \text{で} \quad f_{ij}(0, 2) = 0 \quad \text{が } l_3 \text{ 個}$$

$$f_{ij}(2, 1) = 2 \quad \text{で} \quad \begin{cases} f_{ij}(1, 2) = 1 & \text{が } m_1 \text{ 個} \\ f_{ij}(1, 2) = 0 & \text{が } m_2 \text{ 個} \end{cases}$$

$$f_{ij}(2, 1) = 1 \quad \text{で} \quad f_{ij}(1, 2) = 0 \quad \text{が } m_3 \text{ 個}$$

とする。条件と, 1974-タ-タ-の定義より

$$\begin{aligned} & (k_1 + k_2 + 2l_1 + 2l_2 + 2m_1 + 2m_2) - (m_2 + m_3) \\ &= (m_1 + m_2) - (k_2 + k_3 + 2l_2 + 2l_3 + 2m_2 + 2m_3) \end{aligned}$$

が成立する。ゆえに,

$$k_1 + 2k_2 + k_3 + 2l_1 + 4l_2 + 2l_3 + m_1 + 2m_2 + m_3 = 0$$

したがって, $k_1 = k_2 = k_3 = l_1 = l_2 = l_3 = m_1 = m_2 = m_3 = 0$ となる。

すなわち, $f_{ij}(\alpha, \beta) = f_{ij}(\beta, \alpha)$ となる。これは,

α_i と α_j に関して対称な子であることを示している。

$f_{ij}(\alpha, \beta) \leq f_{ij}(\beta, \alpha)$ が成立するときも同様に示しうる。

§ 4. 正準関数

まず、定義から述べる。

正準関数 (canonical function)

$$\begin{aligned} (1) \quad \zeta_i(f) &\geq p(f)_2 - p(f). \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ (2) \quad \zeta_i(f) &\leq \zeta_j(f) \quad (i < j) \end{aligned} \quad (18)$$

が成立するとき、 $f(X)$ を正準関数という。

正準な分離系

$f(X)$ をしきい値関数とし、その完全分離系を

$$\zeta(w_1, w_2, \dots, w_n; T_2, T_0) \quad \text{とする。}$$

もし、 $0 \leq w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n$ ならば、分離系 ζ は正準 (canonical) であるという。

$$\begin{aligned} \text{とくに、} \quad \zeta_i(f) &= p(f)_2 - p(f). \quad \text{ならば } w_i = 0 \\ \zeta_i(f) &= \zeta_j(f) \quad \text{ならば } w_i = w_j \end{aligned} \quad (19)$$

のとき、 ζ は狭義に正準であるという。

正則関数 (regular function)

つぎの二つの条件をみたす関数 $f(X)$ を正則関数という。

(1) 正準である。

(2) 任意の i, j ($1 \leq i, j \leq n$) に対して

$\alpha > \beta$ なるすべての α, β ($\alpha, \beta = 0 \text{ or } 1 \text{ or } 2$) について、

$$f_{ij}(\alpha, \beta) \geq f_{ij}(\beta, \alpha) \quad \text{が成立するか}$$

または、 $f_{ij}(\alpha, \beta) \leq f_{ij}(\beta, \alpha)$ が成立するかである。

$\alpha > \beta$ なるすべての α, β ($\alpha, \beta = 0 \text{ or } 1 \text{ or } 2$) について、

[命題 4.1] 任意の関数 $f(X)$ が正準でないとする。変数の否定および、変数間の互換によって正準にしよう。

(証明) のま x_i について $S_i(f) < p(f)_2 - p(f)$ とする。

\bar{x}_i とすると [命題 3.1] より

$$S_i(f(x_1, x_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_n)) = 2(p(f)_2 - p(f)) - S_i(f)$$

ゆえに, $2(p(f)_2 - p(f)) - S_i(f(x_1, x_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_n)) < p(f)_2 - p(f)$

したがって, $p(f(x_1, x_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_n))_2 - p(f(x_1, x_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_n))$

$$< S_i(f(x_1, x_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_n)) \quad \text{もうす。}$$

また, $S_j(f) < S_i(f) \quad (j > i)$ とすると,

互換 (x_i, x_j) も行った $f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$ を考えよ。 [命題 3.2] より

$$S_i(f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)) = S_j(f)$$

$$S_j(f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)) = S_i(f) \quad \text{である。}$$

したがって,

$$S_i(f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)) < S_j(f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)) \quad (i < j)$$

となる。

[定理 4.1] $f(X)$ をしきい値関数とし, その重みを w_1, w_2, \dots, w_n とする。

(1) $w_i \geq 0$ ならば $S_i(f) \geq p(f)_2 - p(f)$ 。

(2) $w_i \leq 0$ ならば $S_i(f) \leq p(f)_2 - p(f)$ 。

(3) $w_i \leq w_j$ ならば $S_i(f) \leq S_j(f)$

(証明) (1) $w_i \geq 0$ とする。

しきの値を T_2, T_0 とする。つまりし、 $x_i = 0$ なる格子点を $X = (x_1, x_2, \dots, 0, \dots, x_n)$ とすると、

$$X' = (x_1, x_2, \dots, 2, \dots, x_n) \quad \text{として}$$

$$w(X') = w(X) + 2w_i > T_2 + 2w_i \geq T_2 \quad \text{もうす。}$$

$$\text{ゆえに、必ず} \quad f(X') = 2 \quad \text{となる。}$$

$$\text{これより,} \quad \sum_i (F_2) \geq p(f)_2 \quad (20)$$

もうす。

つまり、 $x_i = 2$ なる格子点を

$$X = (x_1, x_2, \dots, 2, \dots, x_n) \quad \text{とする。}$$

$$X' = (x_1, x_2, \dots, 0, \dots, x_n) \quad \text{とすれば}$$

$$w(X') = w(X) - 2w_i < T_0 - 2w_i \leq T_0$$

$$\text{ゆえに、} \quad f(X') = 0 \quad \text{もうす。}$$

$$\text{これより,} \quad \sum_i (F_0) \leq p(f)_0 \quad (21)$$

(20), (21) より

$$\sum_i (f) = \sum_i (F_2) - \sum_i (F_0) \geq p(f)_2 - p(f)_0 \quad \text{もうす。}$$

(2) $w_i \leq 0$ の場合も同様に示しうす。

(3) $w_i \leq w_j$ とする。

$x_i = \alpha, x_j = \beta$ ($\alpha > \beta, \alpha, \beta = 0 \text{ or } 1 \text{ or } 2$) において $f = 2$ なる格子点を

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_i = \alpha, \dots, x_j = \beta, \dots, x_n) \quad \text{とする。}$$

いま, $X' = (x_1, x_2, \dots, x_i = \beta, \dots, x_j = \alpha, \dots, x_n)$ とする

$$w(X') = w(X) + (w_j - w_i)(\alpha - \beta) > T_2 + (w_j - w_i)(\alpha - \beta) \geq T_2 \quad \text{もう 3.}$$

ゆえに, $f(X') = 2$ となる。

$$\text{これより,} \quad S_i(F_2) \leq S_j(F_2) \quad (22)$$

つぎに, $x_i = \alpha, x_j = \beta$ ($\alpha < \beta$) の $f = 0$ となる格子点を $X = (x_1, x_2, \dots, x_i = \alpha, \dots, x_j = \beta, \dots, x_n)$ とする。

$X' = (x_1, x_2, \dots, x_i = \beta, \dots, x_j = \alpha, \dots, x_n)$ として

$$w(X') = w(X) + (w_j - w_i)(\alpha - \beta) < T_0 - (w_j - w_i)(\beta - \alpha) \leq T_0 \quad \text{もう 3.}$$

ゆえに, $f(X') = 0$ となる。

$$\text{これより,} \quad S_i(F_0) \geq S_j(F_0) \quad (23)$$

$$(22), (23) \text{ より} \quad S_i(f) \leq S_j(f) \quad \text{もう 3.}$$

この定理よりうおの系は明らかである。

[系 4.1] $f(X)$ をしきい値関数とし, 重みを w_i ($i=1, 2, \dots, n$) とする。

$$(1) \quad S_i(f) > p(f)_2 - p(f)_0 \quad \text{ならば} \quad w_i > 0$$

$$(2) \quad S_i(f) < p(f)_2 - p(f)_0 \quad \text{ならば} \quad w_i < 0$$

$$(3) \quad S_i(f) < S_j(f) \quad \text{ならば} \quad w_i < w_j$$

[定理 4.2] 正則関数 $f(X)$ がしきい値関数であるならば $f(X)$ は独立に正準な整数完全分離系をもつ。

(証明) $f(X)$ はしきい値関数であるから [定理 2.2] より整数

完全分離系をもつ。これを

$$\mathcal{S}(w_1, w_2, \dots, w_n; T_2, T_0) \quad \text{とする。}$$

また、正準であるから

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_i(f) &\geq p(f)_2 - p(f)_0 \\ \mathcal{S}_j(f) &\geq \mathcal{S}_i(f) \quad (j > i) \end{aligned} \quad (24)$$

が成立する。

そこで、 k ($k \leq n$) を

$$k \geq i \quad \text{なる } i \text{ に対して} \quad \mathcal{S}_i(f) = p(f)_2 - p(f)_0$$

$$k < i \quad \text{なる } i \text{ に対して} \quad \mathcal{S}_i(f) > p(f)_2 - p(f)_0$$

なる条件で決定される非負整数とする。

$$k \geq i \quad \text{では} \quad x_i \longrightarrow \bar{x}_i = y_i$$

$$k < i \quad \text{では} \quad x_i \longrightarrow x_i = y_i$$

なる変換を行い、

$f(X)$ に対して $f(Y)$ を考える。 ($Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$)

いまの値関数は明らかに unate であるから、[定理 3.2]

より $f(X)$ は x_1, x_2, \dots, x_k について独立である。

ゆえに、 $f(X) = f(Y)$ をうる。

一方、 $f(Y)$ の分離系は $\mathcal{S}'(w'_1, w'_2, \dots, w'_k, \dots, w'_n; T'_2, T'_0)$ とする。

と、[定理 1.1] より

$$w'_i = -w_i \quad (i \leq k) \quad w'_i = w_i \quad (i > k)$$

$$T'_2 = T_2 - 2(w_1 + w_2 + \dots + w_k)$$

$$T'_0 = T_0 - 2(w_1 + w_2 + \dots + w_k)$$

である。

また, [命題 1.3] より

$$w_i^* = w_i + w_i'$$

$$T_2^* = T_2 + T_2'$$

$$T_0^* = T_0 + T_0' \quad \text{となる.}$$

分離系 $\xi^* (w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*; T_2^*, T_0^*)$ は $f(X)$ の整数完全分離系である.

そこで, $w_i^* = 0$ ($i \leq k$), $w_i^* = 2w_i$ ($i > k$) であるが [系 4.1] より $w_i > 0$ ($i > k$) なるゆえに

$$w_i^* > 0 \quad (i > k) \quad \text{となる.}$$

つぎに 条件より $S_i(f) \leq S_j(f)$ ($i < j$) であるから,

いま, ある r , ξ に対して ($k \leq r$)

$$S_r(f) < S_{r+1}(f) = S_{r+2}(f) = \dots = S_{r+s}(f) < S_{r+s+1}(f)$$

があると仮定する.

$f(X)$ は正則関数であるから, [定理 3.3] より $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots,$

α_{r+s} に関して対称となる.

したがって, [命題 1.2] より

$$(w_1^*, w_2^*, \dots, w_{r+1}^*, w_{r+2}^*, \dots, w_{r+s}^*, \dots, w_n^*; T_2^*, T_0^*)$$

$$(w_1^*, w_2^*, \dots, w_{r+2}^*, w_{r+3}^*, \dots, w_{r+1}^*, \dots, w_n^*; T_2^*, T_0^*)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$(w_1^*, w_2^*, \dots, w_{r+s}^*, w_{r+1}^*, \dots, w_{r+s-1}^*, \dots, w_n^*; T_2^*, T_0^*).$$

• はすべて $f(X)$ の分離系となる.

ゆえに、[命題 1.3] より

$$(\{w_1^*, w_2^*, \dots, w_r^*, d, d, \dots, d, w_{r+s+1}^*, \dots, w_n^*; \{T_2^*, T_0^*\})$$

もまた、 $f(X)$ の分離系である。

$$\text{そこで, } d = w_{r+1}^* + w_{r+2}^* + \dots + w_{r+s}^* \quad \text{である。}$$

この分離系は明らかに (19) 式の条件を満たしている。

一般に、 $\{c_i(f) < \{c_{i+1}(f)$ となる i に対しては [系 4.1] より

$$w_i^* < w_{i+1}^* \quad \text{となるから } \{w_i^* < \{w_{i+1}^* \quad \text{もうる。}$$

また、 $\{r(f) < \{r_{+1}(f)$ 、 $\{r_{r+s}(f) < \{r_{r+s+1}(f)$ であるから、

$$\text{同じく [系 4.1] より } w_r^* < w_{r+1}^*, w_{r+s}^* < w_{r+s+1}^* \quad \text{となる。}$$

$$\text{したがって, } \{w_r^* < d < \{w_{r+s+1}^* \quad \text{もうる。}$$

ゆえに、分離系

$$(\{w_1^*, w_2^*, \dots, w_r^*, d, d, \dots, d, w_{r+s+1}^*, \dots, w_n^*; \{T_2^*, T_0^*\}) \quad (25)$$

は明らかに狭義に正準となっている。

もし、他にもパラメーターが等しくなる所があっても全く同様にして、狭義に正準な分離系を作りうる。(証明終)

§ 5. 結 論

まず、三値しきい値関数の分離系における公差を定義し、それを用いてしきい値関数の重み・しきい値が整数値をとることを示した。

ついで、三値論理関数についての特性パラメーターを定義し、

し、パラメーターがしきい値関数と一対一対応すること、パラメーターについて成立する定理を述べ、最後に、正則なしきい値関数は狭義に正準な整数分離系をもつことを示した。

三値しきい値関数の判定と実現に際しても、二値しきい値関数の場合と同様に、重みがすべて非負整数であること、対称な変数に対応する重みが等しいこと等を仮定し、また、重みの大小順序が決定しているとしてその判定と実現の手法を展開して行く方が手段を容易にするものと考えられる。

しきい値関数であれば正則関数の条件 (2) は成立する。([定理 1.2]) また、[命題 4.1] により与えられた関数を正準にすることは可能である。しかも、正準にした関数ともとの関数の分離系の関係は [定理 1.1], [命題 1.2] により明らかである。したがって、しきい値関数の判定と実現に際しては、最初から、狭義に正準な整数完全分離系をもつものと仮定してその手法を展開してよいことを [定理 4.2] は示している。

最後に、本報告について有益なる助言をいただいた、京都大学工学部長谷川利治助教授、大阪大学基礎工学部北橋忠宏氏に感謝する。

文 献

- 1) S. T. Hu; "Threshold Logic" p. 37 (University of California Press 1965)