数理解析研究所講究録
第84巻 1970年 58-81

解析的手法と篩法

名大. 中井 喜信

§1　large sieve についてのくわしい解説及び良い応用については本橋氏の話の中で示される事でしょうから, ここでは Bombieri の平均値定理〈4〉等を改良する可能性を考えてみる。Riemann 予想その他を仮定しているため効果の程は疑問であるが。

次の記号を用意する.

a_n : 複素数　　$M < n \leq M+N$　　n :整数

$\mathfrak{M}(x) = \sum_{n \leq x} a_n$

Q : modulus q の有限集合　　$q \geq 1$

χ : character defined mod. q

$G(q)$, $G(\chi)$: 複素定数　　$G(\chi) = \overline{G(\bar{\chi})}$

$\sum_{\chi:\mathrm{mod}\,q}$: mod. q で定義される character χ についての和

$\sum^*_{\chi:\mathrm{mod}\,q}$: mod q で定義される原始-character についての和

$\sum\limits_{\substack{(a,q)=1 \\ \bmod q}}$: $(a,q)=1$ なる $\bmod q$ での代表系についての和

又通例のように

$$e(x) = e^{2\pi i x} \qquad x : \text{実数}$$

$$s = \sigma + it \qquad : \text{複素変数}$$

$A = O(B)$ $\quad |A| \ll B$: Landau, Vinogradov の記号.

とする.

さて、次の和

$$\sum_{q \in \mathcal{Q}} \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ \bmod q}} \left| \sum_{M<n \le M+N} a_n \cdot e\left(\frac{an}{q}\right) \right|^2 \qquad \cdots (1.1)$$

は large sieve において大切な意味を有し

$$(1.1) \ll (X^2+N) \cdot \sum_{M<n \le M+N} |a_n|^2 \qquad \cdots (1.2)$$

(ただし $X = \max\limits_{q \in \mathcal{Q}} q$) なる評価が最良である事. 又. Gallagher の不等式(<3> 式(5))

$$\phi(q)^{-1} \cdot \sum_{\chi \bmod q}^{*} \left| \sum_{M<n \le M+N} a_n \chi(n) \right|^2 \le q^{-1} \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ \bmod q}} \left| \sum_{M<n \le M+N} a_n \; e\left(\frac{an}{q}\right) \right|^2 \cdots (1.3)$$

により

$$\sum_{1 \le q \le X} \sum_{\chi \bmod q}^{*} \left| \sum_{M<n \le M+N} a_n \cdot \chi(n) \right|^2 \ll (X^2+N) \sum_{M<n \le M+N} |a_n|^2 \qquad \cdots (1.4)$$

である事もわかる。しかし数列 a_n を特殊のものにすれば (1.2) の評価より良いものが期待される. 以下それについて考えて

みよう。特に (4.15), (4.15'), (5.34) を見られたい。

§2. 今 $C_q(n)$ を Ramanujan の和とする。即ち

$$C_q(n) \underset{\mathrm{def.}}{=} \sum_{\substack{(a,q)=1\\ \bmod q}} e\left(\frac{an}{q}\right) \qquad \cdots (2.1)$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{d\mid q\\ d\mid n}} d\cdot\mu\left(\frac{q}{d}\right) & n\neq 0 \\ \phi(q) & n=0 \end{cases}$$

ただし. $\mu(m)$ は Möbius の函数で

$$\mu(m) = \begin{cases} 1 & m=1 \text{ の時} \\ 0 & m \text{ は平方因子を有する時} \\ (-1)^{\nu} & m = p_1\times\cdots\times p_\nu,\ p_j \text{ 素数},\ p_j\neq p_{j'} \end{cases} \qquad \cdots (2.2)$$

である。これにより

$$\sum_{q\in\mathcal{Q}} G(q)\cdot \sum_{\substack{(a,q)=1\\ \bmod q}} \left|\sum_{M<n\leq M+N} a_n\cdot e\left(\frac{an}{q}\right)\right|^2 \qquad \cdots (2.3)$$

$$= \sum_{q\in\mathcal{Q}} G(q)\cdot\varphi(q)\times\sum_n |a_n|^2 + \sum_{q\in\mathcal{Q}} G(q)\cdot \sum_{\substack{-N<k<N\\ k\neq 0}} \sum_{\substack{(a,q)=1\\ \bmod q}} e\left(\frac{ak}{q}\right)\cdot \sum\sum_{n_1-n_2=k} a_{n_1}\cdot\overline{a_{n_2}}$$

$$= \sum_{q\in\mathcal{Q}} G(q)\cdot\Phi(q)\times\sum_n |a_n|^2 + \int_0^1 d\alpha \left|\sum_{M<n\leq M+N} a_n\, e(n\alpha)\right|^2 \cdot \sum_{q\in\mathcal{Q}} G(q)\cdot\sum_{1\leq k<N} 2\cdot C_q(k)\cdot\cos 2\pi k\alpha \qquad \cdots (2.4)$$

となる。$\mathfrak{M}(x) = \sum_{n\leq x} a_n$ により Lebesgue-Stieltjes 積分を使い

更に

$$= \sum_{q \in \mathcal{Q}} G(q)\cdot\Phi(q)\cdot\sum_n |a_n|^2 \quad + \iint_M^{M+N} d\pi(x_1)\cdot d\overline{\pi}(x_2)\cdot\int_0^1 d\alpha\cdot e((x_1-x_2)\cdot\alpha)\cdot\sum_{q\in\mathcal{Q}} G(q)\cdot\sum_{1\le k<N} 2\cdot g(k)\cdot\cos 2\pi k\alpha$$

$$= \sum_{q\in\mathcal{Q}} G(q)\cdot\Phi(q)\cdot\sum_{M<n\le M+N} |a_n|^2 \quad + \iint_M^{M+N} d\pi(x_1)\cdot d\overline{\pi}(x_2)\times f(x_1-x_2) \qquad \cdots(2.5)$$

ただし

$$f(x) \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_{q\in\mathcal{Q}} G(q)\cdot\sum_{1\le k<N} 2\cdot g(k)\left(\frac{|x|}{k+|x|}\cdot\frac{\sin 2\pi(k-|x|)}{2\pi(k-|x|)} + i\cdot\frac{x}{k+|x|}\cdot\frac{1-\cos 2\pi(k-|x|)}{2\pi(k-|x|)}\right) \qquad (2.6)$$

を得る。ここに a_n がすべて実数ならば 上式の代りに

$$\sum_{q\in\mathcal{Q}} G(q)\cdot\Phi(q)\cdot\sum_{M<n\le M+N} |a_n|^2 \quad + \iint_M^{M+N} d\pi(x_1)\cdot d\pi(x_2)\times f(x_1-x_2) \qquad \cdots(2.5')$$

$$f(x) = \sum_{q\in\mathcal{Q}} G(q)\cdot\sum_{1\le k<N} 2\cdot g(k)\cdot\frac{|x|}{k+|x|}\cdot\frac{\sin 2\pi(k-|x|)}{2\pi(k-|x|)} \qquad \cdots(2.6')$$

を使っても良い。(2.3)を加法的な形と呼ぶ。

乗法的な形

$$\sum_{q\in\mathcal{Q}}\sum_{\chi \bmod q} G(\chi)\cdot\left|\sum_{M<n\le M+N} a_n\cdot\chi(n)\right|^2 \qquad \cdots(2.7)$$

について類似の事を行うと. 上式は

$$= \iint_0^1 d\alpha_1\cdot d\alpha_2\cdot\sum_{M<n_1\le M+N} a_{n_1}\cdot e(n_1\alpha_1)\cdot\overline{\sum_{M<n_2\le M+N} a_{n_2}\cdot e(n_2\alpha_2)}\times$$

$$\times\sum_{q\in\mathcal{Q}}\sum_{\chi\bmod q} G(\chi)\cdot\sum\sum_{\substack{M<k_j\le M+N\\ j=1,2}} \chi(k_1)\cdot\overline{\chi}(k_2)\cdot e(-k_1\alpha_1)\cdot e(k_2\alpha_2)$$

$$= \iint_M^{M+N} d\pi(x_1)\cdot\overline{d\pi(x_2)}\times F(x_1,x_2) \qquad \cdots(2.8)$$

〃

ただし $\quad F(x_1, x_2) \underset{\mathrm{df.}}{=} \sum_{\mathfrak{f} \in \mathfrak{O}} \sum_{\chi \bmod \mathfrak{f}} G(\chi) \cdot \sum\sum_{\substack{M < k_j \leq M+N \\ j=1,2}} \chi(k_1) \cdot \bar{\chi}(k_2) \cdot \frac{e^{2\pi i (x_1 - k_1)} - 1}{2\pi i (x_1 - k_1)} \cdot \frac{e^{-2\pi i (x_2 - k_2)} - 1}{-2\pi i (x_2 - k_2)}$ ⋯ (2.9)

を得る。

§3.

(lemma α) Dirichlet 級数 $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n^{-s}$ $(s = \sigma + it)$ は $\sigma \geqq 1 + \Delta$ なる所で絶対収束している時 $T \geqq 2$ として

$$\sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\Delta - iT}^{1+\Delta + iT} \frac{x^s}{s} \cdot g(s) \cdot ds$$
$$+ O\left(\sum_{|x-n| > \frac{1}{2}} \left(\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{1+\Delta} \cdot |a_n|}{T \cdot \left|\lg \frac{x}{n}\right|} \right) \right)$$
$$+ O\left(\sum_{|n-x| < \frac{1}{2}} \left(\frac{x}{n}\right)^{1+\Delta} \cdot |a_n| \cdot \min\left(\frac{1}{T \cdot \left|\lg \frac{x}{n}\right|}, \lg T \right) \right)$$

となる。積分路は垂直な線分である。

(lemma β) $\displaystyle \sum_{|n-x| > \frac{1}{2}} \left(\frac{x}{n}\right)^{1 + \frac{1}{\lg 3x}} \cdot \left|\lg \frac{x}{n}\right|^{-1} \ll x \cdot \lg 3x$

$$\sum_{|n-x| > \frac{1}{2}} \left(\frac{x}{n}\right)^{1 + \frac{1}{\lg 3x}} \cdot \frac{\lg n}{\left|\lg \frac{x}{n}\right|} \ll x \cdot (\lg 3x)^2 .$$

証明は例えば <6> の附録を見られたい。

§4 $\quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ を Riemann の ζ-函数とする。

$\zeta(s)^{-1}$ は $\sigma>1$ なる所で $\zeta(s)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\cdot n^{-s}$ ($\mu(n)$ については (2.2)) と表わされる。$s=1$ は $\zeta(s)$ の一位の極でそこでの留数は 1 である。他に特異点はない。$\zeta(s)$ の零点は $-2, -4, -6, \cdots$ か(これ等を自明な零点と呼ぶ)あるいは零点 $\rho=\beta+i\gamma$ は $0<\beta<1$ となるか(これ等を critical zeroes と呼ぶ)である。critical な零点については $\beta=\frac{1}{2}$ であろうと予想されているがこれは未解決の問題である。この予想を(狭義の) Riemann 予想と呼ぶ。この節では次の仮定を設けよう。

仮定(M):「critical な零点 $\rho=\beta+i\gamma$ について

$$1-\Theta \le \beta \le \Theta\ ;\quad \tfrac{1}{2}\le\Theta<1\ (\text{定数})$$

であり、更に任意の自然数 N に対し適当な正数 T が存在して $N<T<N+1$ であり …(4.1)

$$\zeta(s)\ne 0 \quad : -\tfrac{1}{2}\le\sigma\le 1,\quad t=\pm T$$

$$|\zeta(s)|^{-1}\ll T^{\frac{1}{2}} \quad : -\tfrac{1}{2}\le\sigma\le 1,\quad t=\pm T \qquad \cdots(4.2)$$

$$\sum_{\rho\ \mathrm{s.t.}\ |\gamma|<T}\operatorname*{Res}_{s=\rho}\left(x^{s}\cdot\zeta(s)^{-1}\right)\ll\begin{cases} x^{\Theta+\varepsilon}\cdot T^{\varepsilon} & : \mu(n)\ne 0 \text{ となるすべての } n \text{ について } |x-n|>\frac{1}{T} \text{ となる時} \\ x^{\Theta+\varepsilon}\cdot T^{\varepsilon}+T & : \mu(n)\ne 0,\ |x-n|<\frac{1}{T} \text{ となる } n \text{ が存在する時} \end{cases} \qquad \cdots(4.3)$$

となる。」

ただし ε は任意に小さく取れる正定数であり、$\operatorname*{Res}_{s=\rho}$ は

$s=\rho$ における留数の事である。$\Theta=\frac{1}{2}$ は Riemann 予想を意味する。

三節の lemma 達により

$$\mathfrak{M}(x) \underset{\text{def.}}{=} \sum_{n\le x} \mu(n)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{1+\frac{1}{\log 3x}-iT}^{1+\frac{1}{\log 3x}+iT} \frac{ds}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s} + O\left(\frac{x\cdot\log 3x}{T}\right)$$

$$+ O\left(\sum_{\substack{|n-x|<\frac{1}{2}\\ \mu(n)\neq 0}} \min\left(\frac{1}{T\cdot|\log\frac{x}{n}|}, \log T\right)\right) \quad \cdots(4.4)$$

となるが今積分路を

$$1+\frac{1}{\log 3x}-iT,\quad -\frac{1}{2}-iT,\quad -\frac{1}{2}+iT,\quad 1+\frac{1}{\log 3x}+iT$$

を結ぶ折線 C (右まわり) へと移す事により

$$\mathfrak{M}(x) = \sum_{\rho \text{ s.t. } |\gamma|<T} \operatorname*{Res}_{s=\rho} \frac{x^s}{s\cdot\zeta(s)} + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{ds}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}$$

$$+ O\left(\frac{x\cdot\log 3x}{T}\right) + O\left(\sum_{|n-x|<\frac{1}{2}} \min\left(\frac{1}{T\cdot|\log\frac{x}{n}|}, \log T\right)\right)$$

を得る。ここで

$$|\zeta(s)|^{-1} \ll \frac{1}{1+|t|} \qquad \sigma=-\frac{1}{2}$$

である事と (4.2) とから

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{ds}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^s}{s}\right| \ll \frac{x}{T^{\frac{1}{2}}} + x^{-\frac{1}{2}}$$

を得、従って

$$\mathfrak{M}(x) = \sum_{\rho \text{ s.t. } |\gamma|<T} \operatorname*{Res}_{s=\rho} \frac{x^s}{s\cdot\zeta(s)} + O\left(\frac{x}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$+ O\left(\sum_{|n-x|<\frac{1}{2}} \min\left(\frac{1}{T\cdot|\log\frac{x}{n}|}, \log T\right)\right) \quad \cdots(4.5)$$

と得る。

これにより次の式を評価しよう。

$$S = \sum_{q\le X}\ \sum_{\substack{(a,q)=1\\ \bmod q}} \left| \sum_{n\le N} \mu(n)\cdot e\left(\frac{an}{q}\right)\right|^2 . \qquad \cdots(4.6)$$

(2.5')と(2.6')とから(4.5)の $\varpi(x)$ により

$$S = \sum_{q\le X} \varphi(q)\cdot \sum_{n\le N}|\mu(n)| + \iint_0^N d\varpi(x_1)\cdot d\varpi(x_2)\cdot f(x_1-x_2)$$

ただし

$$f(x_1-x_2) = \sum_{q\le X}\ \sum_{1\le k<N} c_q(k)\cdot \frac{|x_1-x_2|}{k+|x_1-x_2|}\cdot\frac{\sin 2\pi(k-|x_1-x_2|)}{2\pi(k-|x_1-x_2|)} \qquad \cdots(4.7)$$

となる。今

$$\frac{d}{dx}\operatorname*{Res}_{s=\rho}\frac{x^s}{s\cdot\zeta(s)} = \left(\operatorname*{Res}_{s=\rho}\frac{x^s}{\zeta(s)}\right)\frac{1}{x}$$

であるから、上の事から

$$S = \sum_{q\le X}\Phi(q)\cdot\sum_{n\le N}\mu(n) +$$

$$+\iint_0^N \left(\frac{dx_1}{x_1}\cdot\sum_{|\gamma|<T}\operatorname*{Res}_{s=\rho}\frac{x_1^s}{\zeta(s)} + dx_1\, O\left(\frac{x_1}{T^{\frac12}}\right) + dx_1\, O\left(x_1^{-\frac12}\right)\right.$$
$$\left. + dx_1\, O\left(\sum_{|n_1-x_1|<\frac12}\min\left(\frac{1}{T\cdot\left|\log\frac{x_1}{n_1}\right|},\ \log T\right)\right)\right)\times$$
$$\times\left(\frac{dx_2}{x_2}\cdot\sum_{|\gamma|<T}\operatorname*{Res}_{s=\rho}\frac{x_2^s}{\zeta(s)} + dx_2\, O\left(\frac{x_2}{T^{\frac12}}\right) + dx_2\, O\left(x_2^{-\frac12}\right)\right.$$
$$\left. + dx_2\, O\left(\sum_{|n_2-x_2|<\frac12}\min\left(\frac{1}{T\cdot\left|\log\frac{x_2}{n_2}\right|},\ \log T\right)\right)\right)\times$$
$$\times\ f(x_1-x_2) \qquad \cdots(4.8)$$

となる。(4.7)の $f(x)$ の評価としておくと次のようである。

$$f(x) = \sum_{d\le X} d\cdot\sum_{\substack{q\le X\\ q\equiv 0 \bmod d}}\mu\left(\frac{q}{d}\right)\cdot\sum_{\substack{1\le k<N\\ k\equiv 0 \bmod d}}\frac{|x|}{k+|x|}\cdot\frac{\sin 2\pi(k-|x|)}{2\pi(k-|x|)} =$$

$$= \sum_{d\le X} d \times O\left(\frac{X}{d}\right) \times O\left(\frac{1}{d}\log\frac{N}{d}\right)$$

$$= O(X\cdot \log X\cdot \log N) \qquad \cdots(4.9)$$

同じようにして

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\cdot f(x_1-x_2) = O(X\cdot\log X\cdot \log N) \qquad \cdots(4.10)$$

であり、又

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1-x_2) = -\frac{\partial}{\partial x_2}\cdot f(x_1-x_2) \qquad \cdots(4.11)$$

である。又（例えば <6> 54ページ 問20)

$$\sum_{q\le X} \varphi(q) \ll X^2 \qquad \cdots(4.12)$$

である。(4.10), (4.11), (4.12), (4.8) から部分積分により

$$S = O(X^2\cdot N)$$
$$+ \iint_0^N \left(\frac{dx_1}{x_1}\cdot\sum_{\gamma<T}\operatorname*{Res}_{s=\rho}\frac{x_1^s}{\zeta(s)} + d_{x_1} O\left(\sum_{|n_1-x_1|<\frac{1}{2}}\left(\min\left(\frac{1}{T\cdot|\log\frac{x_1}{n_1}|}, \log T\right)\right)\right)\right)\times$$
$$\times\left(\frac{dx_2}{x_2}\cdot\sum\operatorname*{Res}_{s=\rho}\frac{x_2^s}{\zeta(s)} + d_{x_2} O\left(\sum_{|n_2-x_2|<\frac{1}{2}}\min\left(\frac{1}{T\cdot|\log\frac{x_2}{n_2}|}, \log T\right)\right)\right)\times$$
$$\times f(x_1-x_2)$$
$$+ O\left(\frac{N^2}{T^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{1}{2}}\right)^2 \times O(X\cdot\log X\cdot\log N)$$
$$+ O\left(\int_0^N\left|\frac{dx_1}{x_1}\cdot\sum\operatorname*{Res}_{s=\rho}\frac{x_1^s}{\zeta(s)} + d_{x_1}O\left(\sum_{|n_1-x_1|<\frac{1}{2}}\min\left(\frac{1}{T|\log\frac{x_1}{n_1}|}, \log T\right)\right)\right|\cdot\times \left(\frac{N^2}{T^{\frac{1}{2}}}+N^{\frac{1}{2}}\right)\times X\cdot\log X\cdot\log N\right)$$

を得る。ここで

$$\int_0^N dx\cdot O\left(\sum_{|n-x|<\frac{1}{2}}\min\left(\frac{1}{T\cdot|\log\frac{x}{n}|}, \log T\right)\right) =$$

$$= \sum_{n \le N} \int_{|x-n|<\frac{1}{2}} O\left(\min\left(\frac{1}{T\cdot|\log\frac{x}{n}|}, \log T\right)\right)\cdot dx$$

$$= \sum_{n \le N} \left(\int_{T^{-1}<|x-n|<\frac{1}{2}} O\left(\frac{1}{T\cdot|\log\frac{x}{n}|}\right)\cdot dx + \int_{|x-n|<\frac{1}{T}} O(\log T)\cdot dx \right)$$

$$= \sum_{n \le N} \left(\int_{T^{-1}<|x-n|<\frac{1}{2}} O\left(\frac{n}{T\cdot|x-n|}\right) dx + \int_{|x-n|<\frac{1}{T}} O(\log T)\, dx \right)$$

$$= \sum_{n \le N} O\left(\frac{n\cdot\log T}{T}\right) = O\left(\frac{N^2\log T}{T}\right) \qquad \cdots (4.13)$$

となる事. 又 (4.3) から

$$\int_0^N \frac{dx}{x} \left| \sum_{|\gamma|<T} \operatorname*{Res}_{s=\rho} \frac{x^s}{\zeta(s)} \right| \ll$$

$$\ll \int_0^N \frac{dx}{x}\cdot x^{\Theta+\varepsilon}\cdot T^{\varepsilon} + \sum_{n\le N} \int_{|x-n|<\frac{1}{T}} x^{-1}\cdot T\cdot dx$$

$$\ll N^{\Theta+\varepsilon}\cdot T^{\varepsilon} \qquad \cdots (4.14)$$

となる事から (4.9) により

$$S \ll X^2 N + \left(N^{\Theta+\varepsilon} T^{\varepsilon} + \frac{N^2\log T}{T}\right)^2 X\cdot\log X\cdot\log N$$

$$+ \left(\frac{N^2}{T^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot X\cdot\log X\cdot\log N$$

$$+ \left(N^{\Theta+\varepsilon}T^{\varepsilon} + \frac{N^2\log T}{T}\right)\left(\frac{N^2}{T^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{1}{2}}\right)\cdot X\log X\log N$$

$$\ll X^2\cdot N + N^{2(\Theta+\varepsilon)}\cdot X\cdot\log X \qquad (T = N^{\frac{3}{2}} \text{ とおいて})$$

となる. すなわち $\Theta \ge \frac{1}{2}$ を考慮して

$$\sum_{b\le X} \sum_{\substack{(a,b)=1 \\ \bmod b}} \left| \sum_{n\le N} \mu(n)\cdot e\left(\frac{an}{b}\right) \right|^2 \ll X^2\cdot N^{2(\Theta+\varepsilon)} \qquad \cdots (4.15)$$

を得. (1.3) から 更に

$$\sum_{q\le X}\ \sum_{\chi \bmod q}^{*}\left|\sum_{n\le N}\mu(n)\cdot\chi(n)\right|^2 \ll X^2\cdot N^{2(\Theta+\varepsilon)} \qquad \cdots(4.15)$$

を得る。

今 $L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\cdot n^{-s}$ を Dirichlet の L-函数とする時. Schwartz の不等式を使う事により (4.15) から

$$\sum_{q\le X}\ \sum_{\chi \bmod q}^{*}\left|L(s,\chi)^{-1}\right|^2 \ll X^2\cdot |s|^2 \quad , \sigma \geqq \Theta+\varepsilon \qquad \cdots(4.16)$$

を得る。即ち

[定理] 仮定(μ) のもとに

$$\sum_{q\le X}\ \sum_{\chi \bmod q}^{*}\left|\sum_{n\le N}\mu(n)\cdot\chi(n)\right|^2 \ll X^2\cdot N^{2(\Theta+\varepsilon)}$$

および

$$L(s,\chi) \neq 0 \qquad (\ \sigma > \Theta\ )$$

を得る。

§5 $\Lambda(n)$ を Mangoldt の函数とする.

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & n = p^e,\ p \text{ 素数}, e \geqq 1 \text{ の時} \\ 0 & \text{上 以外 の時} \end{cases} \qquad \cdots(5.1)$$

Bombieri の平均値定理

$$\sum_{q\le X}\ \max_{y\le N}\ \max_{\substack{(a,q)=1\\ \bmod q}}\left|\sum_{\substack{n\le y\\ n\equiv a \bmod q}}\Lambda(n) - \frac{1}{\phi(q)}y\right| \ll \frac{N}{(\log N)^A} \qquad \cdots(5.2)$$

ただし　$X \leqq N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{-B}$, $A>0$, $B=B(A)>0$　について四節と類似の事を行おう。(5.2) は現在最高の結果であるが、一見 Dirichlet の L-函数を含めた結果のようであるが、実は Riemann のζ-函数で説明出来るのではないかと考えられる事を示そう。次の仮定をおく。

仮定(Λ) Riemann のζ-函数 $\zeta(s)$ について

$$\zeta(s) \neq 0 \quad (\sigma > \Theta) \quad ; \quad 1 > \Theta \geqq \frac{1}{2} \ (\text{定数})$$

であり、その critical な零点 $\rho = \beta + i\gamma$ については

任意の自然数 N に対し適当な正数 T が存在して

$$N < T < N+1 \qquad \cdots (5.3)$$

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma \pm iT) \ll T^{\frac{1}{2}} \qquad -\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2 \qquad \cdots (5.4)$$

$$\sum_{\substack{\rho \text{ n.t} \\ |\gamma| < T}} x^{\rho} \ll \begin{cases} x^{\Theta} \log x \cdot \log T & : \Lambda(n) \neq 0 \text{ となるすべての } n \text{ について } |x-n| > \frac{1}{T} \text{ となる時} \\ x^{\Theta} \cdot \log x \cdot \log T + T \log x & : \Lambda(n) \neq 0,\ |x-n| < \frac{1}{T} \text{ となる } n \text{ が存在する時} \end{cases} \qquad \cdots (5.5)$$

となる

$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ はすべて一位の極を有し、$s=1$ では留数 1, $s=\rho$ では留数 −1 である事に留意されたい。$N \geqq 2X$ として

$$E \underset{\text{def}}{=} \sum_{q \leq X} \max_{y \leq N} \max_{\substack{(a,q)=1 \\ \bmod q}} \left| \sum_{\substack{n \leq y \\ n \equiv a \bmod q}} \Lambda(n) - \frac{1}{\varphi(q)} y \right| \qquad \cdots (5.6)$$

とおく。

定義から

$$E \ll \sum_{q \le X} \max_{2q \le y \le N} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{n \equiv a \bmod q \\ 2q \le n \le y}} \Lambda(n) - \frac{1}{\phi(q)} \cdot \sum_{\substack{(n,q)=1 \\ 2q \le n \le y}} \Lambda(n) \right|$$

$$+ \sum_{q \le X} \max_{2q \le y \le N} \max_{(a,q)=1} \left| -\frac{1}{\phi(q)} \cdot \sum_{\substack{(n,q) \ne 1 \\ 2q \le n \le y}} \Lambda(n) \right|$$

$$+ \sum_{q \le X} \max_{2q \le y \le N} \max_{(a,q)=1} \left| \frac{1}{\phi(q)} \left(y - \sum_{n \le y} \Lambda(n) \right) \right|$$

$$+ \sum_{q \le X} \max_{2q \le y \le N} \max_{(a,q)=1} \left| \frac{1}{\phi(q)} \cdot \sum_{n \le 2q} \Lambda(n) \right| \cdot$$

$$+ \sum_{q \le X} \max_{y < 2q} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{n \equiv a \bmod q \\ n \le y}} \Lambda(n) \right| \qquad \cdots (5.7)$$

であるが、第二・第四項には $\Lambda(n)$、$\phi(q)$ のよく知られた性質を使い、又 $\Theta < 1$ から

$$y = \sum_{n \le y} \Lambda(n) + O(y^{\Theta} \cdot \lg^2 y)$$

である事から

$$E \ll \sum_{q \le X} \max_{2q \le y \le N} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{n \equiv a \bmod q \\ 2q \le n \le y}} \Lambda(n) - \frac{1}{\phi(q)} \cdot \sum_{\substack{(n,q)=1 \\ 2q \le n \le y}} \Lambda(n) \right|$$

$$+ \lg^2 X \cdot (\lg \lg X)^2 + \lg X \cdot N^{\Theta} \lg^2 N$$

$$+ X \cdot \lg \lg X + X \cdot \lg X$$

$$\ll \sum_{q \le X} \max_{2q \le y \le N} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{n \equiv a \bmod q \\ 2q \le n \le y}} \Lambda(n) - \frac{1}{\phi(q)} \cdot \sum_{\substack{(n,q)=1 \\ 2q \le n \le y}} \Lambda(n) \right| +$$

$$+ \; N^{\Theta} \cdot \log^2 N \cdot \log X \qquad + X \cdot \log X \qquad \cdots (5.8)$$

となる。今 χ が mod q の character を動く時

$$\sum_{\substack{n \equiv a \bmod q \\ 2q \leq n \leq y}} \Lambda(n) \quad - \frac{1}{\phi(q)} \cdot \sum_{\substack{(n,q)=1 \\ 2q \leq n \leq y}} \Lambda(n)$$

$$= \frac{1}{\phi(q)} \cdot \sum_{\substack{\chi \neq \chi_0 \\ \bmod q}} \bar{\chi}(a) \cdot \sum_{2q \leq n \leq y} \Lambda(n) \cdot \chi(n)$$

(ただし χ_0 は単位指標) であるから

$$E' \underset{\mathrm{def.}}{=} \sum_{q \leq X} \max_{2q \leq y \leq N} \max_{\substack{(a,q)=1 \\ \bmod q}} \left| \sum_{\substack{n \equiv a \bmod q \\ 2q \leq n \leq y}} \Lambda(n) - \frac{1}{\phi(q)} \cdot \sum_{\substack{(n,q)=1 \\ 2q \leq n \leq y}} \Lambda(n) \right|$$

$$= \sum_{q \leq X} \max_{2q \leq y \leq N} \frac{1}{\phi(q)} \cdot \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(a) \cdot \sum_{2q \leq n \leq y} \chi(n) \cdot \Lambda(n) \right|$$

$$\leqq \sum_{q \leq X} \max_{2q \leq y \leq N} \frac{1}{\phi(q)} \cdot \max_{(a,q)=1} \sum_{\substack{\chi \neq \chi_0 \\ \bmod q}} \left| \sum_{2q \leq n \leq y} \chi(n) \cdot \Lambda(n) \right|$$

$$= \sum_{q \leq X} \max_{2q \leq y \leq N} \frac{1}{\phi(q)} \cdot \sum_{\substack{\chi \neq \chi_0 \\ \bmod q}} \left| \sum_{2q \leq n \leq y} \chi(n) \cdot \Lambda(n) \right|$$

となり Schwartz の不等式から

$$\leqq \sum_{q \leq X} \max_{2q \leq y \leq N} \frac{1}{\phi(q)} \left(\sum_{\chi \neq \chi_0} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{2q \leq n \leq y} \chi(n) \cdot \Lambda(n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$< \sum_{q \leq X} \max_{2q \leq y \leq N} \left(\sum_{\chi \neq \chi_0} \frac{1}{\phi(q)} \cdot \left| \sum_{2q \leq n \leq y} \chi(n) \cdot \Lambda(n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

を得る。そこで

$$E_q^2 \underset{\mathrm{def}}{=} \max_{2q \leq y \leq N} \left(\sum_{\chi \neq \chi_0} \frac{1}{\phi(q)} \cdot \left| \sum_{2q \leq n \leq y} \chi(n) \cdot \Lambda(n) \right|^2 \right) \qquad \cdots (5.9)$$

とおく時

$$E' < \sum_{q \le X} E_q \qquad \cdots (5.10)$$

$$E \ll E' + N^{\Theta} \lg^2 N \cdot \lg X + X \cdot \lg X \qquad \cdots (5.10')$$

となる。

以下、次の事を目標にしよう。即ち仮定(Λ)のもとに

$$E_q^2 \ll \max_{\substack{2q \le v_j \le N \\ j=1,2}} \left| \sum_{\substack{\chi \ne \chi_0 \\ \mathrm{mod}\, q}} \frac{1}{\phi(q)} \cdot \sum\sum_{\substack{2q \le k_j \le v_j \\ j=1,2}} \chi(k_1) \cdot \bar{\chi}(k_2) \right| \cdot \log^2 N$$

$$+ \max_{\substack{2q \le v \le N \\ 2q \le u \le N}} \left| \sum_{\substack{\chi \ne \chi_0 \\ \mathrm{mod}\, q}} \frac{1}{\phi(q)} \cdot \sum_{2q \le k_2 \le N} \bar{\chi}(k_2) \cdot \frac{e^{-2\pi i (u-k_2)} - 1}{-2\pi i (u-k_2)} \cdot \sum_{2q \le k_1 \le v} \chi(k_1) \right| \times$$

$$\times N^{\Theta} \cdot \log^3 N$$

$$+ \phi(q)^{-1} \cdot \left(N^{\Theta} \cdot \log^3 N \right)^2 \qquad \cdots (5.11)$$

となるはず。

(5.11) の成立を認めれば (5.11) の第一項には character の直交性を使い、第二項の k_1 についての和に character の直交性を使ってから k_2 については自明な評価を行う事により

$$E_q^2 \ll \phi(q) \cdot \log^2 N + N^{\Theta} \log^3 N \times \log N + \frac{1}{\phi(q)} \left(N^{\Theta} \cdot \log^3 N \right)^2$$

従って

$$E_q \ll \log N \cdot \left(\phi(q)^{\frac{1}{2}} + \phi(q)^{-\frac{1}{2}} N^{\Theta} \log^2 N \right) \qquad \cdots (5.12)$$

を得る。従って (5.10), (5.10') から $2X \le N$ の時仮定 (Λ) のもとに

$$E \ll \log N \cdot \left(X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{1}{2}} N^{\Theta} \log^2 N \right) \qquad \cdots (5.13)$$

を得る。

さて、(5.11) にとりかかろう。三節 lemma から

$$\psi(x) \underset{\text{def}}{=} \sum_{n\le x} \Lambda(n)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{1+\frac{1}{\log 3x}-iT}^{1+\frac{1}{\log 3x}+iT} \frac{x^s}{s}\cdot\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right)ds$$

$$+ O\left(\sum_{|x-n|>\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{1+\frac{1}{\log 3x}}\log n}{T\cdot\left|\log\frac{x}{n}\right|}\right)$$

$$+ O\left(\sum_{|x-n|<\frac{1}{2}} \log n\cdot\min\left(\frac{1}{T\cdot\left|\log\frac{x}{n}\right|},\ \log T\right)\right)$$

であるが、積分路を $1+\frac{1}{\log 3x}-iT$, $-\frac{1}{2}-iT$, $-\frac{1}{2}+iT$, $1+\frac{1}{\log 3x}+iT$ を結ぶ折線へと移し (5.4) より

$$\left|-\frac{\zeta'}{\zeta}\left(-\frac{1}{2}+it\right)\right| \ll \log(2+|t|)$$

となる事、又 lemma β を使う事により

$$\psi(x) = x + \sum_{|\gamma|<T} \operatorname*{Res}_{s=\rho}\left(\frac{x^s}{s}\cdot\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right)\right)$$

$$+ O\left(\frac{x}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(x^{-\frac{1}{2}}\log^2 T\right)$$

$$+ O\left(\sum_{|n-x|<\frac{1}{2}} \log x\cdot\min\left(\frac{1}{T\cdot\left|\log\frac{x}{n}\right|},\ \log T\right)\right)$$

$$= x - \sum_{|\gamma|<T} x^{\rho}\rho^{-1} + O\left(\frac{x}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(x^{-\frac{1}{2}}\log^2 T\right)$$

$$+ O\left(\sum_{|n-x|<\frac{1}{2}} \log x\cdot\min\left(\frac{1}{T\cdot\left|\log\frac{x}{n}\right|},\ \log T\right)\right)$$

を得る。従って

$$d\pi(x) = dx - \sum_{|\gamma|<T} x^{\rho}\cdot\frac{dx}{x}$$

$$+dx\left(O\left(\frac{x}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(x^{-\frac{1}{2}}\log^2 T\right) + O\left(\sum_{|u-x|<\frac{1}{2}}\log x\cdot\min\left(\frac{1}{T\cdot\left|\log\frac{x}{u}\right|},\ \log T\right)\right)\right) \quad \cdots(5.14)$$

となる。(2.7), (2.8) から

$$E_\xi^2 = \max_{2\xi\le y\le N}\left(\iint_{2\xi}^{y}\left(dx_1 - \sum_{|\gamma|<T} x_1^{\rho}\cdot\frac{dx_1}{x_1} + dx_1\left(O\left(\frac{x_1}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(x_1^{-\frac{1}{2}}\log^2 T\right) + O\left(\sum_{|u_1-x_1|<\frac{1}{2}}\log x_1\cdot\min\left(\frac{1}{T\cdot\left|\log\frac{x_1}{u_1}\right|},\ \log T\right)\right)\right)\right)\times\right.$$

$$\times\left(dx_2 - \sum_{|\gamma|<T} x_2^{\rho}\cdot\frac{dx_2}{x_2} + dx_2\left(O\left(\frac{x_2}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(x_2^{-\frac{1}{2}}\log^2 T\right) + O\left(\sum_{|u_2-x_2|<\frac{1}{2}}\log x_2\cdot\min\left(\frac{1}{T\cdot\left|\log\frac{x_2}{u_2}\right|},\ \log T\right)\right)\right)\right)\times$$

$$\left.\times\ F(x_1, x_2)\right)$$

ただし

$$F(x_1, x_2) \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_{\chi\ne\chi_0}\frac{1}{\phi(l)}\cdot\sum_{\substack{2\xi\le k_j\le y\\ j=1,2}}\sum \chi(k_1)\cdot\bar{\chi}(k_2)\cdot\frac{e^{2\pi i(x_1-k_1)}-1}{2\pi i(x_1-k_1)}\cdot\frac{e^{-2\pi i(x_2-k_2)}-1}{-2\pi i(x_2-k_2)} \quad \cdots(5.15)$$

を得。従って

$$E_\xi^2 = \max_{2\xi\le y\le N}\left\{\iint_{2\xi}^{y} dx_1\cdot dx_2\cdot F(x_1, x_2)\right. \quad \cdots(5.16)$$

$$+\iint_{2\xi}^{y}\frac{dx_1}{x_1}\cdot\frac{dx_2}{x_2}\cdot\left(\sum x_1^{\rho}\right)\left(\sum x_2^{\rho}\right)\cdot F(x_1, x_2) \quad \cdots(5.17)$$

$$+\iint_{2\xi}^{y} dx_1\left(O\left(\frac{x_1}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(x_1^{-\frac{1}{2}}\log^2 T\right) + O\left(\sum_{|u_1-x_1|<\frac{1}{2}}\log x_1\cdot\min\left(\frac{1}{T\cdot\left|\log\frac{x_1}{u_1}\right|},\ \log T\right)\right)\right)\times$$

$$\times dx_2\left(\left(O\left(\frac{x_2}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(x_2^{-\frac{1}{2}}\log^2 T\right) + O\left(\sum_{|u_2-x_1|<\frac{1}{2}}\log x_2\cdot\min\left(\frac{1}{T\cdot\left|\log\frac{x_2}{u_2}\right|},\ \log T\right)\right)\right)\times\right.$$

$$\times\left|F(x_1, x_2)\right| \quad \cdots(5.18)$$

$$+2\cdot\iint_{2\xi}^{y} dx_1\cdot dx_2\left(O\left(\frac{x_2}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(x_2^{-\frac{1}{2}}\log^2 T\right) + O\left(\sum_{|u_2-x_2|<\frac{1}{2}}\log x_2\cdot\min(\cdots)\right)\right)\cdot F(x_1, x_2) \quad \cdots(5.19)$$

$$+$$

$$\left[\begin{array}{l} -2\displaystyle\iint_{2q}^{y} dx_1\cdot\left(\frac{dx_2}{x_2}\cdot\Sigma x_2^{\rho}\right)\cdot F(x_1,x_2) \\ -2\displaystyle\iint_{2q}^{y}\left(\frac{dx_2}{x_2}\ \Sigma x_2^{\rho}\right)\cdot d_{x_1}\left(O\left(\frac{x_1}{T^{\frac12}}\right)+O\left(x_1^{\frac12}\log^2 T\right)+O\left(\sum_{|x_1-x_1|<\frac12}\log x_1\cdot\min(\cdots)\right)\right)\cdot F(x_1,x_2)\end{array}\right] \begin{array}{l}\cdots(5.20)\\ \\ \cdots(5.21)\end{array}$$

となる。character の直交性から

$$|F(x_1,x_2)| \ll \sum_{\substack{2q\le k_j\le y\\ k_1\equiv k_2 \bmod q}}\sum \min\left(1,\frac{1}{|x_1-k_1|}\right)\times\min\left(1,\frac{1}{|x_2-k_2|}\right)$$

$$+\sum_{2q\le k_j\le y}\sum\frac{1}{\phi(q)}\cdot\min\left(1,\frac{1}{|x_1-k_1|}\right)\times\min\left(1,\frac{1}{|x_2-k_2|}\right)$$

$$\ll\begin{cases}\phi(q)^{-1}\cdot\log^2 N+1 & : \ k_1\equiv k_2 \bmod q,\ |x_j-k_j|<\frac12\ \ j=1,2 \text{ と} \\ & \quad\text{なる } k_1,k_2 \text{ が存在する時} \\ \phi(q)^{-1}\cdot\log^2 N & : \ \text{それ以外の時}\end{cases}\qquad\cdots(5.22)$$

なる評価が成立する。$F(x_1,x_2)$ の各導函数についても同じ評価が成立する。

(5.18) は部分積分を行ったのち (5.22) 及び (4.13) から

$$(5.18)\ \ll\ \phi(q)^{-1}\log^2 N\left(\frac{N^2}{T^{\frac12}}+N^{\frac32}\log^2 T+\frac{N^2\log N\cdot\log T}{T}\right)^2 \qquad\cdots(5.23)$$

と得る。くわしくは (5.29) と類似の計算による。

(5.16) を評価しよう。まず

$$g(v_1,v_2) \underset{\mathrm{df}}{=} \sum_{\chi\ne\chi_0}\phi(q)^{-1}\sum_{2q\le k_j\le v_j}\sum\chi(k_1)\cdot\bar\chi(k_2) \qquad\cdots(5.24)$$

$$h_+(z) = \frac{e^{2\pi iz}-1}{2\pi iz}$$

$$h_-(z) = \frac{e^{-2\pi iz}-1}{-2\pi iz} \qquad\cdots(5.25)$$

とおくと、

$$\iint_{2\zeta}^{y} dx_1 \cdot dx_2 \cdot F(x_1, x_2) = \iint_{2\zeta}^{y} dx_1 \cdot dx_2 \cdot \iint_{2\zeta}^{y} d_{v_1} d_{v_2}\, g(v_1, v_2) \cdot h_+(x_1 - v_1) \cdot h_-(x_2 - v_2)$$

$$= \iint_{2\zeta}^{y} dx_1\, dx_2 \Bigg(g(v_1, v_2) \cdot h_+(x_1 - v_1) \cdot h_-(x_2 - v_2) \Big|_{v_1 = 2\zeta}^{v_1 = y} \Big|_{v_2 = 2\zeta}^{v_2 = y}$$

$$+ \iint_{2\zeta}^{y} dv_1 \cdot dv_2 \cdot g(v_1, v_2) \cdot h_+'(x_1 - v_1) \cdot h_-'(x_2 - v_2)$$

$$- \int_{2\zeta}^{y} dv_1 \cdot \Big[h_-(x_2 - v_2) \cdot (-h_+'(x_1 - v_1)) \cdot g(v_1, v_2) \Big]_{v_2 = 2\zeta}^{v_2 = y}$$

$$- \int_{2\zeta}^{y} dv_2 \cdot \Big[h_+(x_1 - v_1) \cdot (-h_-'(x_2 - v_2)) \cdot g(v_1, v_2) \Big]_{v_1 = 2\zeta}^{v_1 = y} \Bigg)$$

$$= \iint_{2\zeta}^{y} dx_1 \cdot dx_2 \left(g(v_1, v_2) \cdot h_+(x_1 - v_1)\, h_-(x_2 - v_2) \Big|_{v_1 = 2\zeta}^{v_1 = y} \Big|_{v_2 = 2\zeta}^{v_2 = y} \right)$$

$$+ \iint_{2\zeta}^{y} dv_1 \cdot dv_2 \cdot g(v_1, v_2) \cdot \left(h_+(x_1 - v_1) \cdot h_-(x_2 - v_2) \Big|_{x_1 = 2\zeta}^{x_1 = y} \Big|_{x_2 = 2\zeta}^{x_2 = y} \right)$$

$$+ \int_{2\zeta}^{y} dx_1 \cdot \int_{2\zeta}^{y} dv_2 \cdot \left(h_+(x_1 - v_1) \cdot h_-(x_2 - v_2) \cdot g(v_1, v_2) \Big|_{x_2 = 2\zeta}^{x_2 = y} \Big|_{v_1 = 2\zeta}^{v_1 = y} \right)$$

$$+ \int_{2\zeta}^{y} dx_2 \cdot \int_{2\zeta}^{y} dv_1 \left(h_+(x_1 - v_1) \cdot h_-(x_2 - v_2) \cdot g(v_1, v_2) \Big|_{x_1 = 2\zeta}^{x_1 = y} \Big|_{v_2 = 2\zeta}^{v_2 = y} \right) \quad \cdots (5.26)$$

となる。ここで

$$\int_{2\zeta}^{y} |h_\pm(x - v)| \cdot dx \ll \log y \quad \cdots (5.27)$$

$$\int_{2\eta}^{y} \left| h_\pm(x-v) \right| \cdot dx \ll \log y \qquad \cdots (5.27')$$

となる事から

$$(5.16) \ll \max_{2\eta \le y \le N} \max_{\substack{2\eta \le v_j \le y \\ j=1,2}} \left| g(v_1, v_2) \right| \cdot \log^2 y$$

$$\ll \max_{2\eta \le v_j \le N} \left| g(v_1, v_2) \right| \cdot \log^2 N \qquad \cdots (5.28)$$

を得る。

(5.17) を評価しよう。(5.22) の途中から

$$\left| F(x_1, x_2) \right| \ll \sum_{\substack{2\eta \le k_j \le y \\ k_1 \equiv k_2 \bmod q \\ |k_j - x_j| < \frac{q}{2} \quad j=1,2}} \sum \min\left(1, \frac{1}{|x_1-k_1|}\right) \times \min\left(1, \frac{1}{|x_2-k_2|}\right) + \frac{\log^2 y}{\phi(q)}$$

であり、(5.5) から

$$(5.17) \ll \iint_{2q}^{N} \frac{dx_1}{x_1} \cdot \frac{dx_2}{x_2} \left(x_1^{\Theta} \log x_1 \cdot \log T + \sum_{|n_1 - x_1| < \frac{1}{T}} T \right) \times$$

$$\times \left(x_2^{\Theta} \cdot \log x_2 \cdot \log T + \sum_{|n_2 - x_2| < \frac{1}{T}} T \right) \times$$

$$\times \left(\frac{\log^2 N}{\phi(q)} + \sum_{\substack{2\eta \le k_j \le N \\ |k_j - x_j| < \frac{q}{2} \\ k_1 \equiv k_2 \bmod q}} \sum \min\left(1, \frac{1}{|x_1-k_1|}\right) \cdot \min\left(1, \frac{1}{|x_2-k_2|}\right) \right)$$

$$\ll \left\{ \int_{2q}^{N} \frac{dx}{x} \left(x^{\Theta} \log x \cdot \log T + \sum_{|n-x| < \frac{1}{T}} T \right) \right\}^2 \cdot \frac{\log^2 N}{\phi(q)}$$

$$+ \sum_{\substack{2\eta \le k_j \le N \\ k_1 \equiv k_2 \bmod q}} \sum \iint_{\substack{2\eta \le x_j \le N \\ |x_j - k_j| < \frac{q}{2}}} \frac{dx_1}{x_1} \cdot \frac{dx_2}{x_2} \left(x_1^{\Theta} \log x_1 \cdot \log T + \sum_{|n_1 - x_1| < \frac{1}{T}} T \right) \cdot \left(x_2^{\Theta} \log x_2 \cdot \log T + \sum_{|n_2 - x_2| < \frac{1}{T}} T \right) \times$$

$$\times \min\left(1, \frac{1}{|x_1-k_1|}\right) \times \min\left(1, \frac{1}{|x_2-k_2|}\right)$$

となる。ここで (4.13) から更に

$$\ll \left(N^{\Theta}\lg N\cdot\lg T + T\times\frac{\lg N}{T}\right)^2\cdot\frac{\lg^2 N}{\phi(q)}$$

$$+\sum_{\substack{2q\le k_j\le N\\ k_1\equiv k_2 \bmod q}}\sum\left(T\cdot\frac{\lg q}{T}\cdot\frac{1}{k_1}+k_1^{\Theta-1}\lg N\cdot\lg T\right)\left(T\cdot\frac{\lg q}{T}\cdot\frac{1}{k_2}+k_2^{\Theta-1}\lg N\cdot\lg T\right)$$

$$\ll \phi(q)^{-1}\cdot\left(N^{\Theta}\cdot\lg N\cdot\lg T+\lg N\right)^2\cdot\lg^2 N \qquad \cdots(5.29)$$

となり従って

$$(5.17) \ll \phi(q)^{-1}\left(N^{\Theta}\lg^2 N\cdot\lg T\right)^2 \qquad \cdots(5.30)$$

を得る。

(5.20) を評価しよう (5.26), (5.29) を求めた際のと同様の評価として (5.27), (5.27') を使うと

$$(5.20) \ll \max_{2q\le y\le N}\ \max_{\substack{2q\le v\le y\\ 2q\le u\le y}}\left|\sum_{\chi\ne\chi_0}\frac{1}{\phi(q)}\cdot\sum_{2q\le k_2\le N}\bar\chi(k_2)\frac{e^{-2\pi i(u-k_2)}-1}{-2\pi i(u-k_2)}\cdot\sum_{2q\le k_1\le v}\chi(k_1)\right|\times$$

$$\times\ y^{\Theta}\lg y\cdot\lg T\ \times\lg y$$

$$\ll \max_{\substack{2q\le v\le N\\ 2q\le u\le N}}\left|\sum_{\chi\ne\chi_0}\frac{1}{\phi(q)}\cdot\sum_{2q\le k_2\le N}\bar\chi(k_2)\frac{e^{-2\pi i(u-k_2)}-1}{-2\pi i(u-k_2)}\cdot\sum_{2q\le k_1\le v}\chi(k_1)\right|\times N^{\Theta}\lg^2 N\cdot\lg T \qquad \cdots(5.31)$$

を得る。

(5.19) については $\int_{2q}^{y}dx_1\,F(x_1,x_2)$ について (5.26) の計算と同様に行い後部分積分を行えば

$$(5.19) \ll \max_{\substack{2q\le v\le N\\ 2q\le u\le N}}\left|\sum_{\chi\ne\chi_0}\frac{1}{\phi(q)}\cdot\sum_{2q\le k_2\le N}\bar\chi(k_2)\cdot\frac{e^{-2\pi i(u-k_2)}-1}{-2\pi i(u-k_2)}\cdot\sum_{2q\le k_1\le v}\chi(k_1)\right|\times\lg N\times$$

$$\times\left(\frac{N^2}{T^{\frac12}}+N^{\frac12}\lg^2 T+\frac{N^2\lg N\cdot\lg T}{T}\right) \qquad \cdots(5.32)$$

を得る。

(5.21) については部分積分と、(5.29) を求めた際のと類似の計算により、

$$(5.21) \ll \frac{1}{\phi(q)} \lg^2 N \times N^{\Theta} \lg N \cdot \lg T \times \left(\frac{N^2}{T^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{1}{2}} \lg^2 T + \frac{N^2 \lg N \cdot \lg T}{T^{\frac{1}{2}}} \right) \quad \cdots (5.33)$$

を得る。

(5.23), (5.28), (5.30), (5.31), (5.32), (5.33) において $T = N^3$ とおき、$\Theta \geq \frac{1}{2}$ である事を考慮すれば (5.11) を得る。

従って

[定理] 仮定 (Λ) のもとに $q \leq X \leq \frac{N}{2}$ の時

$$\sum_{q \leq X} \max_{y \leq N} \max_{\substack{(a,q)=1 \\ \bmod q}} \left| \sum_{\substack{n \leq y \\ n \equiv a \bmod q}} \Lambda(n) - \frac{y}{\phi(q)} \right| \ll X^{\frac{1}{2}} \lg N \cdot (X + N^{\Theta} \lg^2 N) \quad \cdots (5.34)$$

を得る。特に $\Theta \leq \frac{2}{3}$ であれば

$$\sum_{q \leq N^{\frac{2}{3}} (\lg N)^{-2(A+3)}} \max_{y \leq N} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{n \leq y \\ n \equiv a \bmod q}} \Lambda(n) - \frac{y}{\phi(q)} \right| \ll N \cdot (\lg N)^{-A} \quad \cdots (5.35)$$

となる。

§6 註

恐らく、$\zeta(s) \neq 0$ $(\sigma > \Theta)$ $1 > \Theta \geq \frac{1}{2}$ を仮定するのみで仮定 (μ), 仮定 (Λ) の事は得られるのではないかと思われるが今の所は未知である。又、現在肯定的に知られている ζ-函数の評価からだけでは四節五節と類似の計算により肯定的な結果を得られるようには見えない。Dirichlet の L-函数達す

べてに対して $L(s,\chi) \neq 0$ $(\sigma > \Theta)$ (Θは共通) となる事を仮定すれば

$$\sum_{q\le X} \max_{y\le N} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{n\equiv a \bmod q\\ n\le y}} \Lambda(n) - \frac{y}{\phi(q)} \right| \ll \log X\cdot\left(X + X^{\frac{1}{2}} N^{\Theta}\log^2 N\right)$$

が得られるのではないかと考えられる。

なお、仮定(Λ)の根拠は Landau <5> により次の事が知られているからである。仮定なしに、$x \geq 1$ の時

$$\sum_{|\gamma|<T} x^{\rho} = \begin{cases} -\Lambda(n)\cdot 2T + O(x\cdot\log T) & x = n \text{ の時} \\ O(x\cdot\log T) & x \neq n \text{ の時} \end{cases}.$$

ここに $x \neq n$ の時については $O(\ )$ の中の定数は x が $\Lambda(n) \neq 0$ となる自然数を含まない任意に固定した閉区間に入るかどうかによってのみ定まる。仮定(M)はその類似である。

文献

<1> Davenport-Halberstam : Mathematika 13 (1966) pp 91/96
the values of a trigonometrical polinomials at well spaced points

<2> Davenport : Markham (Chicago 1967)
multiplicative number Theory

<3> Gallagher : Mathematika 14 (1967) pp 14/20
the large sieve

<4> Gallagher : Mathematika 15 (1968) pp 1/6

Bombieri's mean value theorem

<5> Landau : Mathematische Annalen 71 (1911) pp 548/564

über die Nullstellen der Zetafunktion

<6> Prachar : Springer (Berlin 1957)

Primzahlverteilung

<7> Titchmarsh : Oxford (at the Clarendon Press 1951)

the Theory of the Riemann Zeta-function

以上.