数理解析研究所講究録
第 81 巻 1970 年 176-206

多値論理とオートマトン

野崎 昭弘

1 序 —— 問題の起源

1. 1. 論理代数とリレー回路

2進リレー回路の設計に，論理代数（詳しくいえば，ブール関数の理論）が応用されるのは，よく知られているとおりである．それを初めて指摘したのは 中島（1936）・シャノン（1938）等であり，その要点は，

ひとつのブール関数を表現するひとつのブール代数式が，自然にひとつのリレー回路を表現する

ことを利用し，次のようにして設計を試みることにある．

1）与えられた仕様（目標，計算すべき関数）を，ひとつのブール関数 f として表現する．

2）与えられた基本素子（リレー，あるいはダイオードやトランジスタによる基本回路でもよい）の機能を，ブール関数 g_1, g_2, $\cdots$ としてあらわす．（2変数関数のばあい，便宜上，2項演算記号を使ってあらわすこともある）

3）f を g_1, g_2, $\cdots$ の合成関数として表現し，かつ（或る意味で）最も簡単な表現形式をえらぶ．

このようにして，簡単なリレー回路が得やすくなるのであ

る．

こゝで自然に，次の2つの問題が生まれる．

A）予め指定された $g_1, g_2, \cdots$ のみを用いて，任意に与えられた f を'合成'することができるであろうか？

B）$g_1, g_2, \cdots$ による合成関数としての，f の或るひとつの表現形式から出発して，より簡単な（最も簡単な）表現形式を求めるアルゴリズムを示せ．

問題B）は，Quine，Veitch 以来，古くから研究されている．

問題A）は，関数の集合

$$G = \{g_1, g_2, \cdots\}$$

の性質を調べることになるが，たとえば

$$G_1 = \{x \vee y,\ x \wedge y,\ \neg x\}$$

$$G_2 = \{x \mid y\} \qquad \text{（NAND回路）}$$

等は，'任意のブール関数を合成できる'ことが知られている．また，

$$G_3 = \{x \vee y,\ \neg x\}$$

でも充分なこと，

$$G_4 = \{x \vee y,\ x \wedge y\}$$

ではうまくゆかぬこと（$\neg x$ が合成できない）が知られている．また，E. Post は，初めてこの問題を一般的に論じ，

次々に述べる結果を得ている.

最初に結果を紹介するために必要な，簡単な用語・記号の説明しよう（厳密な定義は，2章に譲る）

すべてのブール関数の集合を Ω と書く.

ブール関数の或る集合 $G\ (\subseteq \Omega)$ に対し，G に属する関数から（重複利用を許して）合成しうるすべてのブール関数の集合を考え，それを $\overline{G}$ であらわす. $G \subseteq \Omega$ が

1) $\overline{G} = \Omega$

であるとき，G は 'complete' または '万能'（伊吹）と呼ばれる. この言葉を使えば，我々の問題Aは，次のようにいいかえられる.

A) G は complete であるか? —— G が complete であるための，必要充分条件を示せ.

G が条件 1) をみたし，さらに

2) $G' \subsetneqq G$ ならば $\overline{G'} \neq \Omega$

であるとき，G を '極小万能類'（伊吹）と呼ぶ.

$G \subseteq \Omega$ が，1)，2) の代りに

3) $\overline{G} \neq \Omega$

4) $G' \supsetneqq G$ ならば $\overline{G'} = \Omega$

をみたしているとき，G は '極大' であるといわれる.（極大とは，'極大非万能' の略である）.

<u>定義1</u> $M_0 = \{ f \in \Omega \ ; \ f(0, 0, \cdots, 0) = 0 \}$

$M_1 = \{ f \in \Omega \ ; \ f(1, 1, \cdots, 1) = 1 \}$

$M_2 = \{ f \in \Omega$; すべてのブール変数値 (x_i) について, $f(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n) = \overline{f(x_1, \cdots x_n)} \}$

$M_3 = \{ f \in \Omega$; すべての i について $x_i \leqq y_i$ ならば, $f(x_1, \cdots, x_n) \leqq f(y_1 \cdots y_n) \}$

$M_4 = \{ f \in \Omega$; f は, modulo 2 addition $\oplus$ に関する1次式としてあらわされる. すなわち,

$f(x_1 \cdots x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \cdots \oplus a_n x_n \}$

<u>注意</u> M_2 はいわゆる'自己双対'な関数の族であり, M_3 は単調増大関数の族である.

<u>定理1</u>（Post） $G \subseteq \Omega$ が complete であるためには, すべての M_i （$0 \leqq i \leqq 4$） について,

$$G \nsubseteq M_i$$

であることが, 必要かつ充分である.

<u>系</u> $M_0 \sim M_4$ はすべて極大であり, これらの他に, 極大な関数族はない.

伊吹常は, これらの結果を独立に証明し, また極小不能類の性質を調べて, 42種の極小不能類を求め, かつ（或る意味で）既約不能類はそれらに限ることを証明した.

1. 2　オートマトンの合成

前節で述べた問題Aは，そのまゝ，オートマトンの理論にも拡張できる．まず，便宜上，

'同じ信号系$\mho$の上の，多入力オートマトン'……(1)

というものを定義しておこう（以下，(1)のことを単にオートマトンと呼ぶ）

定義2　$\mho$を或る任意の空でない有限集合とする．

$\mho$上のn入力オートマトンとは，関数

$$f : \mho^{m+n} \longrightarrow \mho^{m} \qquad (\text{状態セン移関数})$$

$$g : \mho^{m+n} \longrightarrow \mho \qquad (\text{出力関数})$$

および

$$s_0 \in \mho^{m} \qquad \left(\begin{array}{l} m=0\text{の場合，}s_0\text{は}\mho\text{の} \\ \text{特定の要素）} \end{array}\right.$$

の組

$$A = (s_0,\ f,\ g)$$

のことである．

m（$\geqq 0$）を，オートマトンAの，'内部状態'の'次元'といゝ，s_0を初期状態という．

このようにオートマトンを定義しておくと，（$\mho$上の）オートマトン同士の接続・合成が，自然に定義される．そこで，問題Aの拡張が，意味をもってくる．

A）あらかじめ指定された　'基本的なオートマトン'

A_1 , A_2 , ...

を用いて，任意に与えられたオートマトンAが，（或る適当な意味で）合成し得るためには，基本オートマトンの集合

$$\mathfrak{A} = \{ A_1 , A_2 , \cdots \}$$

は，どんな性質をもたなければならないか？

この問題を（見かけ上）弱めると，次のような問題を考えることができる．

A') 基本オートマトンの集合

$$\mathfrak{A} = \{ A_1 , A_2 , \cdots \}$$

によって，任意に与えられた関数

$$g : U^n \longrightarrow U$$

を'計算する'オートマトンが合成できるためには，$\mathfrak{A}$ はどんな性質をもたなければならないか？

<u>注意</u> A' は，Aを，内部状態が0次元のオートマトンに限定したものである．

これらの問題は，Shannon 等が編集した Automata Studies (1956) の中で，いち早く ~~Minsky~~ Kleene および von Neumann によってとりあげられている．これに因んで，以下

A) を ~~Minsky~~ Kleene 型の問題

A') を Neumann 型の問題

と呼ぶことにする.

Kleene ~~Minsky~~ – Neumann の問題は, '基本的なオートマトン' としてどんなものを許すか, によっていろいろ分類できる. Minsky は, (神経細胞についての或る仮定に基く) 或る条件をみたす, いわゆる 有限決 [redacted]定的オートマトン (S-definite automaton —— 'deterministic' より強い) を考え, 次のような事実を指摘した.

1) 'monotone increasing automaton' だけでは, 任意のオートマトンを合成することはできない.

2) AND, OR, NOT の3つの gate 回路 (一定遅れをもつ) があれば, 任意のオートマトンを実現できる.

これは $\mathfrak{U}=\{0, 1\}$ についての結果であるが, これは, 一般の場合についての, 次の事実を示唆している.

3) $\mathfrak{A}$ が, A′ の意味で '充分' (不能) であれば, A の意味でも '充分' (不能) である.

これは, 問題Aが, 問題A′ に reduce できることを示している.

~~[illegible]~~ von Neumann は, 彼の論文 [4] の中で,

一定の時間遅れ δ をもつ, 二進 gate 回路

を基本オートマトンとする ($\mathfrak{U}=\{0, 1\}$ の場合の) 問題 A′ を考察し, 次の事実を指摘した.

'一定遅れ$\delta > 0$をもつNAND回路だけでは，任意のブール関数を計算することはできない'（時間遅れを調整する delay element が必要である）.

この注意は，$\delta = 0$の場合と$\delta > 0$の場合とで，問題が本質的に異なることを示すので，非常に重要であった．

<u>注意</u>　$\delta = 0$　ならば，二進 gate 回路の機能はブール関数（NAND gate なら　$x \mid y$）　によってあらわされるから，問題A'　は，ブール関数族の completeness の問題に一致する．

1．3．多値論理関数とオートマトン．

$\mathfrak{V}$を少くとも2つの要素をもつ有限集合とし，

'一定遅れ$\delta \geqq 0$　をもつ$\mathfrak{V}$上の gate 回路'

というものを想定してみよう．その回路の機能は，数学的には，ひとつの関数（多値論理関数！）

$$h : \mathfrak{V}^n \longrightarrow \mathfrak{V}$$

（nは入力線の個数，$n \geqq 1$）と，定数

$$\delta \geqq 0$$

との組

$$(h, \ \delta) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (2)$$

によってあらわされる．これを基本的なオートマトンとして採用して，Neumann 型の問題を考えることは，現在の立

場としては，充分広いものといえよう（なお，Loomis 等は，$U=\{0,1\}$ の場合に限って，更に広い基本オートマトン
主として S-definite automaton
を考察している）．

時間量子 Δ があるとして（clock），δ が

$$\delta = n\Delta \qquad （n \text{は非負整数}）$$

の形にあらわせる，と仮定すれば，(2) の代りに，

$$(h,\ n) \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad (3)$$

を考えてもよい．次章では，その立場から，Neumann 型の問題を論じてみたい．

（なお，一般の場合，~~Minsky~~ Kleene の問題については，[5] 参照）

参考文献

[1] Post, E. L. The two-valued iterative systems of mathematical logics. Princeton (1941)

[2] 伊吹公夫，他 '万能論理関数系の一般論' 信学誌，46, No 7, pp 934-940 (1964)

[3] Minsky, A. Some universal elements for finite automata, Automata studies (1956)

[4] von Neumann, J. Probabilistic Logics and the synthesis, Ibid.

[5] Nozaki, A. Functional studies of Automata (I)

補

gate 回路について　gate 回路とは，いくつかの‘入力線’から信号を受け，一定の仕方で変換を施し，対応する信号を，一定時間後に，1本の出力線から送りだす装置のことである．信号の種類は，入出力共に同一で，その集合を U とする．

1) U は有限集合である．以下，

$$U = (k) = \{0, 1, \cdots, k-1\}$$

と仮定する．$(k \geqq 2)$

2) 入・出力の信号は，離散的な時間 $t \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ の関数である．

3) 時刻 $t \in \mathbb{N}$ における入力 x_i，出力 y を $x_i(t)$，$y(t)$ であらわすことにすれば，それらの関係は，或る

$$f \in \Omega_n(k) \quad , \qquad d \in \mathbb{N}$$

によって，次のようにあらわされる．

$$y(t+d) = f(x_1(t), \cdots, x_n(t))$$

f, d は，gate 回路それぞれに固有の関数および定数で，‘出力関数’および‘時間遅れ定数’と呼ばれる．

数学的には，f と d との組

$$(f, d) \in \Omega \times \mathbb{N}$$

を‘gate 回路’と呼んで差しつかえない．

2　多値論理関数族

2.1　諸記号

はじめに本章で用いる記号の定義を述べておく.

整数 $k \geqq 2$ に対して,

$$(k) = \{0, 1, \cdots, k-1\}$$

とおく.

(k) 上の n 変数関数とは, $(k)^n$ で定義された, 関数値がつねに (k) に属する関数のことである. $k=2$ なら,

(2) 上の3変数関数

とは, 3変数のブール関数（論理関数）に他ならない.

(k) 上のすべての n 変数関数の集合を

$$\Omega_n(k)$$

と書き,

$$\Omega(k) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n(k)$$

とおく（(k) は, 特に必要がなければ, 省くこともある).

$\Omega(k)$ の要素を, (k)-関数と呼ぶ.

(k) 上の gate 回路とは, $\Omega(k)$ に属する関数 f と, 非負整数 d との組

$$(f, d)$$

のことである. すべての gate 回路の集合は, 直積

$$\Omega(k) \times \mathbb{N}$$

によってあらわされる．

さて，gate 回路の集合

$$\mathfrak{F} \subseteq \Omega \times N$$

がひとつ指定されたとしよう．これに対し，

$$F_n = \{ f \in \Omega \ ; \ (f, n) \in \mathfrak{F} \}$$

とおくと，(k)-関数族の列

$$F_0 \ , \ F_1 \ , \ F_2 \ , \ \cdots\cdots$$

が得られる．これを使って，gate 回路どうしの接続を定義したいのであるが，その前に，関数合成のきちんとした定義を述べておかなければならない．

<u>関数の合成</u>　しばらく (k) を固定して考える．

1）$f \in \Omega_m$ ，$g_1, \cdots, g_m \in \Omega_n$ に対し，関数

$$f(g_1 \times \cdots \times g_m) \in \Omega_n$$

を，次のように定義する．

$$f(g_1 \times \cdots \times g_m)(x_1, \cdots, x_n)$$
$$= f(g_1(x_1 \cdots x_n), \ \cdots \ , \ g_m(x_1 \cdots x_n))$$

2）$f \in \Omega_m$ ，$G \subseteq \Omega_n$ に対し，

$$f \circ G = \{ f(g_1 \times \cdots \times g_m) \ ; \ g_1, \cdots, g_m \in G \}$$

とおく．もちろん，

$$f \circ G \subseteq \Omega_n$$

3) $f \in \Omega$, $G \subseteq \Omega$ に対し,

$$f \circ G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(f \circ (G \cap \Omega_n) \right)$$

とおく.

4) $F \subseteq \Omega$, $G \subseteq \Omega$ に対し,

$$F \circ G = \bigcup_{f \in F} f \circ G$$

とおく.

注意 このように定義された $\circ$ は, 結合律をみたす:

$$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$$

Projection　N 個の変数値から, i 番目の変数値をえらぶ関数を projection といい, 記号 P_i^N であらわす.

$$P_i^N (x_1, \cdots\cdots, x_N) = x_i$$

$$\mathcal{P}_N = \{ P_i^N \ ; \ 1 \leq i \leq N \},$$

$$\mathcal{P} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{P}_N$$

とおく.

注意 Projection は, 変数のおきかえを表現するのに利用される. たとえば, $h(x_1, x_2, x_3) = f(x_2, g(x_1, x_3))$

$$\Longleftrightarrow \quad h = f(P_2^3 \times g(P_1^3 \times P_3^3))$$

さて、いよいよ gate 回路の合成の定義にとりかかろう。

1) (f, d_0) および $(g_1, d_1), \cdots, (g_m, d_m)$ によって、(h, d) が合成できるとは、次の2つの条件がみたされていることをいう。

1.1) $f \in \Omega_m, \quad h = f(g_1 \times \cdots \times g_m)$

1.2) $d_1 = d_2 = \cdots = d_m, \quad d = d_0 + d_1$

2) $\mathfrak{F} \subseteq \Omega \times \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}' = \{(P, 0) ; P \in \mathcal{P}\}$

とする。

$\mathfrak{F} \cup \mathcal{P}'$ に属する gate 回路によって、合成できるすべての gate 回路の集合を、$\tilde{\mathfrak{F}}$ であらわす。

<u>定義1</u> $\mathfrak{F} \subseteq \Omega \times \mathbb{N}$ が Ω-complete であるとは、次の条件がみたされることをいう。

$$\forall f \in \Omega \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (f, n) \in \tilde{\mathfrak{F}}$$

<u>注意</u> ~~Ω-completeness~~ $\tilde{\mathfrak{F}}$ は、関数族 F_n を使うと、次のように特徴づけられる。

$$F^{(n)} = \{f \in \Omega ; (f, n) \in \tilde{\mathfrak{F}}\}$$

とおくことにしよう。すると、

1) $F^{(n)} \supseteq F_n$

2) $F^{(n)} \supseteq F^{(n-s)} \circ F^{(s)} \qquad (s \leqq n)$

3) $F^{(0)} \supseteq F^{(0)} \circ (F^{(0)} \cup \wp)$

4) $(F^{(n)})$ は，1) ～ 3) をみたす関数族の列の中で，$\subseteq$ の意味で最小である．

すると，$\tilde{\mathfrak{F}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} F^{(n)}$ であって，

$\mathfrak{F}$ が Ω - complete $\Longleftrightarrow$ $\bigcup_{n=0}^{\infty} F^{(n)} = \Omega$

後の証明の中では，専らこの特徴づけを利用する．

2．2．既知の諸結果

A．多値論理関数族の completeness

最初に，特殊な場合

$$F_0 \neq \phi , \qquad F_1 = F_2 = F_3 = \cdots = \phi$$

を考察しよう．この場合は，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F^{(n)} = F^{(0)}$$

で，$F^{(0)}$ は，F_0 の，次のようにして定義される 'free closure' $\overline{F_0}$ に一致する．

定義 2　$F \subseteq \Omega$ に対し，$\overline{F}$ を次のように定める．

1) $\overline{F} \supseteq F$

2) $\overline{F} \supseteq \overline{F} \circ (\overline{F} \cup \wp)$

3) $\overline{F}$ は, 1), 2) をみたす関数族の中で, $\subseteq$ の意味で最小である.

$k=2$ の場合, 問題は F_0 の completeness に帰着され, 既に述べたように, Post－伊吹によって, 完全に解決されている.

$k \geqq 3$ の場合, 問題はやはり

$$\overline{F_0} = \Omega(k)$$

に帰着される. これは, 多値論理関数族の completeness に他ならない. これも古くからとり扱われているが, 決定的に解かれたのは, 近年である (Rosenberg, 1965). 以下, 主要な概念と結果とを, 紹介してみよう (概念は, あとの証明でも使用する).

1 変数の (k)－関数の集合 Ω_1 と, その空でない部分集合 $S \subseteq \Omega_1$ を考える.

<u>定義 3</u>

$$F(S) = \{ f \in \Omega \ ; \ f \circ S \subseteq S \}$$

<u>注意</u> $S \subseteq \Omega_1$ だから, $f \circ S \subseteq \Omega_1$ である.

S としては, 今の場合, 次の条件をみたすものが重要である.

1) S は, 関数合成 $f \circ g$ に関して, 半群をなす

2) $S \subsetneq \Omega_1$　　　　$\{I\} \subsetneq S$

3) S は恒等写像 $I(x) = x$ を含む:

これら3つの条件をみたす $S \subseteq \Omega_1$ を, Ω_1 の

regular subsemigroup

という. すると, 次の補題が成りたつ.

<u>補題1</u>　1) 任意の $S \subseteq \Omega_1$ について, $\overline{F(S)} = F(S)$

2) S が regular ならば, $F(S) \neq \Omega$

<u>定理1</u> (Butler)

$\overline{F} \supseteq \Omega_1$ であるための必要充分条件は, 任意の regular subsemigroup S について,

$$F \not\subseteq F(S)$$

となることである.

<u>定理2</u> (Post-Slupeski 等-Butler)

$$\overline{F} = \Omega$$

であるための必要かつ充分なる条件は,

1) $\overline{F} \supseteq \Omega_1$

かつ

2) $F \not\subseteq N$

なることである. ただし, N は, $k = 2$ のとき,

$$N = M_4 \qquad \text{(Post)}$$

で，$k \geqq 3$ のときは，次のような集合である（Słupecki）

$N =$（全射（onto）でない関数のすべての集合）

$\cup$（effective variable を1個しか含まないような関数のすべての集合）

<u>注意</u>　$k \geqq 3$ の場合，全射でないすべての1変数の関数の集合を S_1（$\subseteq \Omega_1$）とすると，実は

$$N = F(S_1)$$

である．

<u>応用例</u>　$k = 2$ の場合，regular subsemigroup は4つあって，

$$S_0 = \{x, 0\}$$

$$S_1 = \{x, 1\}$$

$$S_2 = \{x, \bar{x}\}$$

$$S_3 = \{x, 0, 1\}$$

となる．容易にわかるように，

$$M_i = F(S_i) \qquad 0 \leqq i \leqq 3$$

である．

極大類の概念は，多値論理関数についてもそのまゝ拡張される．定理2からわかるように，

$$N, \quad F(S) \qquad (S \text{ は regular})$$

の形の集合族（有限個）の中で，$\subseteq$の意味で極大なものが，

極大（非万能）類になり，それ以外に極大な類はない．また，次の事実も，もはや明らかである．

$$F \text{ が complete} \iff \text{任意の極大類} M \text{について，} F \not\subseteq M.$$

Jablonski は，$k=3$ の場合のすべての極大類を決定した（それらは18個ある）．この場合，伊吹の意味での同値類も決定され，個数もわかっている（419個 — 宮川）．極小万能系も今や決定可能であるが，個数が大きいので，計算機によらなければならないであろう．

Rosenberg は，$k \geqq 3$ の場合の極大類を調べ，すべての極大類の特徴づけに成功した．（Jablonski の結果は，この結果から簡単に導かれる）．彼の証明は長大かつ難解であるが，subsemigroup の代りに，r 項関係（からきまる，関数族）を考察したところが特色である．次に，筆者の工夫した記法によって，その概念だけ紹介しよう．

(k) の要素を成分とする，r 次元タテ・ベクトルの集合を，$V_r(k)$ と書くことにしよう．（(k)，添字 r は，時には省略する）

$$f : (k)^n \longrightarrow (k)$$

は，自然に

$$f_r : V_r(k)^n \longrightarrow V_r(k)$$

なる関数に拡張される．もちろん，

$$f_n\left(\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots \\ a_{n1}\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{nn}\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(a_{11}\cdots a_{1n})\\ \vdots \\ f(a_{n1}\cdots a_{nn})\end{pmatrix}$$

と定義するのである．左辺~~の行列と書いて~~を

$$f\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

と書けば，なお見易いであろう．

(k) 上の n 項関係 R とは，$\nabla_n(k)$ の空でない部分集合のことである： $R \subseteq \nabla_n(k)$

<u>定義4</u>　(k) 上の n 項関係 R に対し，

$$F(R) = \{ f \in \Omega \;;\; f_n(R, \cdots, R) \subseteq R \}$$

と定める．

<u>注意</u>　$S \subseteq \Omega_1$ ならば，

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} f(0)\\ \vdots\\ f(k-1)\end{pmatrix} \;;\; f \in S \right\}$$

とおくと，

$$F(S) = F(R)$$

になる．

明らかに，極大類を求めるためには，すべての $F(S)$ を考

える代りに，すべての F(R) を考えてもよい．また，実は

$$1 \leqq k \leqq 4$$

だけ考えればよいこともわかっている（Salomaa）．

Rosenberg の証明は，この Salomaa の結果に基いている．

参考文献

[1] Rosenberg, I. Structure de la classe des fonctions définies dans un ensemble fini quelconque. CR. Acad. Sci. Paris T260 (1965)

[2] Jablonski, J. Functional structure of k-valued logics, Trudi Math. Institute Steklova 51 (1958) pp 5 - 142.

[3] Butler, J. On complete and independent sets of operations in finite algebras Pacific J. of Math, 10 (1960) 1169 - 1179

[4] Salomaa, A : On basic groups for the set of functions over a finite domain Annales Academiae Scientiarum Fennicae Series A. I. 338 (1963)

[5] Stupeski : CR de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie. classe III. 32 Année (1939) pp 102 - 109

B　同一 delay 多値論理関数族の completeness

次に，

$$F_1 \neq \phi, \qquad F_n = \phi \qquad (n \neq 1)$$

の場合を考察しよう．この場合，

$$F^{(0)} = \phi,$$
$$F^{(1)} = F_1 \circ \wp$$
$$F^{(n)} = F^{(n-1)} \circ F^{(1)}$$

であるから，

$$F^n = F^{n-1} \circ F^1$$
$$F^1 = F_1 \circ \wp$$

とおき，

$$\tilde{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F^n$$

と定めると，

$$\tilde{F}_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F^{(n)}$$

となる．

定義5　$F \subseteq \Omega$ とする．

F が $\sim$-complete $\Longleftrightarrow$ $\tilde{F} = \Omega$

F が $\sim$-maximal $\Longleftrightarrow$ 1) $\tilde{F} \neq \Omega$

2) $F' \supsetneqq F \Rightarrow \tilde{F}' = \Omega$

注意　これは Kudrjavtiev 流の定義である．伊吹はやゝ異

る定義を与え，その方が工学的に意味のある拡張を含むのであるが，数学的にきちんと述べるには，少し準備が要るので，ここでは省略する．

$\sim$-maximal 函類の決定は，$k=2$ の場合について，Kudrjavtsev が1960年に，伊吹が（独立に，やゝ異る定義の下で）1964年に与えた．定義の違いのために，極大類の個数が違ってくる（Kudrjavtsev 8個，伊吹7個）が，不能性に関する同値類の個数は一致する（18個）

$k \geqq 3$ の場合については，次の定理が成立する．

<u>定理3</u>　$F \subseteq \Omega$ が $\sim$-complete であるための必要充分条件は，次の2つである．

1) $\forall$ maximal class M （$\sim$-max ではない）

$$\forall n : F^n \not\subseteq M \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

2) $a, b \in (k)$, $a \neq b$ について，

$$K(a, b) = \{ f \in \Omega ; f(a, \cdots, a) = f(b, \cdots, b) \}$$

とおくと，

$$\forall a \neq b \in (k). \quad F \not\subseteq K(a, b)$$

<u>注意</u>　$(*)$ の否定をとれば，

$$\exists n : F^n \subseteq M \quad \cdots\cdots \quad (**)$$

つまり，$\sim$-complete でない函数族は，$K(a, b)$ か，あるいは，或る maximal class の $(**)$ の　に含まれる

イミでの'べキ根'になっている. maximal class の特徴づけはもうできているから, その結果を利用すれば, $\sim$-maximal class の特徴づけができる筈である. 実際, $k=2$ の場合の Kudrjavtiev の結果は容易に導かれるし, $k=3$ の場合には, 次のことがわかる.

定理4. $k=3$ の場合, $\sim$-maximal classes は丁度 30個 存在する.

一般の場合の特徴づけも, 今や時間の問題である.

C 一般の Ω-completeness

一般の $\mathcal{F} \subseteq \Omega \times \mathbb{N}$ の Ω-completeness は,

$$F_n = \{ f \in \Omega \ ; \ (f, n) \in \mathcal{F} \}$$

を利用すると, 次のように特徴づけられる.

定理5 $\mathcal{F} \subseteq \Omega \times \mathbb{N}$ が Ω-complete であるためには, 次の条件が必要かつ十分である.

1) $\forall$ maximal class M $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geqq 1)$

$\exists m \in \mathbb{N}$ $(m \geqq 0)$: $F^{(m,n)} \not\subseteq M$

注意 $F^{(s)}$ の定義は, p 13

2) もし $\overline{F_0} \neq \Omega$ ならば, $\exists n$.

$\forall a, b \in (k)$, $a \neq b$: $F^{(n)} \not\subseteq K(a, b)$

Bに述べた定理3は，この定理から直ちに導かれる．

一般の場合にも，'Ω-maximal class' の定義ができるから，その特徴づけも問題にしうる．それは無限個になるが，$k=2$ の場合には，Kudrjavtiev が特徴づけに成功している（その結果も，定理5を使えば，割合簡単に導くことができる）．$k \geqq 3$ の場合も，やればできるところまで来ているが，未だ実行していない．

最後に，残された問題をまとめて述べておこう．

1）　〜- maximal class の特徴づけ　（$k \geqq 4$）

2）　Ω- maximal class の特徴づけ　（$k \geqq 3$）

定義に適れば，

3）　closure operations の比較・検討 ― 特に，伊吹の closure について，位置づけ

4）　基本オートマトンの拡張 ―― gate 回路の代りに，$\overset{s}{k}$- definite automaton を考える（Loomis），等．

参考文献

[1] Kudrjavtiev, V. B. Teorema Polnoti dlja odnogo klassa avtomatov bez obratnox swjazei. Dokladi Akademii Nauk 132 (1960) pp 272 - 274

3　定理の証明

前章で述べた定理のうち、定理3〜5は筆者が証明したので、~~次~~以下その証明を述べる。便宜上、定理5の証明から始める。

3．1　基本定理の証明

<u>定理</u>（再掲）　$\mathcal{F} \subseteq \Omega \times N$ が Ω-complete

$\Longleftrightarrow$　1) $\forall M$ maximal $\forall n \geq 1$ $\exists m \geq 0$

$$F^{(mn)} \not\subseteq M$$

2) $\S\overline{F_0} \neq \Omega$ ならば、

$\exists n (\geq 1)$ $\forall a, b \in (k)$　$a \neq b$　　$F^{(n)} \not\subseteq K(a, b)$

（証明）

$(\Longrightarrow)$

$$h(x, y) = \mathrm{Max}\{x, y\} \oplus 1$$

という関数を考える。（$\oplus$ は modulo k の和）　これは

$$\overline{\{h\}} = \Omega$$

をみたす（Webb）

$$h'(x, y) = \mathrm{Max}\{x, y\} \oplus (k-1)$$

とおいても、

$$\overline{\{h'\}} = \Omega$$

となる。

$\mathcal{F}$ が Ω-complete なら、

$$f \notin K(a, b) \qquad \text{for all } a \neq b$$

である.（証終）

1）について.

<u>case 1.</u> ∃定数関数 $a(x) = a \notin M$ の場合.

$\mathcal{F}$ が Ω-complete $\Longrightarrow \exists m : a \in F^{(m)}$

$$\Longrightarrow a \in F^{(mn)} \Longrightarrow F^{(mn)} \not\subseteq M.$$

<u>case 2.</u> ∀定数関数 $a \in M$ の場合.

$$H(x, y, u, v) = \begin{cases} h(x, y) & \text{for } u = 0,\ v = 1 \\ x & \text{for } u = v \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく（但 h は Webb の関数）. もちろん

$$h \notin M$$

である. $\mathcal{F}$ が Ω-complete なら,

$$\exists m : H \in F^{(m)}$$

であるが,

$$Id(x) = H(x, x, x, x) \in F^{(m)}$$

であるから,

$$H = Id^{n-1} \circ H \in F^{(mn)}$$

ところが $0, 1, x \in M$ で

$$H(x, y, 0, 1) = h(x, y) \notin M$$

だから, $H \notin M$. 故に $F^{(mn)} \not\subseteq M$.（証終）

$(\Longleftarrow)$

補題1 $\forall a \neq b.\quad \mathcal{F}^{(n)} \not\subseteq K(a, b)$

$\Longrightarrow \quad \forall m,\ \forall a \neq b \quad F^{(mn)} \not\subseteq K(a, b)$

補題2 $\forall a \neq b \quad F^{(n)} \not\subseteq K(a, b),\quad G = F^{(n)} \cap \Omega_1$

$\Longrightarrow \quad G = \Omega_1$ (1変数関数の全体)

または $\quad F(G) \neq \Omega$

補題3 $\forall a \neq b \quad F^{(n)} \not\subseteq K(a, b)$

$G = F^{(n)} \cap \Omega_1 \subsetneqq \Omega_1 \Longrightarrow \exists M\ max.\quad F(G) \subseteq M.$

以下，$\overline{F_0} \neq \Omega$ の場合を考える.

(証明第1段) $\mathcal{F}(n) = \{(f, i) \in \mathcal{F}\ ;\ i \leqq n\}$

とおく.

$$F(n)_m = \{f \in \Omega\ ;\ (f, m) \in \mathcal{F}(n)\}$$
$$F(n)^{(m)} = \{f \in \Omega\ ;\ (f, m) \in \widetilde{\mathcal{F}(n)}\}$$

とおく. 明らかに,

$$n_1 \leq n_2 \Longrightarrow F(n_1)^{(m)} \subseteq F(n_2)^{(m)} \subseteq F^{(m)}$$
$$n \geq m \Longrightarrow F(n)^{(m)} = F^{(m)}$$

(証明第2段)

$$F(n)^{(m+n)} = \bigcup_{i=1}^{n} F(n)^{(i)} \circ F(n)^{(m+n-i)}$$

注意 $F(n)_m = \phi \quad$ for $\quad m > n.$

$$G_m = \Omega_1 \cap F(n)^{(m)}$$

とおくと，

$$G_m = \bigcup_{n=1}^{n} F(n)^{(i)} \circ G_{(m-i)} \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

$G \subseteq \Omega_1$ は有限個しかないから，sequence (block)

$$G_{m+1}, \cdots, G_{m+n}$$

も有限個しかない．従って，いつかは同じ block が2回現われ，(*)式からわかるように，その先は ~~同じ G がくり返す~~ 同じ pattern が反復してあらわれる（循環）．そこで，循環の初項を G_s，周期を d として

$$l(n) = ds$$

$$N(n) = p \prod_{i=1}^{n} l(i)$$

とおく．ただし，p は

$$\forall a \neq b \quad F^{(p)} \not\subseteq K(a, b)$$

となるような定数である．

（証明第3段）　$N(n)$ は $N(n-1)$，p の倍数である．

また，任意の $k \geq 1$ について，

$$F(n)^{(N(n))} \cap \Omega_1 = F(n)^{(kN(n))} \cap \Omega_1$$

である．これを $G(n)$ とおく：

$$G(n) = F(n)^{(N(n))} \cap \Omega_1 \subseteq \Omega_1$$

明らかに

$$G(1) \subseteq G(2) \subseteq G(3) \subseteq \cdots \qquad \subseteq \Omega_1$$

Ω_1 は有限集合だから，$\exists g$:

$$G(g) = G(g+1) = G(g+2) = \cdots = G$$

（証明第4段）$G \neq \Omega_1$ と仮定して矛盾を導く．

$G \neq \Omega_1$ なら，補題3 から $\exists M$: $F(G) \subseteq M$.

ところが 定理の仮定 1) により，$\exists m \geqq 0$:

$$F^{(mg')} \nsubseteq M \quad (\Rightarrow F^{(mg')} \nsubseteq F(G))$$

すなわち

$$\exists h \in F^{(mg')}, \quad h \notin F(G)$$

すなわち $\exists h \in F^{(mg')}$. $\exists g_1, \cdots, g_n \in G$

$$h(g_1 \times \cdots \times g_n) \notin G.$$

ところが，$g' = N(g)$ ととっておくと，

$$h \in F(mN(g))^{(mN(g))}$$

$$F(mN(g))^{(N(mN(g)))} \cap \Omega_1 = G \quad \cdots\cdots (\S)$$

$$F(mN(g))^{(N(mN(g)) - mN(g))}$$

$$\supseteq F(g)^{((N(mN(g)) - 1)mN(g))} \supseteq G$$

（次頁注意参照）

故に

$$F(mN(g))^{(N(mN(g)))} \supseteq F(mN(g))^{(mN(g))} \circ F(mN(g))^{*}$$

$$\ni h(g_1 \times \cdots \times g_n) \notin G$$

ただし $(*) = (N(mN(g)) - mN(g))$

これは（§）に矛盾する．

注意　$F(mN(g))^{(N(mN(g)))} = F(mN(g))^{(mN(g)N(mN(g)))}$

（証明第5段）　$G = \Omega_1$　と仮定してよい．

定理の条件を，$n = N(g)$，　$M = N$　の場合にあてはめれば，

$$\exists m : F^{(mN(g))} \not\subseteq N$$

明らかに

$$F^{(mN(g))} \supseteq G = \Omega_1$$

だから，

$$\tilde{\mathfrak{F}} \supseteq \widetilde{F^{(mN(g))}} = \overline{F^{(mN(g))}} = \Omega$$

（証終）

基本定理から，定理3を導くのは簡単である．

定理4の証明は長くなるので省略するが，便利な補題だけ掲げておこう．

補題4　　$F \not\subseteq N \implies \forall n \geqq 1 : F^n \not\subseteq N$

補題5　　$F \not\subseteq$ {1次関数} $\implies \forall n \geqq 1 :$

$F \not\subseteq$ {1次関数}

補題6（宮川）　$F(E_{01}) \cap F(E_{12}) \subseteq F(C_1)$

ただし

$$E_{ab} = \left\{ \binom{0}{0}\binom{1}{1}\binom{2}{2}\binom{a}{b}\binom{b}{a} \right\} \subseteq V_2(3),$$

$$C_a = \left\{ \binom{a}{0}\binom{a}{1}\binom{a}{2}\binom{0}{a}\binom{1}{a}\binom{2}{a} \right\} \subseteq V_2(3)$$