数理解析研究所講究録
第81巻 1970年 313-337

3値を用いたFail-Safe論理回路

明治大学 大学院

向殿 政男

§0. あらまし

この報告は、Fail-Safe論理の理論的研究について述べたものである。Fail-Safe論理に適した3値論理関数の性質について調べ、これを用いたFail-Safe論理系の構成法を示す。また、3値論理を利用したFail-Safe論理回路の構造についても概説する。

KEYWORDS ; 論理代数

論理回路理論

Fail-Safe 論理

C形論理関数

B-3 値論理関数

§1. まえがき

トランジスタ、抵抗、ダイオードなどで構成されている（2値）論理回路では、構成要素の故障で、真理値0であるべきとき1になったり、1であるべきとき0になったりする可

能性が十分にあり得る。これでは，人命を預かる分野などでは安心して使用するわけにはゆかない。そこで，故障して正常な出力を出し得なくなったときには，必ず，真理値0でも1でもない出力 ── 真理値$\frac{1}{2}$ ── を出すような論理回路 ── Fail-Safe 論理回路 ── が望まれる。すなわち，Fail-Safe論理回路は，論理演算の他に，故障を自分自身で発見してこれを示す能力も有する。工夫を凝して回路を構成することにより，このようなFail-Safe論理回路を構成することができる[*2, *4]。

§2. C形論理関数とB-3値論理関数

Fail-Safe論理回路では，回路が故障すると入力のいかんにかゝわらず出力は$\frac{1}{2}$となる。また，正常なときこの論理回路が実行する論理関数は，入力が2値（0，1）に限られゝば出力は必ず2値（0，1）に限られる。故障を表わす入力$\frac{1}{2}$があったとき，出力の真理値をいかに割り当てるか。こゝに，この回路が実行する3値論理関数としての，ある程度の自由度がある。

入力に一つでも$\frac{1}{2}$があると，出力は必ず$\frac{1}{2}$となるような3値論理関数をC形論理関数という[*6]。すなわち，

$V_2 = \{0,\ 1\}$，　$V_3 = \{0,\ \frac{1}{2},\ 1\}$

とし，変数を

$$\mathbb{X}=(x_1,\cdots,x_n)\ ,\ x_i\in V_3$$

とするとき，

<u>定義1</u>；　$\mathbb{X}\in V_2{}^n \Rightarrow F(\mathbb{X})\in V_2$

$$\mathbb{X}\in V_3{}^n-V_2{}^n \Rightarrow F(\mathbb{X})\equiv\frac{1}{2}$$

なるとき，FをC形論理関数という。‖　ここで，記号‖は定義，定理などの終りを示すものとする。

２値論理の演算AND，OR，NOTを，上のように３値まで拡張した演算を⊙，⩔，～ で表わすと，

$$x_1\odot x_2,\qquad x_1\veebar x_2,\qquad \sim x_1$$

の真理値表は表１～表３のようになる。すなわち，

<u>定義2</u>；　演算⊙，⩔，～ の真理表を表１～表３で定義する。‖

$x_2 \backslash x_1$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

表1. $x_1\odot x_2$

$x_2 \backslash x_1$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	$\frac{1}{2}$	1

表2. $x_1\veebar x_2$

x_1	0	$\frac{1}{2}$	1
$\sim x_1$	1	$\frac{1}{2}$	0

表3. $\sim x_1$

一方，２値論理のAND，OR，NOTを次のようにも拡張できる。すなわち，入力変数に$\frac{1}{2}$があるときは，その変数

が0だと仮定したときの出力と，1だとしたときの出力が等しければ，その値を出力に割り当て，異なるときは$\frac{1}{2}$を割り当てる。このように拡張した演算を・，∨，～で表わすと，

$x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$, $\sim x_1$

の真理値表は，表4，表5，表3となる（NOTの拡張～については定義2と同じ）。すなわち，

<u>定義3</u>；演算・，∨の真理値表を，表4，表5で定義する。‖

$x_2 \backslash x_1$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

表4. $x_1 \cdot x_2$

$x_2 \backslash x_1$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1	1

表5. $x_1 \vee x_2$

<u>定理1</u>；すべてのC形論理関数は，各変数と演算⊙，⩔，～の結合により表現できる。‖

また，各変数と演算・，∨，～の結合により表現される関数はB-3値論理関数といわれる。すなわち，帰納的に定義すると，

<u>定義4</u>；① 0，1，$x_i (\in T_3)$ はB-3値論理関数である。

② A, BがB-3値論理関数ならば，～A，A・B，

$A \vee B$ はB－3値論理関数である。

③上で与えられるもののみがB－3値論理関数である。 ||

演算⊙，∨，～に関しては，2値論理で成立する

(i) 吸収律 $A \vee (A \odot B) \equiv A$

$A \odot (A \vee B) \equiv A$

(ii) 相補律 $A \odot \sim A \equiv 0$

$A \vee \sim A \equiv 1$.

(iii) 零元の存在 $A \odot 0 \equiv 0$

$A \vee 1 \equiv 1$

は必ずしも成立しない。

また，演算・，∨，～については，真理値$\frac{1}{2}$を不確定に対応させて古くから研究されている[*1] これらについて，2値論理で成立する

(i) 相補律 $A \cdot \sim A \equiv 0$

$A \vee \sim A \equiv 1$

は必ずしも成立しない。

C形論理関数では，誤りを示す入力$\frac{1}{2}$が一つでもあれば，出力は必ず$\frac{1}{2}$となる。B－3値論理関数にはいかなる性質があるか。これを調べる。

まず，3値論理関数の定義域V_3^nに，ある半順序関係 $\geq$

を定義する。

定義5； $\mathbb{a}=(a_1,\cdots,a_n)$, $\mathbb{b}=(b_1,\cdots,b_n)\in V_3^n$ で，

$a_i\in V_2$ のとき　$a_i=b_i$

$a_i=\frac{1}{2}$ のとき　$b_i\in V_3$

がすべての i で成立するとき，

$$\mathbb{a}\geq\mathbb{b}$$

とする。‖

ここで，

定義6； $\mathbb{a}$ に表われるすべての $\frac{1}{2}$ を，0 または 1 で置き換えて得られるすべての V_2^n の元よりなる集合を

$$\mathbb{a}^*$$

で表わす。‖

とすると，関係 $\geq$ は，上で定義した集合の包含関係と一致する。すなわち，

定理2； $\mathbb{a}\geq\mathbb{b}$

$$\Leftrightarrow$$

$$\mathbb{a}^*\supset\mathbb{b}^* \qquad \|$$

関係 $\geq$ を用いて，B-3 値論理関数の必要十分条件が与えられる。

定理3； 3値論理関数 F が B-3 値論理関数であるための必要十分条件は，

(i) $\mathbb{a} \in \mathbb{V}_2^n \Rightarrow F(\mathbb{a}) \in \mathbb{V}_2$ かつ

(ii) $\mathbb{a} \gtrsim \mathbb{b} \Rightarrow F(\mathbb{a}) \gtrsim F(\mathbb{b})$

である。 ‖ （証明は§8附録参照.）

よって，B－3値論理関数の定義（定義4）のかわりに，定理3の(i), (ii)を用いてもよい。これからわかることは，B-3値論理関数では，ある入力 $\mathbb{a}$ のときの値 $F(\mathbb{a})$ が $\frac{1}{2}$ ならば，$\mathbb{a}$ よりも $\frac{1}{2}$ が多い入力に対しては必ず $\frac{1}{2}$ となる。また，$F(\mathbb{a})$ が 0 ならば，$\mathbb{a}$ よりも $\frac{1}{2}$ が多い入力に対しては決して 1 になることはない（$F(\mathbb{a})$ が 1 のときは 0 になることはない）。また，入力が 2 値（0，1）に限られるならば，出力は必ず2値（0，1）に限られる。

定理3から，ただちに次の系が導かれる。ただし，

$$F(\mathbb{a}^*)$$

とは，変数が集合 $\mathbb{a}^*$ のすべての値をとるとき，関数 F のとる値のすべてからなる集合とする。

<u>系1</u>； Fが B－3値論理関数ならば

$$\forall \mathbb{a} \in \mathbb{V}_3^n \quad \sim F(\mathbb{a}) \notin F(\mathbb{a}^*) \qquad \|$$

<u>系2</u>； Fが B－3値論理関数ならば

$$F(\mathbb{a}) \equiv \tfrac{1}{2} \Leftarrow F(\mathbb{a}^*) = \{0, 1\}$$

$$F(\mathbb{a}) \equiv 0 \Rightarrow F(\mathbb{a}^*) = \{0\}$$

$$F(\mathbb{a}) \equiv 1 \Rightarrow F(\mathbb{a}^*) = \{1\} \qquad \|$$

定義1および定理3からただちに

<u>定理4</u>; C形論理関数は，B−3値論理関数である。‖

たとえば，演算⊙，⩔を演算・，∨，～で表わしてみると，

$$x_1 \odot x_2 \equiv (x_1 \vee x_2)\cdot(\sim x_1 \vee x_2)\cdot(x_1 \vee \sim x_2)$$
$$\equiv x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \sim x_1 \vee x_2 \cdot \sim x_2$$
$$x_1 ⩔ x_2 \equiv x_1 \cdot x_2 \vee \sim x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \sim x_2$$
$$\equiv (x_1 \vee x_2)\cdot(x_1 \vee \sim x_1)\cdot(x_2 \vee \sim x_2)$$

となる。

C形論理関数も含め，任意の定理3の(i)，(ii)を満す関数（B−3値論理関数）が与えられたとき，この関数を各変数と演算・，∨，～の結合で表現する，あるアルゴリズムが求められるが，こゝでは省略する。（附録参照）

系2からわかるように，B−3値論理関数では入力に$\frac{1}{2}$が含まれていても必ずしも出力は$\frac{1}{2}$にはならない。すなわち，誤り訂正能力を有している場合がある。$F(\mathfrak{a}^*)=\{0\}$（または$\{1\}$）とは，$\mathfrak{a}$に含まれる誤り入力$\frac{1}{2}$が0だとしても，1だとしても出力は必ず0（または1）になることを意味しているから，

$$F(\mathfrak{a}^*)=\{0\} \Rightarrow F(\mathfrak{a}) \equiv 0$$
$$(\text{または } F(\mathfrak{a}^*)=\{1\} \Rightarrow F(\mathfrak{a}) \equiv 1\ )$$

とすれば，この関数は最大の誤り訂正能力を有した関数[*3]といえる。

<u>定義7</u>； $\mathbb{X} \in V_2^n \Rightarrow F(\mathbb{X}) \in V_2$ で

(i) $F(\mathbb{a}) \equiv \frac{1}{2} \Leftrightarrow F(\mathbb{a}^*) = \{0, 1\}$

(ii) $F(\mathbb{a}) \equiv 0 \Leftrightarrow F(\mathbb{a}^*) = \{0\}$

(iii) $F(\mathbb{a}) \equiv 1 \Leftrightarrow F(\mathbb{a}^*) = \{1\}$

なるとき，FをP形論理関数という。 ||

<u>定理5</u>； P形論理関数はB−3値論理関数である。 ||

各変数と演算・，∨，～の結合によるP形論理関数の一つの表現方法に，三根，高岡氏が述べているように[*3]，2値論理でいうPrime-implicant展開といわれる方法がある。

ある2値論理関数 f が与えられたとき，入力が2値（0，1）に限られたとき f を満すようなC形論理関数，P形論理関数は，定義1，定義7からわかるように一意的に定まる。2値論理のAND，OR，NOTに対応するC形論理関数が演算⊙，∨，～，P形論理関数が演算・，∨，～である。そして，C形論理関数が誤り訂正能力最小の，P形論理関数が最大の関数である。

なお，ここで述べたB−3値論理関数は，$\frac{1}{2}$ を ϕ とした，[illegible]，平山，浦野氏[*5]の提唱する ϕ 形論理関数と同一のものである。

§.3 Fail-Safe 論理系の構成

Fail-Safe 論理系は，いくつかの Fail-Safe な基本論理回路から構成される。

定義8； 基本論理回路が，B-3値論理関数を実行する回路で，回路が故障すると，入力にかゝわらず出力は必ず$\frac{1}{2}$となるとき，この基本論理回路は Fall-Safe であるという。 ‖

論理系を構成しているいくつかの基本論理回路が故障したとき，この論理系に故障が生じたという。

定義9； あるB-3値論理関数 F を実行する論理系が次の条件を満すとき，この論理系を Fail-Safe 論理系という。

(i) 論理系が正常な動作をしているときの出力を$F(X)$，故障が生じたときの出力を$F'(X)$とするとき，すべての入力Xについて，すべての系内の故障に対して

$$F(X) \leq F'(X)$$

である。 ‖

Fail-Safe 論理系では，故障が生じたときの出力は正しいか，または$\frac{1}{2}$であることがわかる。また，定義9の特別な場合としてC形Fail-Safe 論理系が定義される。

定義10； あるC形論理関数Fを実行する論理系が次の条

件を満すとき，この論理系をC形Fail-Safe論理系という。

(ii) 論理系が正常な動作をしているときの出力を$F(X)$，故障が生じたときの出力を$F'(X)$とするとき，すべての入力$X \in T_3^n$について，いかなる故障に対しても

$$F(X) \lessgtr F'(X) \equiv \frac{1}{2}$$

である。‖

C形Fail-Safe論理系では，基本論理回路が一つでも故障すると，および入力に故障入力$\frac{1}{2}$が一つでもあると，これを即座に検出して論理系の出力は$\frac{1}{2}$となる。すなわち，C形Fail-Safe論理系は，最終出力として0または1が出ている間は，この論理系を構成しているすべての基本論理回路が正常に動作していることを保証する。

通常，Fail-Safe論理系の構成要素として，演算・，V～，または⊙，V，～を実行するFail-Safeな基本論理回路が用いられる。

<u>定理6</u>；すべてのFail-Safe論理系は，演算・，V，～を実行するFail-Safeな基本論理回路より構成できる。‖

<u>定理7</u>；すべてのC形Fail-Safe論理系は，演算⊙，V，～を実行するFail-Safeな基本論理回路より構成できる

。 ‖

ある2値論理系が，AND，OR，NOTの結合で構成されているとき，この論理系にFail-Safeの機能をもたせるためには，3値まで拡張した・，∨，～を実行するFail-Safeな基本回路で，これらを置き換えればFail-Safe論理系となる。また，演算⊙，∨，～を実行するFail-Safeな基本論理回路で置き換えれば，C形Fail-Safe論理系となる。

以上述べたFail-Safe論理系，C形Fail-Safe論理系では，論理系内にいかなる故障が生じても，真理値0であるべきとき1になったり，逆に，1であるべきとき0になったりすることはない。そして，出力に$\frac{1}{2}$が得られれば，論理系を構成している基本論理回路に，故障が生じたことを示している。

§4. Fail-Safe論理回路構造の概要

Fail-Safe基本論理回路を実際に物理的に実現するためには，多くのアイディアが必要である。その特徴は*2

1° ポテンシャル極大の概念

2° ベクトル和の概念

である。

ポテンシャルの低い点から無条件に高い点になることはないから，正常な出力である真理値0，1にはポテンシャル極大の点，すなわち不安定の平衡点を対応させる。ポテンシャルの低い点に，故障の状態を表わす真理値$\frac{1}{2}$を対応させる。

物理的には，

真理値0　：　電圧 $-V$〔V〕

真理値1　：　電圧 $+V$〔V〕

真理値$\frac{1}{2}$　：　電圧　$V>|v|$ なるv〔V〕

のように対応させる。

また，上のようなポテンシャル極大の点を維持するには，すべての条件が正しいときのみ，すなわち，各条件を一つのベクトルで例えればそのベクトル和が閉じているときのみとする。何か障害が生ずればベクトル和が0にならないことを利用する。これを満す物理的現象として発振現象を利用する。すなわち，発振回路が発振するのは，発振回路のすべての構成要素がある特性の範囲内にあるときのみで，部品の断線，短絡，特性の劣化などによりある範囲外の特性になると発振は停止する。また，自励発振を抑えるため閾値発振を利用する。この発振出力を $-V$〔V〕，$+V$〔V〕に整流して，それを真理値0，1とする。

以上の概念を用いて，Fail-Safe な基本論理回路が図

1のように構成される。この回路が実行する論理関数を

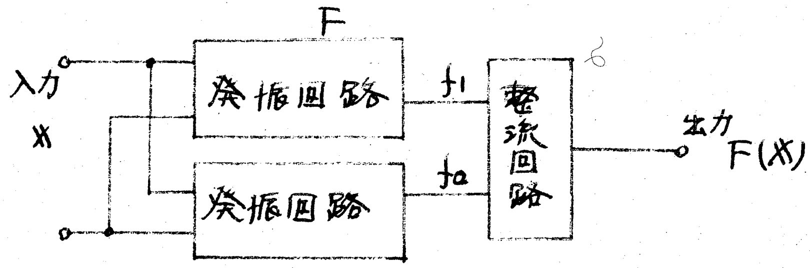

図1. Fail-Safe 基本論理回路構成図

Fとするとき, $F(x)\equiv 1$ のとき発振する回路と, $F(x)\equiv 0$ のとき発振する回路をもうける。これらの発振回路が発振しているときを真理値1, 発振停止のときを0とすれば,** これらの回路が実行する論理関数 f_1, f_0 は

$$f_1 \equiv J_1(F(x))$$

$$f_0 \equiv J_0(F(x))$$

となる。そして, この発振出力を整流して +V(T), −V(F) とする。すなわち, この整流回路が実行する論理関数Fは

$$F \equiv f_1\cdot\sim f_0 \vee \frac{1}{2}\cdot\sim f_0\cdot\sim f_1$$

** 2値変数の0, 1と, 3値変数の0, 1とをまったく別の物理的状態に対応づけているが, 2値状態は基本論理回路の内部のみであるからさしつかえない。また, このことが, 回路にFail-Safe性を持たせる一因ともなっている。

となる。実際，これらの論理演算を行なうように，発振回路，整流回路を構成できる。このようにすれば，発振回路や整流回路など，あらゆる部品の故障は出力電圧0と$\frac{1}{2}$の方向であり，故障すれば出力は必ず$\frac{1}{2}$となって Fail-Safe な基本論理回路が構成できる。

以上の構成法により，条件

$$a \leq b \quad \Rightarrow F(a) \leq F(b)$$

を満す3値論理関数を実行する Fail-Safe な論理回路が構成できる。実際，演算∩,⩛,∼,・,∨ などを実行する Fail-Safe な基本論理回路が試作，実験されている。詳しいことは，文献4を参照されたい。

§.5. あとがき

Fail-Safe 論理回路に応用される3値論理関数は，結局，AND(・), OR(∨), NOT(∼) で表現できる関数―B-3値論理関数―である。本論文では，この関数を，関数の定義域にある半順序関係を定義することにより統一的に取り扱った。これらの理論は，一つ Fail-Safe のみにとどまらず，ハザードの検出，Speed-Independent-logic，非同期論理回路などへ応用することができる。

§6. 謝辞

本報告は，文献*2～*5 に負うところが大きい。ここに感謝致します。

本研究は，筆者が電気試験所制御部自動制御研究室の実習生として行なったもので，御指導戴いた駒宮電子部品部長，土屋技官に，また御便宜を計って戴いた上滝制御部長，佐藤自動制御室長に感謝致します。

最後に，日頃御指導，ごべんたつ戴く明治大学後藤以紀教授に感謝致します。

§7. 参考文献

*1, 情報処理学会編；電子計算機ハンドブック，1966.

*2, 駒宮，森沢，土屋；フェイルセイフ論理回路概要，電四連合大会，1966－3.

*3, 三根，高岡；非対称故障論理回路を用いた2重系の一構成法，信学会電算機研，1967－4.

*4, 土屋；フェイルセイフ論理方式の研究，電試研究報告，NO.645

*5, 渡辺，浦野；Fail－Safe 論理系の構成理論，信学会誌，VOL.52－C，1969－1.

*6, 向殿；C形 Fail－Safe 論理の数学的構造について，信学会誌，VOL.52－C，1969－12.

§8. 附録

本報告では定理の証明はすべて省略したが，定理3についてのみこゝで証明を与える。なお，詳しいことは文献**を参照されたい。

<u>必要条件</u>；FがB－3値論理関数ならば，

(i) $\mathfrak{a} \in V_2^n \Rightarrow F(\mathfrak{a}) \in V_2$

(ii) $\mathfrak{a} \geq \mathfrak{b} \Rightarrow F(\mathfrak{a}) \geq F(\mathfrak{b})$ ‖

証明）任意のB－3値論理関数が(i)を満すことは定義より明らか。よって(ii)について証明する。

0，1，x_iが(ii)を満すことは明らか。

B－3値論理関数Fが(ii)を満すとする。

半順序関係"≥"の定義より

$$F(\mathfrak{a}) \geq F(\mathfrak{b}) \Rightarrow \sim F(\mathfrak{a}) \geq \sim F(\mathfrak{b})$$

であるから，～Fも(ii)を満す。

B－3値論理関数G，Hがそれぞれ(ii)を満すとする。

そのとき，G・Hが(ii)を満さない，すなわち

$$\mathfrak{a} \geq \mathfrak{b} \Rightarrow (G \cdot H)(\mathfrak{a}) \ngeq (G \cdot H)(\mathfrak{b})$$

とする。このことは，

** 向殿，後藤；B－3値論理関数の必要十分条件，明治大学工学部研究報告 No. 24.

① $(G\cdot H)(\mathfrak{a})\equiv 0$ でかつ $(G\cdot H)(\mathfrak{b})\not\equiv 0$ か または

② $(G\cdot H)(\mathfrak{a})\equiv 1$ でかつ $(G\cdot H)(\mathfrak{b})\not\equiv 1$

のいずれかを意味している。この二つのいずれの場合も成立しないことを示そう。

$(G\cdot H)(\mathfrak{a})\equiv 0$ は、$G(\mathfrak{a})\equiv 0$ かまたは $H(\mathfrak{a})\equiv 0$ を意味している。G, H は (iii) を満すとしているから $G(\mathfrak{b})\equiv 0$ または $H(\mathfrak{b})\equiv 0$ である。よって $(G\cdot H)(\mathfrak{b})\equiv 0$ よって ①は成立しない。

$(G\cdot H)(\mathfrak{a})\equiv 1$ は、$G(\mathfrak{a})\equiv 1$ かつ $H(\mathfrak{a})\equiv 1$ を意味している。G, H は (iii) を満すとしているから $G(\mathfrak{b})\equiv 1$ かつ $H(\mathfrak{b})\equiv 1$ である。よって $(G\cdot H)(\mathfrak{b})\equiv 1$, すなわち ②は成立しない。

以上により $G\cdot H$ は (iii) を満す。

B－3値論理関数 G, H がそれぞれ (iii) を満すとする。

$$G\vee H\equiv\sim(\sim G\cdot\sim H)$$

より，演算～，・ について (iii) を満すことが示されたから $G\vee H$ も (iii) を満す。

以上により，すべての B－3値論理関数は (iii) を満す。∎

十分条件を証明する前に，いくつかの定義と補助定理を述べる。

<u>補助定理1</u>；　Fが条件

(i)　$\mathbb{a} \in V_2^n \Rightarrow F(\mathbb{a}) \in V_2$

(ii)　$\mathbb{a} \geq \mathbb{b} \Rightarrow F(\mathbb{a}) \geq F(\mathbb{b})$

を満せば，

$$F(\mathbb{a}) \equiv \frac{1}{2} \Leftarrow F(\mathbb{a}^*) = \{0, 1\},$$

$$F(\mathbb{a}) \equiv 0 \Rightarrow F(\mathbb{a}^*) = \{0\},$$

$$F(\mathbb{a}) \equiv 1 \Rightarrow F(\mathbb{a}^*) = \{1\}$$

である。‖

証明）　半順序関係"≧"の定義5，　$\mathbb{a}^*$ の定義6，$F(\mathbb{a}^*)$ の定義より明らか。▮

<u>定義</u>；　$\mathbb{a} = (a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) \in V_3^n$　に対する単項式とは

$$x_1^{a_1} \cdot \cdots \cdot x_i^{a_i} \cdot \cdots \cdot x_n^{a_n}$$

ただし　　$a_i \equiv 0$ のとき　$x_i^{a_i} \equiv \sim x_i$

$a_i \equiv 1$ のとき　$x_i^{a_i} \equiv x_i$

$a_i \equiv \frac{1}{2}$ のとき　$x_i^{a_i} \equiv 1$

で表わされるB－3値論理関数をいう。‖

<u>定義</u>；　$\mathbb{a} = (a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) \in V_3^n - V_2^n$　に対する

補助単項式とは

$$x_1^{a_1} \cdot \cdots \cdot x_i^{a_i} \cdot \cdots \cdot x_n^{a_n}$$

ただし　　$a_i \equiv 0$ のとき　$x_i^{a_i} \equiv \sim x_i$

$a_i \equiv 1$ のとき　$x_i^{a_i} \equiv x_i$

$a_i \equiv \frac{1}{2}$ のとき　　$\sim x_i \cdot x_i$

で表わされるB−3値論理関数をいう。‖

補助定理2; 任意の $\mathbb{b} \in V_3^n$ に対する単項式を $M_{\mathbb{b}}$ とするとき,

$$\mathbb{a} = \mathbb{b} \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathbb{b}}(\mathbb{a}) \equiv 1,$$

$$\mathbb{a} > \mathbb{b} \quad \Rightarrow \quad M_{\mathbb{b}}(\mathbb{a}) \equiv \frac{1}{2},$$

$$M_{\mathbb{b}}(\mathbb{a}) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathbb{b}}(\mathbb{a}^*) = \{0\} \quad ‖$$

証明) 定義より明らか。‖

補助定理3; 任意の $\mathbb{b} \in V_3^n - V_2^n$ に対する補助単項式を $M'_{\mathbb{b}}$ とするとき,

$$\mathbb{a} \geq \mathbb{b} \quad \Leftrightarrow \quad M'_{\mathbb{b}}(\mathbb{a}) \equiv \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{a} \not\geq \mathbb{b} \quad \Leftrightarrow \quad M'_{\mathbb{b}}(\mathbb{a}) \equiv 0 \quad ‖$$

証明) 定義より明らか。‖

十分条件; $F: V_3^n \to V_3$ が

(i) $\mathbb{a} \in V_2^n \quad \Rightarrow \quad F(\mathbb{a}) \in V_2$,

(ii) $\mathbb{a} \geq \mathbb{b} \quad \Rightarrow \quad F(\mathbb{a}) \geq F(\mathbb{b})$

ならば, FはB−3値論理関数である。‖

証明) Fが(i), (ii)を満すとき, Fを表現する一つのB−3値論理関数 F_B を構成するアルゴリズムを与える。

まず, V_3^n の元で $\frac{1}{2}$ が i 個存在する元の集合を A^i

で表わすことにする。

アルゴリズム1;

1. $i=n$, $V=V_3^n$, $f'\equiv 0$ とする。

2. $a\in A^i\cap V$ で $F(a)\equiv 1$ なるすべての元 a に対する単項式を求め, f' に OR (V) で結合する。

3. 上の条件を満す a に含まれるすべての元(すなわち, $a\supseteq b$ なるすべての b)を V から消去したものを新しい V とする。

4. $i=0$ なら $f_1\equiv f'$ としてこのアルゴリズムを終る。それ以外のときは $i=i-1$ として2へ。

アルゴリズム2;

1. $i=1$, $V=V_3^n$, $f'\equiv 0$ とする。

2. $a\in A^i\cap V$ で $F(a^*)\equiv\{0\}$ かつ $F(a)\equiv\frac{1}{2}$ なるすべての元 a に対する補助単項式を求め, f' に OR (V) で結合する。

3. 上の条件を満す a を含むすべての元(すなわち, $a\leq b$ なるすべての b)を V から消去したものを新しい V とする。

4. $i=n$ のとき $f_2\equiv f'$ としてこのアルゴリズムを終る。それ以外のときは $i=i+1$ として2へ。

以上のアルゴリズムの有効性は，V_3^n の元が有限個であるから明らかである。このアルゴリズム 1，2 で求めた f_1，f_2 に対して，B－3値論理関数

$$F_B \equiv f_1 \vee f_2$$

は，与えられた関数 F を表現している。以下これを示す。

まず，$\mathfrak{a} \in V_2^n \Rightarrow F(\mathfrak{a}) \equiv F_B(\mathfrak{a})$ を示す。

$\mathfrak{a} \in V_2^n \Rightarrow f_2(\mathfrak{a}) \equiv 0$ は補助定理3より明らか。

また，$\mathfrak{a} \in V_2^n$ で $F(\mathfrak{a}) \equiv 1$ とする。

このとき，$\mathfrak{a} \le \mathfrak{b}$ なる $\mathfrak{b}$ に対する単項式が f_1 に必ず含まれているから $\cancel{F_B(\mathfrak{a})}$ 補助定理 2 より $F_B(\mathfrak{a}) \equiv 1$。

逆に $F_B(\mathfrak{a}) \equiv 1$ とする。

このとき，$\mathfrak{a} \le \mathfrak{b}$ なる元 $\mathfrak{b}$ に対する単項式が f_1 に含まれている。すなわち $F(\mathfrak{b}) \equiv 1$ なる $\mathfrak{a} \le \mathfrak{b}$ なる元 $\mathfrak{b}$ が存在する。F は (i) を満しているから

$$\mathfrak{a} \le \mathfrak{b} \Rightarrow F(\mathfrak{a}) \le F(\mathfrak{b}) \equiv 1$$

すなわち $F(\mathfrak{a}) \equiv 1$ である。

以上により　$F(\mathfrak{a}) \equiv 1 \Leftrightarrow F_B(\mathfrak{a}) \equiv 1$。

また，$\mathfrak{a} \in V_2^n$ ならば (i) より $F(\mathfrak{a}) \in V_2$，また F_B は B－3値論理関数より $F_B(\mathfrak{a}) \in V_2$

以上により　$F(\mathfrak{a}) \equiv 0 \Leftrightarrow F_B(\mathfrak{a}) \equiv 0$

が導かれて　$\mathfrak{a} \in V_2^n \Rightarrow F(\mathfrak{a}) \equiv F_B(\mathfrak{a})$　となる。

上のことから　　$F(\mathfrak{a}^*) = F_B(\mathfrak{a}^*)$

が得られる。また，明らかに　$F(\mathfrak{a}^*) = F_B(\mathfrak{a}^*)$ は

$\{0, 1\}$,　$\{1\}$,　$\{0\}$

のいずれか一つを取る。

$F(\mathfrak{a}^*) = \{0, 1\}$ とする。

このとき補助定理1より $F(\mathfrak{a}) \equiv \frac{1}{2}$ 。また，F_B は B-3値論理関数で条件(i), (ii)を満しているから同様に $F_B(\mathfrak{a}) \equiv \frac{1}{2}$ 。　すなわち　$F(\mathfrak{a}) \equiv F_B(\mathfrak{a})$ 。

$F(\mathfrak{a}^*) = \{1\}$ とする。

このとき，f_2 には $\mathfrak{a} \supsetneq \mathfrak{b}$ なる元 $\mathfrak{b}$ に対する補助単項式は存在しないから補助定理3より　$f_2(\mathfrak{a}) \equiv 0$ 。

また，条件(ii) より　$F(\mathfrak{a}) \not\equiv 0$。同様に $F_B(\mathfrak{a}) \not\equiv 0$。

$F(\mathfrak{a}) \equiv \frac{1}{2}$ とする。

このとき，$\mathfrak{a} \supsetneq \mathfrak{b}$ で $F(\mathfrak{b}) \equiv 1$ なる元 $\mathfrak{b}$ が存在して，かつ，$\mathfrak{a} \leq \mathfrak{c}$ で $F(\mathfrak{c}) \equiv 1$ なる元 $\mathfrak{c}$ は存在しない。すなわち，f_1 には上のような $\mathfrak{b}$ に対する単項式が存在して，$\mathfrak{c}$ に対する単項式は存在しないから，補助定理2より　$f_1(\mathfrak{a}) \equiv \frac{1}{2}$ 。

$F(\mathfrak{a}) \equiv 1$ とする。

このとき，$\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ で $F(\mathfrak{b}) \equiv 1$ なる元が必ず存在する。すなわち，f_1 には上のような $\mathfrak{b}$ に対する単項

式が存在するから補助定理2より $f_1(\mathrm{a}) \equiv 1$。

以上により $F(\mathrm{a}) \equiv F_B(\mathrm{a})$。

$F(\mathrm{a}^*) = \{0\}$ とする。

このとき，補助定理2より $f_1(\mathrm{a}) \equiv 0$ は明らか。

また，条件(ii)より $F(\mathrm{a}) \not\equiv 1$。同様に $F_B(\mathrm{a}) \not\equiv 1$。

$F(\mathrm{a}) \equiv \frac{1}{2}$ とする。

このとき，$\mathrm{a} \geq \mathrm{b}$ で $F(\mathrm{b}) \equiv \frac{1}{2}$ なる元 b が必ず存在する。すなわち，f_2 には上のような b に対する補助単項式が存在するから，補助定理3より $f_2(\mathrm{a}) \equiv \frac{1}{2}$。

$F(\mathrm{a}) \equiv 0$ とする。

このとき，$\mathrm{a} \geq \mathrm{b}$ で $F(\mathrm{b}) \equiv \frac{1}{2}$ なる元 b は存在しない。すなわち，f_2 には上のような b に対する補助単項式は存在しないから補助定理3より $f_2(\mathrm{a}) \equiv 0$

以上により $F(\mathrm{a}) \equiv F_B(\mathrm{a})$。

故之に，すべての $\mathrm{a} \in V_3^n$ に対して

$F(\mathrm{a}) \equiv F_B(\mathrm{a})$

すなわち，F_B は F を表現しているB－3値論理関数である。▮

なお，定義7のP形論理関数を上で述べたアルゴリズムに従って求めると，いわゆる prime-implicant 展開

といわれる表現式が得られる。