

## Fuzzy 代数

水本雅晴, 豊田順一, 田中幸吉

大阪大学・基礎工学部・電気工学科

あらまし 実際の物理界には, 境界のはっきりしない, すなわち, 真か偽かをはっきり割り当てることができないあまいな事柄, 現象などが数多くある. L.A.Zadeh<sup>(1)</sup> は, このようなことを量的に説明するために, membership 関数の概念を導入して, fuzzy 集合なる理論を発展させた.

本報告では, fuzzy 集合の理論に基づいて, fuzzy 代数についての概説を行なった. 1 章では fuzzy 集合について, 2 章では fuzzy 行列, 3 章では多値論理の拡張である連続論理の一種といえる fuzzy 論理についてあらましを述べた.

なお、fuzzy 代数に関する議論は、ブール代数の一般化として議論できる。

## 第 1 章 Fuzzy 集合

実際の物理界で見られる物のクラスには、それを構成する物の基準がはっきり定まっていないうち、あいまいな場合が多くある。たとえば、“1 よりもずっと大きい実数のクラス”とか、“美人のクラス”等がそれである。また、“大きい”、“熱い”、“長い”等の形容詞も明らかにあいまいなものである。このようなあいまいに定義されたクラスは、普通の数学的な意味では集合と構成してはいない。

L.A.Zadeh [1] によって定義された fuzzy 集合の概念は、あいまいに定義されたクラスに、membership 関数を導入することにより、数学的に記述しようとしたものである。なお、fuzzy 集合は“あいまい集合”とか、“ぼやけ集合”とかに訳される。

fuzzy 集合は、普通の集合の拡張として論じられるが、その応用は広範囲にわたるものと思われる。たとえば、人間の思考に関するもの、とりわけ、パターン認識、人工知能、

言語理論, 機械翻訳, 情報検索, 学習理論, システムの同定, 制御等に重要な役割りを果すものと思われる。

## 1.1 fuzzy 集合の定義

$X$  を空間とし, その要素を  $x$  と表わす。すなわち  $X = \{x\}$ 。  
 $X$  における fuzzy 集合  $A$  とは,

$$A = \{(x, \mu_A(x))\}, x \in X$$

で表わされる。ここで, 関数  $\mu_A$  は  $\mu_A: X \rightarrow M$  なる関数で "membership 関数" と名付ける。ただし,  $M$  は membership 空間である。値  $\mu_A(x) \in M$  は,  $A$  における  $x$  の "grade of membership" と表わす。membership 空間  $M$  が  $\{0, 1\}$  の場合, membership 関数は特性関数となり, fuzzy 集合は通常の意味における集合となる。  $M$  は一般には半順序集合, 又は束でよいが, ここでは簡単のため  $M = [0, 1]$  なる区間として議論を進めてゆく。値  $\mu_A(x)$  が 1 に近ければ,  $x$  の  $A$  に属する度合 (grade) が高いことを示している。

(例題)  $A = \{x \mid x \gg 1\}$  ( $A$  を 1 よりもずっと大きい実数の fuzzy 集合) とする。  $A$  を特性づける membership 関数  $\mu_A$  は, 主観的ではあるが, たとえば, つぎのように与えることが出来る。

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \dots x \leq 1 \\ \frac{1}{1 + \frac{1}{(x-1)^2}} & \dots x > 1 \end{cases}$$

fuzzy 集合の演算は、普通の集合の演算の拡張として、つぎのように定義される。

- |         |                  |                   |  |
|---------|------------------|-------------------|--|
| (1) 包含  | $A \subseteq B$  | $\Leftrightarrow$ | $\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in X.$                 |
| (2) 等値  | $A = B$          | $\Leftrightarrow$ | $\mu_A(x) = \mu_B(x)$                                      |
| (3) 和   | $C = A \cup B$   | $\Leftrightarrow$ | $\mu_C(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$                      |
| (4) 交わり | $C = A \cap B$   | $\Leftrightarrow$ | $\mu_C(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$                      |
| (5) 補集合 | $\bar{A}$        | $\Leftrightarrow$ | $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$                          |
| (6) 代数積 | $C = AB$         | $\Leftrightarrow$ | $\mu_C(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$                       |
| (7) 代数和 | $C = A \oplus B$ | $\Leftrightarrow$ | $\mu_C(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$ |
| (8) 絶対差 | $C =  A - B $    | $\Leftrightarrow$ | $\mu_C(x) =  \mu_A(x) - \mu_B(x) $                         |

(例題1) "非常に背の高い人" の fuzzy 集合は, "背の高い人" の fuzzy 集合に含まれる。

(例題2) fuzzy 集合  $A = \{x \mid x \gg 1\}$  の補集合  $\bar{A}$  は  $\bar{A} = \{x \mid x \text{ not } \gg 1\}$  である。

図1-1に、membership 関数がそれぞれ  $\mu_A, \mu_B$  である fuzzy 集合  $A, B$  の和, 交わり, および代数積の関係を示す。線分 1, 2 (太線) が和に関する membership 関数, 線分 3, 4 (細線) が交わりに関する membership 関数, および線分 5 (臭線) が代数積に関する membership 関数である。明らかに  $A \cup B \supseteq A \cap B \supseteq AB$  なる関係が成立する。

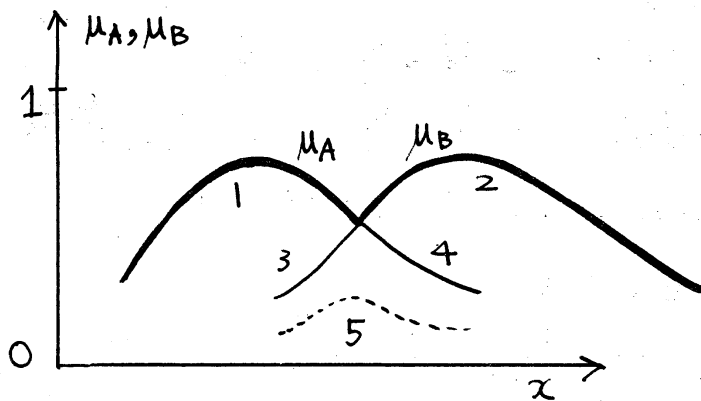


図1-1, 和(太線), 交わり(細線), 代数積(臭線)の図的表示。

"属する"という概念は、通常の集合論では大切なものであるが、fuzzy 集合の場合、グレードが1および0以外の場合は無意味であるが、しきい値を設けることにより定義することができる。レベル数が1, 2, ... となるに従って、2値, 3値, ... なる多値論理に対応する。たとえば、レベル数が2の場合、すなわち  $0 < \alpha < \beta < 1$  なるしきい値  $\alpha, \beta$  に対して

" $x$ が $A$ に属する"とは  $\mu_A(x) \geq \beta$ ,

" $x$ が $A$ に属さない"とは  $\mu_A(x) \leq \alpha$ ,

" $x$ が中間的な状態にある"とは  $\alpha < \mu_A(x) < \beta$

のように定義することができる。

fuzzy 関係 直積空間  $X \times Y = \{(x, y)\}$ ,  $x \in X, y \in Y$ ,  
における fuzzy 関係  $R$  とは,  $X \times Y$  における fuzzy 集合  $R$   
のことで,  $\mu_R(x, y)$  なる membership 関数によって特性づけ  
られる。一般に, 直積空間  $X = X^1 \times X^2 \times \dots \times X^n$  における  
 $n$ 項 fuzzy 関係とは,  $n$ 変数 membership 関数  $\mu_R(x_1, \dots, x_n)$ ,  
 $x_i \in X^i, i=1, \dots, n$ , によって特性づけられる  $X$  における fuzzy  
集合  $R$  のことである。

(例題)  $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  とする, ここで  $\mathbb{R}$  は実数の集合。すると  
 $x \gg y$  は  $\mathbb{R}^2$  における fuzzy 関係である。この場合, member-  
ship 関数  $\mu_A$  は, たとえば, つぎのように与えられる。

$$\mu_A(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{--- } x \leq y \\ \frac{1}{1 + \frac{1}{(x-y)^2}} & \text{--- } x > y \end{cases}$$

fuzzy 関係の合成  $R_1, R_2 \in X^2$  における fuzzy 関係と  
すると,  $R_1, R_2$  の合成 (composition) とは,  $X^2$  における

fuzzy関係で,  $R_1 \circ R_2$  と記し, フジのように定義される. なお, 合成の演算は結合律を満す.

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, y) = \sup_{v \in X} \min [\mu_{R_1}(x, v), \mu_{R_2}(v, y)].$$

(例題)  $R_1, R_2 \in X \gg Y$  なる fuzzy関係とすると, 合成  $R_1 \circ R_2$  は,  $X \gg Y$  なる fuzzy関係となる.

写像による fuzzy集合  $f \in X$  から  $Y$  への写像とする.  
すなわち,  $f(x) = y, x \in X, y \in Y$ .  $A \in X$  における fuzzy集合とすると, 写像  $f$  によって引き起された  $Y$  における fuzzy集合  $B$  は

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x)$$

と定義される.

fuzzy集合の射影  $A \in X \times Y$  における fuzzy集合とし,  
 $f \in X \times Y \rightarrow X$  なる写像とする. この写像  $f$  によって引き起された  $X$  における fuzzy集合を  $A$  の射影 (shadow) と呼び,  
 $S_X(A)$  と記す.  $S_X(A)$  の membership 関数は,

$$\mu_{S_X(A)}(x) = \sup_{y \in Y} \mu_A(x, y)$$

で示される。

条件付 fuzzy 集合  $Y$  における fuzzy 集合  $B(x)$  が、 $x \in X$  により条件付けられているとは、 $B(x)$  の membership 関数が、 $x$  をパラメータとして関連づけられていることである。 $B(x)$  の membership 関数を  $\mu_B(y|x)$  と記すことにする。 $X$  における fuzzy 集合を  $A$  とすると、 $\mu_B(y|x)$  によって引き起される  $Y$  における fuzzy 集合  $B$  は

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \min[\mu_A(x), \mu_B(y|x)]$$

で特性づけられる。なお、これは fuzzy 関係における合成の特別の場合である。

以上、簡単に fuzzy 集合に関するあらましを述べた。fuzzy 集合に関する理論は新しく、多くの概念は未だ定式化されていない。物理をはじめとするいわゆる "hard science" では、観測対象の間の厳密な関係を見出してきた。ところで生物学や心理学や社会現象等のいわゆる "soft science" で



は、厳密には扱えない問題が数多くあるが、1つの方法として、変数間の fuzzy 関係を求めることが考えられる。このような fuzzy 性は技術的なデザインの問題等にもあてはまる。fuzzy 集合論によってこれらの問題が完全に解決されるかというところではなく、むしろ、これらの問題に対する見方に重点がおかれるものといえよう。しかし、これらの問題の fuzzy 性を組織的に開発することにより、従来の確率等の方法では処理できなかった多くの困難な問題が解決されるものと思う。

## 第2章 Fuzzy 行列

本章では、fuzzy 行列の代数についての基本的な性質を議論する。

fuzzy 行列の理論は、オートマトン理論、スイッチ網、グラフ理論などに応用できる。

### 2.1. fuzzy 行列の諸定義

$n \times n$  fuzzy 行列  $A$  の  $(i, j)$  要素を  $a_{ij}$  とする。

ただし、 $1 \leq i, j \leq n$ ,  $0 \leq a_{ij} \leq 1$ ,  $a_{ij}$  を fuzzy 変数とする。

fuzzy 行列の演算は、ブール行列の演算の拡張として、フ

ぎのように定義できる。

$$1) A \oplus B = C \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij})$$

$$2) A \otimes B = C \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = \min(a_{ij}, b_{ij})$$

$$3) A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} \leq b_{ij}$$

$$4) A \circ B = C \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = \max_k \min(a_{ik}, b_{kj})$$

$$5) A^T = C \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ji}$$

$$6) I = \|m_{ij}\|, \quad \text{ここで} \quad m_{ij} = \begin{cases} 1 & \dots i=j, \\ 0 & \dots i \neq j. \end{cases}$$

$$7) O = \|0\|$$

$$8) E = \|1\|$$

注) 4) の fuzzy 行列の  $\circ$  算は, fuzzy 関係における合成 (composition) に対応している。

## 2.2. fuzzy 行列の基本性質

fuzzy 行列の定義より, 下記の様な性質が導びかれる。

(1) すべての fuzzy 行列  $A$  に対し,

$$O \leq A \leq E.$$

(2)  $A \oplus A = A, \quad A \otimes A = A.$

$$(3) \quad A \oplus B = B \oplus A, \quad A \otimes B = B \otimes A$$

$$(4) \quad A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C,$$

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$$

$$(5) \quad A \oplus (B \otimes C) = (A \oplus B) \otimes (A \oplus C)$$

$$A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

$$(6) \quad A \oplus (A \otimes B) = A$$

$$A \otimes (A \oplus B) = A$$

$$(7) \quad 0 \oplus A = A$$

$$0 \otimes A = 0$$

$$(8) \quad E \oplus A = E$$

$$E \otimes A = A$$

$$(9) \quad \text{一般}, \quad A \cdot B \neq B \cdot A$$

$$(10) \quad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$(11) \quad A \cdot I = I \cdot A = A$$

$$(12) \quad A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$$

$$(13) \quad A \cdot E = E \cdot A = E$$

$$(14) \quad A^0 = I, \quad A^{k+1} = A^k \cdot A$$

$$(15) \quad A^p \cdot A^q = A^{p+q}$$

$$(16) \quad (A^p)^q = A^{pq}$$

$$(17) \quad A \cdot (B \oplus C) = A \cdot B \oplus A \cdot C$$

$$(A \oplus B) \cdot C = A \cdot C \oplus B \cdot C$$

$$(18) \quad A \circ (B \otimes C) \cong A \circ B \otimes A \circ C$$

$$(B \otimes C) \circ A \cong B \circ A \otimes C \circ A$$

$$(19) \quad A \cong B, B \cong C \text{ ならば, } A \cong C$$

$$(20) \quad A \cong B \Leftrightarrow A \oplus B = B$$

$$A \cong B \Leftrightarrow A \otimes B = A$$

$$(21) \quad A \cong B \text{ ならば,}$$

$$A \oplus C \cong B \oplus C$$

$$A \otimes C \cong B \otimes C$$

$$A \circ C \cong B \circ C$$

$$(22) \quad A \cong B, C \cong D \text{ ならば,}$$

$$A \oplus C \cong B \oplus D$$

$$A \otimes C \cong B \otimes D$$

$$A \circ C \cong B \circ D$$

$$(23) \quad (A \oplus B)^T = A^T \oplus B^T$$

$$(24) \quad (A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$$

$$(25) \quad (A \circ B)^T = B^T \circ A^T$$

$$(26) \quad (A^T)^T = A$$

$$(27) \quad A \cong B \text{ ならば, } A^T \cong B^T$$

つぎに fuzzy 行列において成立する  $\equiv$  の基本定理を述べる。

《定理1》 任意の fuzzy 行列  $A$  に対して、  
 系列  $A, A^2, A^3, \dots$  は最終的に周期をなす。

(証明)  $n$  次元 fuzzy 行列  $A$  の要素の集合を  $M = \{a_1, \dots, a_\ell\}$  とすると、 $A$  の乗法 ( $\circ$  演算) によって生成される相異なる fuzzy 行列の個数は高々  $\ell^{n^2}$  である。すなわち有限である。

《定理2》  $n \times n$  fuzzy 行列  $A \geq I$  に対して、

$$I \leq A \leq \dots \leq A^{n-1} = A^n = A^{n+1} = \dots$$

が成立する。

(証明)  $I \leq A$  であるから、一般に  $A^{k-1} \leq A^k$  となる。

逆の証明は  $A^{n-1} = A^n$  を証明すれば十分である。

$A^n$  の対角項はすべて 1 であるから、非対角項を考える。

$A^n$  の  $(i, j)$  要素  $a_{ij}^{(n)}$ , ただし  $i \neq j$ , は

$$a_{ij}^{(n)} = \max_{1 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq n} \min [a_{ik_1}, a_{k_1k_2}, \dots, a_{k_{n-2}k_{n-1}}, a_{k_{n-1}j}]$$

と書ける。ところが、 $i, k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, j$  は  $n+1$  個あるので少なくともそのうちのいくつかは一致しなければならない。

1) ある  $s$  ( $1 \leq s \leq n-1$ ) に対して、 $j = k_s$  ならば、

上式の項はつぎのように書ける。

$$\min [a_{ik_1}, \dots, a_{k_{s-1}j}, a_{jk_{s+1}}, \dots, a_{k_{n-1}j}]$$

これは、 $A^s$  の  $(i, j)$  要素  $a_{ij}^{(s)}$  の項

$$\min [a_{ik_1}, \dots, a_{k_{s-1}j}]$$

に含まれる。従って、 $A^{n-1}$  の  $(i, j)$  要素  $a_{ij}^{(n-1)}$  の項にも含まれる。

2)  $i = k_s$  の場合にも同様に行う。

3) ある  $s, r$  に対して  $k_s = k_r (\neq i, j)$  とすると、 $a_{ij}^{(n)}$  の項は、つぎのような形となる。

$$\min [a_{ik_1}, \dots, a_{k_{s-1}k_r}, a_{k_r k_{s+1}}, \dots, a_{k_{r-1}k_r}, a_{k_r k_{r+1}}, \dots, a_{k_{n-1}j}]$$

これは明らかに

$$\min [a_{ik_1}, \dots, a_{k_{s-1}k_r}, a_{k_r k_{r+1}}, \dots, a_{k_{n-1}j}]$$

に含まれる。よって  $a_{ij}^{(n-1)}$  の項にも含まれる。

したがって、1), 2), 3) より

$$a_{ij}^{(n)} \leq a_{ij}^{(n-1)}, \quad \text{すなわち } A^n \leq A^{n-1}$$

が成立する。これより  $A^{n-1} = A^n$  が証明される。(証終)。

つぎのような

$$\bigoplus_{i=1}^n A^i = A^1 \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^n$$

の式を定義する。

((定理3))  $n \times n$  fuzzy 行列  $A$  が  $A \geq I$  ならば,

$$\bigoplus_{i=1}^n A^i = A^n$$

である.

(証明)  $A \geq I$  ならば,  $A^2 \geq A, A^3 \geq A^2, \dots, A^n \geq A^{n-1}$

が成立するから,

$$A \oplus A^2 = A^2$$

$$A^2 \oplus A^3 = A^3$$

$\vdots$

$$A^{n-1} \oplus A^n = A^n$$

したがって,

$$A \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^n = A^n.$$

さらに一般に,  $A \geq I$  ならば, 定理2より

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} A^i = A^n$$

となることが示される。(証明終).

((定理4))  $A$  を  $n \times n$  fuzzy 行列とすると, 各  $r$  に対し

$$\bigoplus_{i=1}^n A^i = \bigoplus_{i=1}^{n+r} A^i$$

が成立する.

(証明)  $r=1$  の場合を証明すれば十分である.

$$\bigoplus_{i=1}^{n+1} A^i = \bigoplus_{i=1}^n A^i \oplus A^{n+1}$$

と表わされる。そこで、 $A^{n+1}$  の各要素  $a_{ij}^{(n+1)}$  が、 $\bigoplus_{i=1}^n A^i$  の対応する  $(i, j)$  要素に含まれることを示せばよい。

$A^{n+1}$  の要素  $a_{ij}^{(n+1)}$  は、つぎのように表わされる。

$$a_{ij}^{(n+1)} = \max_{1 \leq k_1, k_2, \dots, k_n \leq n} \min [a_{ik_1}, a_{k_1 k_2}, \dots, a_{k_{n-1} k_n}, a_{k_n j}]$$

これより、定理2の証明と同様の方法で、 $a_{ij}^{(n+1)}$  は、適当な  $r (\leq n)$  に対する fuzzy 行列  $A^r$  に対応する  $(i, j)$  要素に含まれる。したがって

$$A^{n+1} \leq \bigoplus_{i=1}^n A^i$$

が成立する。

《定理5》  $A, B \geq I$  なる fuzzy 行列に対して

$$(A \oplus B)^* = (A^* \circ B^*)^* = (B^* \circ A^*)^*$$

ただし、 $A^* = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A^i$  のことである。

(証明)  $A^* \geq I, B^* \geq B$  であるので、 $A^* \circ B^* \geq B$

同様に  $A^* \circ B^* \geq A$ . 従って、 $A^* \circ B^* \geq A \oplus B$ .

よって、 $(A^* \circ B^*)^* \geq (A \oplus B)^*$ . 逆に、 $A^* \leq (A \oplus B)^*, B^* \leq (A \oplus B)^*$ .

従って、 $A^* \circ B^* \leq ((A \oplus B)^*)^2 = (A \oplus B)^*$

よって、 $(A^* \circ B^*)^* \leq ((A \oplus B)^*)^* = (A \oplus B)^*$ .



## 第3章 Fuzzy 論理

通常の論理(二値, 多値)においては, 与えられた命題の値は決定的, あるいは確率的方法により客観的に決められる。ところが, 実際の自然界においては, 客観的方法では論じられない事柄が数多くある。たとえば, "A子は美人であるか" といったような質問に対する答は多分に主観的で, はっきりと Yes か No か, すなわち真か偽かを論じられないことがある。そのようなことを量的に説明するために導入されたのが, 第1章で述べた Zadeh による membership 関数である。P.N. Marinos<sup>[9]</sup>は fuzzy 集合の概念を用いて, 主観的に真(1)と偽(0)の間の値(連続, 又は離散的)がきめられるような命題を扱った fuzzy 論理を定式化した。ところで, fuzzy 論理の種々の定義は, 多値論理の拡張として定義できる。

### 3.1. fuzzy 論理の諸定義

$X$  を空間  $\Omega = \{\omega\}$  における fuzzy 集合とし,  $x$  を  $X$  を特徴づける membership 関数とする。値  $x_i \in [0, 1]$  は対象物  $\omega_i$  に対する grade を表わす。今後  $x \in [0, 1]$  を fuzzy 変数 と名

付ける。

変数間の基本的な演算は、ブール演算の拡張として、つぎのように与えられる。

1) 論理和

$$\begin{aligned} x \vee y &= \max(x, y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|) \\ &= x\sigma(x-y) + y\sigma(y-x)^* \end{aligned}$$

2) 論理積

$$\begin{aligned} x \wedge y &= \min(x, y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|) \\ &= x\sigma(y-x) + y\sigma(x-y) \end{aligned}$$

3) 否定

$$\bar{x} = 1 - x$$

4) 含意

$$x \rightarrow y = \min(1-x+y, 1)$$

---

\* 
$$\sigma(z) = \begin{cases} 1 & \dots z > 0 \\ 0 & \dots z \leq 0 \end{cases}$$

なお、論理和  $x \vee y$  は含意  $\rightarrow$  を用いることにより、

$$x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y$$

と表わせる。

fuzzy 論理における論理演算を図的に示すと、図1)~4) のようになる。

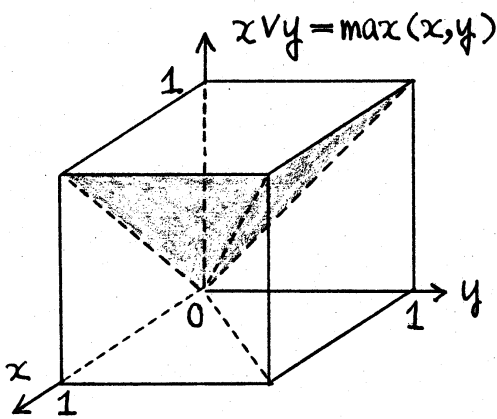


図1. 論理和(max)

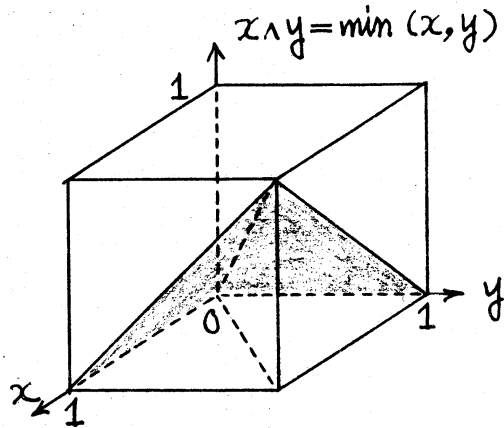


図2. 論理積(min)

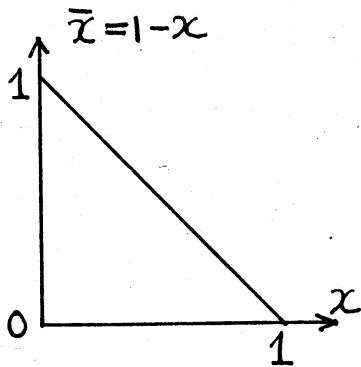


図3. 否定

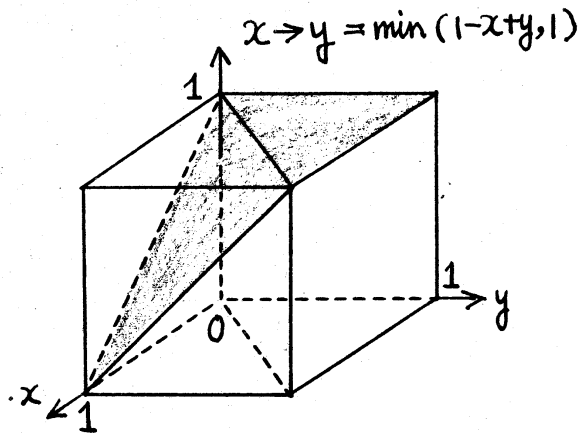


図4. 含意( $\rightarrow$ )

さらに,  $\max, \min, -$ , を実現する回路としては, 図5) ~ 7) のように, ダイオード, トランジスタを使うことにより実現できる.

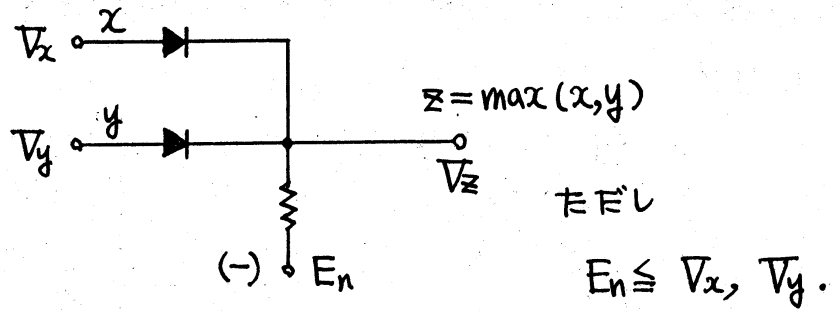


図5.  $\max$ の回路実現

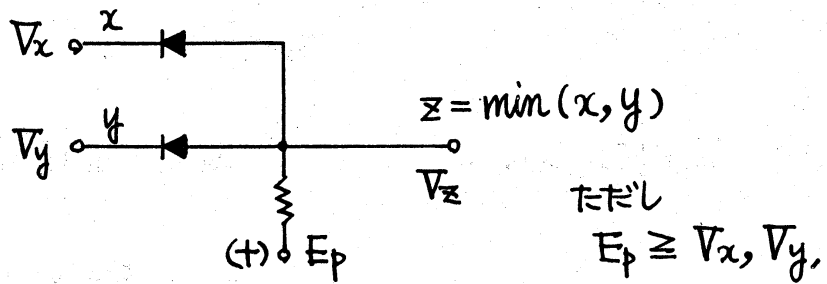


図6.  $\min$ の回路実現

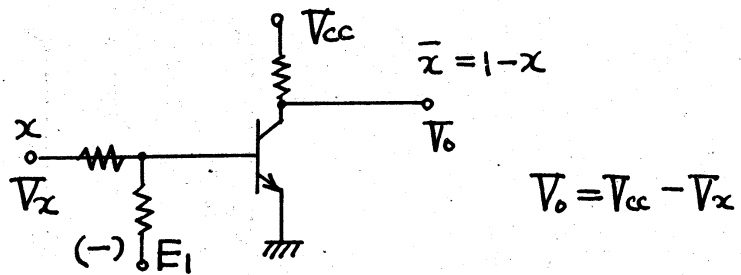


図7. 否定の回路実現

fuzzy 変数に, 前述のような論理操作をほどこした関数  
(fuzzy 関数と名付ける), たとえば,

$$f(x, y) = (\bar{x} \wedge y) \vee x$$

は

$$f(x, y) = \max[\min(1-x, y), x]$$

のことである. これは fuzzy 集合  $X, Y$  における membership  
関数の grade が  $x, y$  である対象物において, 新しい fuzzy  
集合  $Z = (\bar{X} \cap Y) \cup X$  での grade が  $f(x, y)$  であることを  
示している.

なお, 任意の fuzzy 関数は, 常に積和又は和積形式に表  
現できる.

### 3.2 fuzzy 関数の基本性質

前述の論理演算の定義より, fuzzy 関数に関してつぎのよ  
うな基本性質が導びかれる.

#### 基本性質

$$1) \quad \left. \begin{array}{l} x \vee x = x \\ x \wedge x = x \end{array} \right\} \text{(中等律)}$$

$$2) \quad \left. \begin{array}{l} x \vee y = y \vee x \\ x \wedge y = y \wedge x \end{array} \right\} \text{(交換律)}$$

$$3) \quad \left. \begin{aligned} x \vee (y \vee z) &= (x \vee y) \vee z \\ x \wedge (y \wedge z) &= (x \wedge y) \wedge z \end{aligned} \right\} \text{(結合律)}$$

$$4) \quad \left. \begin{aligned} x \vee (x \wedge y) &= x \\ x \wedge (x \vee y) &= x \end{aligned} \right\} \text{(吸収律)}$$

$$5) \quad \left. \begin{aligned} x \vee (y \wedge z) &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{aligned} \right\} \text{(分配律)}$$

$$6) \quad \begin{aligned} (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \\ = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) \end{aligned}$$

$$7) \quad \left. \begin{aligned} \overline{(x \vee y)} &= \bar{x} \wedge \bar{y} \\ \overline{(x \wedge y)} &= \bar{x} \vee \bar{y} \end{aligned} \right\} \text{(ド・モルガンの定理)}$$

$$8) \quad \begin{aligned} 0 \wedge x &= 0 \\ 0 \vee x &= x \\ x \wedge 1 &= x \\ x \vee 1 &= 1 \end{aligned}$$

$$9) \quad \begin{aligned} x \vee \bar{x} &= \max(x, 1-x) \\ x \wedge \bar{x} &= \min(x, 1-x) \end{aligned}$$

さらに, fuzzy 論理の演算の他に, 通常の  $+$ ,  $\times$  の算法を導入することができる. これより導びかれるいくつかの定理を示す.

$$10) \quad x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$$

$$x - (y \vee z) = (x - y) \wedge (x - z)$$

$$11) \quad (x \vee y) + (z \vee w) = (x + z) \vee (x + w) \vee (y + z) \vee (y + w)$$

$$(x \vee y) - (z \wedge w) = (x - z) \vee (x - w) \vee (y - z) \vee (y - w)$$

$$12) \quad x \times (y \vee z) = (x \times y) \vee (x \times z)$$

$$(x \vee y) \times (z \vee w) = (x \times z) \vee (x \times w) \vee (y \times z) \vee (y \times w)$$

なお, 式 10)~12) は  $\vee$  と  $\wedge$  を入れかえても成立する,  
おまひ  $\wedge$  と  $\vee$  を

fuzzy 論理に関する基本性質より導びかれる  $\leq, \equiv$  の関係を示す.

$$(1) \quad x \leq x \vee y, \quad x \geq x \wedge y$$

$$(2) \quad x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2 \text{ ならば, } x_1 \vee x_2 \leq y_1 \vee y_2, x_1 \wedge x_2 \leq y_1 \wedge y_2$$

$$(3) \quad x \geq z \text{ ならば,}$$

$$(y \vee x) \geq (y \vee z)$$

$$(y \wedge x) \geq (y \wedge z)$$

$$(x \wedge y) \vee z = x \wedge (y \vee z)$$

(4)  $x \leq y$  ならば,

$$\bar{y} \leq \bar{x}$$

$$x \vee y = y$$

$$x \vee y \vee z = y \vee z \text{ かつ}$$

(5)  $x \leq y$  か,  $x \leq z$  ならば,

$$x \leq y \vee z, x \leq y \wedge z$$

$$x \vee y \vee z = y \vee z$$

(6)  $x \geq y \geq z$  か,  $x \leq y \leq z$  ならば,

$$(0 \vee x \vee y) \wedge (0 \vee y \vee z) \wedge 1 = (0 \vee y) \wedge 1$$

(7)  $[(0 \vee x) \wedge 1] \wedge [(0 \vee y) \wedge 1] = (1 \wedge x \wedge y) \vee 0$

### 3.3. 否定項を含まない fuzzy 関数

否定項を含まない  $n$  変数 fuzzy 関数を  $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  とすると, 一般に

$$f(x_1, \dots, 0, \dots, x_n) \leq f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \leq f(x_1, \dots, 1, \dots, x_n)$$

なる大小関係が成立する。



つぎに、否定項を含まない fuzzy 関数の標準形は一般に「  
ぎ」のようになる。

「加法標準形」

$$\begin{aligned}
 & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 = & [ f(1, 1, \dots, 1, 1) \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n ] \\
 & \vee [ f(1, 1, \dots, 1, 0) \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1} \wedge 1 ] \\
 & \vee [ f(1, 1, \dots, 0, 1) \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge 1 \wedge x_n ] \\
 & \quad \text{-----} \\
 & \vee [ f(0, 0, 1, \dots, 0) \wedge 1 \wedge 1 \wedge x_3 \wedge \dots \wedge 1 ] \\
 & \quad \text{-----} \\
 & \vee [ f(0, 0, \dots, 0) \wedge 1 \wedge 1 \wedge \dots \wedge 1 ]
 \end{aligned}$$

「乗法標準形」

$$\begin{aligned}
 & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 = & [ f(1, 1, \dots, 1, 1) \vee 1 \vee 1 \vee \dots \vee 1 ] \\
 & \wedge [ f(1, 1, \dots, 1, 0) \vee 1 \vee 1 \vee \dots \vee 1 \vee x_n ] \\
 & \wedge [ f(1, 1, \dots, 0, 1) \vee 1 \vee 1 \vee \dots \vee x_{n-1} \vee 1 ] \\
 & \quad \text{-----} \\
 & \wedge [ f(0, 0, 1, \dots, 0) \vee x_1 \vee x_2 \vee 1 \vee \dots \vee x_n ] \\
 & \quad \text{-----} \\
 & \wedge [ f(0, 0, \dots, 0) \vee x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n ]
 \end{aligned}$$

上述の表現を簡潔にするところぎのようにまとめられる。

[加法標準形]

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_e f(e_1, e_2, \dots, e_n) \wedge x_1^{e_1} \wedge x_2^{e_2} \wedge \dots \wedge x_n^{e_n}$$

ただし,  $e_i = 0$ , 又は  $1$  である。

[乗法標準形]

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_e f(e_1, e_2, \dots, e_n) \vee x_1^{\bar{e}_1} \vee x_2^{\bar{e}_2} \vee \dots \vee x_n^{\bar{e}_n}$$

$$\text{ただし } \bar{e}_i = \begin{cases} 1 & \dots \text{ 且 } e_i = 0, \\ 0 & \dots \text{ 且 } e_i = 1. \end{cases}$$

(例題)  $f(x_1, x_2, x_3) = [(x_1 \vee x_2) \wedge x_3] \vee [(x_1 \vee x_3) \wedge x_2]$   
なる fuzzy 関数の標準形を求めよ。

$f(e_1, e_2, e_3)$  は右の  
ようになる。

$e_1$	$e_2$	$e_3$	$f(e_1, e_2, e_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

これより加法標準形は,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \cdot \\ &= (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_3 \wedge x_1) \cdot \end{aligned}$$

となり, 乗法標準形は,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \\ &= (x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_1) \end{aligned}$$

となり, fuzzy 関数  $f(x_1, x_2, x_3)$  はメジアン関数であることがわかる。

以上, 簡単に fuzzy 論理において成立する基本性質を述べた。

fuzzy 論理の応用としては, たとえば, パターンの認識, ニューロン・モデル, 関数発生, 自己組織系, associative gate, 自動モニター, プロセス・シミュレーション, 品質管理等に重要な役割を果たすであろう。

謝辞 種々の有益な御教示をいただいた北橋忠宏氏, 大学院生 藤田米春氏, 金孝行氏には深く感謝する。

## 参考文献

- 1) Zadeh, L.A. : " Fuzzy sets ", Inform. Control, 1, 338-353, 1965.
- 2) Zadeh, L.A. : " Fuzzy sets and systems ", Proc. Symp. System Theory, Polytechnic Institute of Brooklyn, P.29, 1965.
- 3) 水本, 豊田, 田中 : " Fuzzy 言語 ", 信学会オートマトン研資, 昭44-10.
- 4) Yoeli, M. : " A note on a generalization of boolean matrix theory ", Am. Math. Monthly, 68, 552-557, 1961.
- 5) Robert, P., Ferland, J. : " Generalisation de l'algorithme de Warshall ", R.I.R.O., 7, 71-85, 1968.
- 6) 尾崎弘, 樹下行三 : " デジタル代数学 ", 共立出版.
- 7) 水本, 豊田, 田中 : " Fuzzy オートマトンに関する二, 三の考察 ", 信学論(C), 昭44-07.
- 8) 豊田, 水本, 田中, 岸松 : " Path Retrieval System について ", 信学会オートマトン研資, 昭44-10.
- 9) Marinos, P.N. : " Fuzzy logic and its application to Switching systems ", IEEE. Trans. on Computers, vol. C-18, No. 4, 343-348, 1969.
- 10) Ginzburg, S.A. : " Continuous logic and its applications ", Automatika i Telemekhanika, 2, 115-132, 1967.