数理解析研究所講究録
第 84 巻 1970 年 137-166

Erdös-Kac の定理

学習院大　田中　穣

§1. 序

正整数 n の相異なる素因数の数を $\omega(n)$ で表わす.

$\omega(1)=0$, $\omega(2)=1$, $\omega(3)=1$, $\omega(4)=1$, $\omega(5)=1$, $\omega(6)=2$,

$\omega(7)=1$, $\omega(8)=1$, $\omega(9)=1$, $\omega(10)=2$, $\cdots$, $\omega(30)=3$, $\cdots$

$\omega(n)$ の大きさは

$$\liminf_{n\to\infty} \omega(n)=1,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\omega(n)}{\dfrac{\log n}{\log\log n}}=1.$$

平均的には $x\to\infty$ のとき

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\omega(n)\sim\log\log x.$$

また Hardy-Ramanujan は次の定理を証明し (1917), Turán は証明を著しく短縮した (1934).

定理 1. $g(n)$ $(n=1,2,\cdots)$ を $n\to\infty$ のとき $g(n)\to\infty$ である関数とすると

$$3\leq n\leq x,\quad |\omega(n)-\log\log n|>g(n)\sqrt{\log\log n}$$

である n の数は $o(x)$ である。

(Hardy-Wright [2], Chap. 22 参照.)

Erdös-Kac [1] は定理 1 を精密化して次の定理を証明した。

定理 2. $\alpha<\beta$ を与えられた実数とする。整数 n, $3\leq n\leq x$ のうちで

$$\log\log n+\alpha\sqrt{\log\log n}<\omega(n)<\log\log n+\beta\sqrt{\log\log n}$$

である n の数を $A(x)=A(x;\alpha,\beta)$ とすると

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{x}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

Erdös-Kac はこの定理を整数論のふるい法と確率論の中心極限定理とを用いて証明した。中心極限定理の代りに特性関数を用いる方法もあるが，これは本質的な相異ではない。筆者は [3], [4], [5], [6] において，確率論を用いない証明を試み，かつ種々の拡張も試みた。次の定理は [1], 定理 A の特別な場合である。

定理 3. $\alpha_i<\beta_i$ $(i=1,\cdots,k)$ を与えられた実数とする。整数 n, $3\leq n\leq x$ のうちで不等式

$$\log\log n + \alpha_i\sqrt{\log\log n} < \omega(n+i-1)$$
$$< \log\log n + \beta_i\sqrt{\log\log n} \qquad (i=1,\cdots,k)$$

を同時に満たすものの数を $A(x)=A(x;\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_k,\beta_k)$ とすると

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{x}=(2\pi)^{-\frac{k}{2}}\prod_{i=1}^{k}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

さて本稿では次の定理を証明する。 定理3に似ているが加法的整数論に属する結果である。

定理4. kを1より大きい整数とする。$\alpha_i<\beta_i$ $(i=1,\cdots,k)$ を与えられた実数とし，整数 $N\geq\max(3,k)$ に対し，次の条件を満たす正整数の組 $(n_1,\cdots,n_k)$ の数を $A(N)=A(N;\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_k,\beta_k)$ で表わす：

$$N=n_1+\cdots+n_k;$$
$$\log\log N+\alpha_i\sqrt{\log\log N}<\omega(n_i)$$
$$<\log\log N+\beta_i\sqrt{\log\log N} \qquad (i=1,\cdots,k).$$

この $A(N)$ は $N\to\infty$ のとき

$$A(N)\sim\frac{N^{k-1}}{(k-1)!}\cdot(2\pi)^{-\frac{k}{2}}\prod_{i=1}^{k}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

§2. 証明

証明を数個の補題に分けて述べることにする。

補題1．$a_1,\cdots,a_k,b$ が正整数で，d を $a_1,\cdots,a_k$ の最大公約数とする．$d|b$ のとき，不定方程式

$$a_1x_1+\cdots+a_kx_k=b$$

の正整数解の数 $S_k=S_k(a_1,\cdots,a_k,b)$ は

$$\left|S_k-\frac{db^{k-1}}{(k-1)!\,a_1\cdots a_k}\right|<C_kb^{k-2},$$

ここに C_k は k のみによって定まり $a_1,\cdots,a_k,b$ に関係しない正数である．

証明．初等整数論において不定方程式 $a_1x_1+a_2x_2=b$ の整数解の形はよく知られている．このことから $k=2$ の場合が得られるから，k に関する帰納法による．

補題2．a,b を負でない整数とすると

$$\sum_{c=0}^{b}(-1)^c\binom{a}{c}\begin{cases}=1 & (a=0 \text{ のとき})\\ \geqq 0 & (a>0 \text{ で } b \text{ が偶数のとき})\\ \leqq 0 & (a>0 \text{ で } b \text{ が奇数のとき})\end{cases}$$

ただし

$$\binom{a}{0}=1;\quad a<c \text{ のとき } \binom{a}{c}=0$$

とした．

証明．$a=0$ のときは明らかである．$a>0$ のときは

$$\sum_{c=0}^{b}(-1)^c\binom{a}{c}=(-1)^b\binom{a-1}{b}$$

から直ちに補題を得る．

補題3．a_i, b_i $(i=1,\cdots,k)$ を負でない整数とすると

$$\sum_{j=1}^{k}\left\{\sum_{c_j=0}^{2b_j+1}(-1)^{c_j}\binom{a_j}{c_j}\cdot\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{k}\sum_{c_i=0}^{2b_i}(-1)^{c_i}\binom{a_i}{c_i}\right\}$$

$$-(k-1)\prod_{i=1}^{k}\sum_{c_i=0}^{2b_i}(-1)^{c_i}\binom{a_i}{c_i}$$

$$\begin{cases} =1 & (a_i\text{ がすべて }0\text{ のとき}) \\ \leq 0 & (a_i\text{ のなかに正のものがあるとき}) \end{cases}$$

証明．a_i がすべて 0 のときは明らかである．a_i のなかに正のものがあるときは，$a_i>0$ $(i=1,\cdots,\kappa)$，$a_i=0$ $(i=\kappa+1,\cdots,k)$ としても一般性を失わない．このとき上式を書きかえて

$$\sum_{j=1}^{\kappa}\left\{\sum_{c_j=0}^{2b_j+1}(-1)^{c_j}\binom{a_j}{c_j}\cdot\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{\kappa}\sum_{c_i=0}^{2b_i}(-1)^{c_i}\binom{a_i}{c_i}\right\}$$

$$-(\kappa-1)\prod_{i=1}^{\kappa}\sum_{c_i=0}^{2b_i}(-1)^{c_i}\binom{a_i}{c_i}$$

とすることができる．補題2を適用するとこの式が ≤ 0 であることがわかる．（証明終）

そてここで数種の集合と関数とを定義する．N は大きい整数とする．

記号 $\mathfrak{p}(N)$ で

$$(1) \qquad e^{(\log\log N)^2} < p < N^{(\log\log N)^{-2}}$$

である素数 p の集合を表わす． この集合に含まれる素数の範囲が N とともに変動するから $\mathfrak{P}(N)$ と書いたのである．

正整数 n の素因数のうちで $\mathfrak{P}(N)$ に属するものの数（重複度は考慮しない）を $\omega_N(n)$ で表わす：

$$\omega_N(n) = \sum_{\substack{p \mid n \\ p \in \mathfrak{P}(N)}} 1 .$$

また

$$(2) \qquad y(N) = \sum_{p \in \mathfrak{P}(N)} \frac{1}{p}$$

とおく．

t を正整数として $\mathcal{M}(N;t)$ で次の条件を満たす正整数 m の集合を表わす：

m は $\mathfrak{P}(N)$ に属する素数だけの積である；

m は squarefree である；

m の素因数の数は t である．

$\mathcal{M}(N;0)=\{1\}$ としておく．

次に $t_i\ (i=1,\cdots,k)$ が正整数のとき，次の条件を満たす正整数の組 $(n_1,\cdots,n_k)$ の数を $F(N;t_1,\cdots,t_k)$ で表わす：

$N = n_1 + \cdots + n_k$; $\omega_N(n_i) = t_i\ (i=1,\cdots,k)$.

正整数 $m_i\ (i=1,\cdots,k)$ が $m_i \in \mathcal{M}(N;t_i)\ (i=1,\cdots,k)$ のとき

次の条件を満たす正整数の組 $(n_1, \cdots, n_k)$ の数を

$G(N; m_1, \cdots, m_k)$ で表わす： $N = n_1 + \cdots + n_k$;

$$\prod_{p|n_i,\, p\in\mathcal{P}(N)} p = m_i \qquad (i=1, \cdots, k).$$

定義から

(3) $F(N; t_1, \cdots, t_k)$

$$= \sum_{m_1\in\mathcal{M}(N;t_1)} \cdots \sum_{m_k\in\mathcal{M}(N;t_k)} G(N; m_1, \cdots, m_k).$$

今度は $t_i\,(i=1, \cdots, k)$ と T が正整数のとき

$H_0(N; t_1, \cdots, t_k; T)$

$$= \sum_{m_1\in\mathcal{M}(N;t_1)} \cdots \sum_{m_k\in\mathcal{M}(N;t_k)} K_0(N; m_1, \cdots, m_k; T),$$

$K_0(N; m_1, \cdots, m_k; T)$

$$= \sum_{\tau_1=0}^{2T} \cdots \sum_{\tau_k=0}^{2T} (-1)^{\tau_1+\cdots+\tau_k} L(N; m_1, \cdots, m_k; \tau_1, \cdots, \tau_k),$$

$L(N; m_1, \cdots, m_k; \tau_1, \cdots, \tau_k)$

$$= \sum_{\substack{\mu_1\in\mathcal{M}(N;\tau_1)\\ (m_1,\mu_1)=1}} \cdots \sum_{\substack{\mu_k\in\mathcal{M}(N;\tau_k)\\ (m_k,\mu_k)=1}} \sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=N\\ m_i\mu_i|n_i\,(i=1,\cdots,k)}} 1$$

とおく。 $H_0(N; t_1, \cdots, t_k; T)$ において $m_i\,(i=1, \cdots, k)$ が条件 $m_i\in(N; t_i)$ のもとで動き， $K_0(N; m_1, \cdots, m_k; T)$ において

$\tau_i\ (i=1,\cdots,k)$ がそれぞれ 0 から $2T$ まで動き，
$L(N;m_1,\cdots,m_k;\tau_1,\cdots,\tau_k)$ において $\mu_i\ (i=1,\cdots,k)$ が条件 $\mu_i\in M(N;\tau_i)$，$(m_i,\mu_i)=1$ のもとで動き，このような μ_i の各組に対し $n_i\ (i=1,\cdots,k)$ が条件 $n_1+\cdots+n_k=N$，$m_i\mu_i\mid n_i$ $(i=1,\cdots,k)$ のもとで動くのである．

$H_i(N;t_1,\cdots,t_k;T)\ (i=1,\cdots,k)$ を次のように定義する：

$$H_i(N;t_1,\cdots,t_k;T)$$

$$=\sum_{m_1\in M(N;t_1)}\cdots\sum_{m_k\in M(N;t_k)}K_i(N;m_1,\cdots,m_k;T),$$

$$K_i(N;m_1\cdots m_k;T)$$

$$=\sum_{\tau_1=0}^{2T}\cdots\sum_{\tau_i=0}^{2T+1}\cdots\sum_{\tau_k=0}^{2T}(-1)^{\tau_1+\cdots+\tau_k}L(N;m_1,\cdots,m_k;\tau_1,\cdots,\tau_k),$$

ここに $\tau_j\ (j=1,\cdots,k;\ j\neq i)$ は 0 から $2T$ まで動き，τ_i だけが 0 から $2T+1$ まで動く．

$H_0(N;t_1,\cdots,t_k;T)$ の漸近式を求めるための補助として

$$H'(N;t_1,\cdots,t_k;T)$$

$$=\sum_{m_1\in M(N;t_1)}\cdots\sum_{m_k\in M(N;t_k)}K'(N;m_1,\cdots,m_k;T),$$

$$K'(N;m_1,\cdots,m_k;T)$$

$$=\sum_{\tau_1=0}^{2T}\cdots\sum_{\tau_k=0}^{2T}(-1)^{\tau_1+\cdots+\tau_k}L'(N;m_1,\cdots,m_k;\tau_1,\cdots,\tau_k),$$

$L'(N; m_1, \cdots, m_k; \tau_1, \cdots, \tau_k)$

$$= \sum_{\substack{\mu_1 \in \mathcal{M}(N;\tau_1) \\ (m_1,\mu_1)=1}} \cdots \sum_{\substack{\mu_k \in \mathcal{M}(N;\tau_k) \\ (m_k,\mu_k)=1 \\ (m_1\mu_1, \cdots, m_k\mu_k) \mid N}} \frac{(m_1\mu_1, \cdots, m_k\mu_k)}{m_1\mu_1 \cdots m_k\mu_k},$$

ここに $(m_1\mu_1, \cdots, m_k\mu_k)$ は $m_1\mu_1, \cdots, m_k\mu_k$ の最大公約数；

$H^*(N; t_1, \cdots, t_k; T)$

$$= \sum_{m_1 \in \mathcal{M}(N;t_1)} \cdots \sum_{m_k \in \mathcal{M}(N;t_k)} K^*(N; m_1, \cdots, m_k; T),$$

$K^*(N; m_1, \cdots, m_k; T)$

$$= \sum_{\tau_1=0}^{2T} \cdots \sum_{\tau_k=0}^{2T} (-1)^{\tau_1+\cdots+\tau_k} L^*(N; m_1, \cdots, m_k; \tau_1, \cdots, \tau_k),$$

$L^*(N; m_1, \cdots, m_k; \tau_1, \cdots, \tau_k)$

$$= \sum_{\substack{\mu_1 \in \mathcal{M}(N;\tau_1) \\ (m_1,\mu_1)=1}} \cdots \sum_{\substack{\mu_k \in \mathcal{M}(N;\tau_k) \\ (m_k,\mu_k)=1 \\ (m_1\mu_1, \cdots, m_k\mu_k)=1}} \frac{1}{m_1\mu_1 \cdots m_k\mu_k};$$

$H^{**}(N; t_1, \cdots, t_k; T)$

$$= \sum_{m_1 \in \mathcal{M}(N;t_1)} \cdots \sum_{m_k \in \mathcal{M}(N;t_k)} K^{**}(N; m_1, \cdots, m_k; T),$$

$K^{**}(N; m_1, \cdots, m_k; T)$

$$= \sum_{\tau_1=0}^{2T} \cdots \sum_{\tau_k=0}^{2T} (-1)^{\tau_1+\cdots+\tau_k} L^{**}(N; m_1, \cdots, m_k; \tau_1, \cdots, \tau_k),$$

$$L^{**}(N;m_1,\cdots,m_k;\tau_1,\cdots,\tau_k)$$

$$=\sum_{\substack{\mu_1\in\mathcal{M}(N;\tau_1)\\(m_1,\mu_1)=1}}\cdots\sum_{\substack{\mu_k\in\mathcal{M}(N;\tau_k)\\(m_k,\mu_k)=1\\(m_1\mu_1,\cdots,m_k\mu_k)>1\\(m_1\mu_1,\cdots,m_k\mu_k)\mid N}}\frac{(m_1\mu_1,\cdots,m_k\mu_k)}{m_1\mu_1\cdots m_k\mu_k};$$

$$H^{***}(N;t_1,\cdots,t_k;T)$$

$$=\sum_{m_1\in\mathcal{M}(N;t_1)}\cdots\sum_{m_k\in\mathcal{M}(N;t_k)}K^{***}(N;m_1,\cdots,m_k;T),$$

$$K^{***}(N;m_1,\cdots,m_k;T)$$

$$=\sum_{\tau_1=0}^{2T}\cdots\sum_{\tau_k=0}^{2T}(-1)^{\tau_1+\cdots+\tau_k}L^{***}(N;m_1,\cdots,m_k;\tau_1,\cdots,\tau_k),$$

$$L^{***}(N;m_1,\cdots,m_k;\tau_1,\cdots,\tau_k)$$

$$=\sum_{\substack{\mu_1\in\mathcal{M}(N;\tau_1)\\(m_1,\mu_1)=1}}\cdots\sum_{\substack{\mu_k\in\mathcal{M}(N;\tau_k)\\(m_k,\mu_k)=1\\(m_1\mu_1,\cdots,m_k\mu_k)>1}}\frac{1}{m_1\mu_1\cdots m_k\mu_k}$$

とおく．定義から直ちに

(4) $$H'=(N;t_1,\cdots,t_k;T)$$

$$=H^{*}(N;t_1,\cdots,t_k;T)+H^{**}(N;t_1,\cdots,t_k;T),$$

(5) $$H^{*}(N;t_1,\cdots,t_k;T)+H^{***}(N;t_1,\cdots,t_k;T)$$

$$=\prod_{i=1}^{k}\sum_{m_i\in\mathcal{M}(N;t_i)}\frac{1}{m_i}\sum_{\tau_i=0}^{2T}(-1)^{\tau_i}\sum_{\substack{\mu_i\in\mathcal{M}(N;\tau_i)\\(m_i,\mu_i)=1}}\frac{1}{\mu_i}.$$

補題4. $y(N)=\log\log N+O(\log\log\log N)$.

証明. 集合 $\mathcal{P}(N)$ を定義したときの不等式 (1) と $y(N)$ の定義 (2) とから

$$y(N)=\sum_{p<\exp\{(\log N)(\log\log N)^{-2}\}}\frac{1}{p}-\sum_{p\leq\exp\{(\log\log N)^2\}}\frac{1}{p}$$

$$=\log\{(\log N)(\log\log N)^{-2}\}-\log\{(\log\log N)^2\}+O(1)$$

$$=\log\log N+O(\log\log\log N).$$ (証明終)

定理の証明のこれからの筋道をかいつまんで述べておこう. まず H' の漸近式を求める. そのとき最大公約数 $(m_1\mu_1,\cdots,m_k\mu_k)$ が1より大きい項の処置が面倒で, そのため H^*, H^{**}, H^{***} を導入した(補題6~9). H' から H_0 へ移行する(補題10, 11). H_i の漸近式も同様にして得ることができる(補題12). H_0, H_i から F へ移行する(補題5, 13, 14). F の和をとると定理の証明になる.

補題5. $t_i\ (i=1,\cdots,k)$, T が正整数のとき

$$\sum_{i=1}^{k}H_i(N;t_1,\cdots,t_k;T)-(k-1)H_0(N;t_1,\cdots,t_k;T)$$

$$\leq F(N;t_1,\cdots,t_k)\leq H_0(N;t_1,\cdots,t_k;T).$$

証明. $L(N;m_1,\cdots,m_k;t_1,\cdots,t_k)$ の定義における和の順序を変えて

$$L(N;m_1,\cdots,m_k;\tau_1,\cdots,\tau_k)$$

$$=\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=N\\ m_i|n_i\,(i=1,\cdots,k)}}\ \sum_{\substack{\mu_1\in M(N;\tau_1)\\ (m_1,\mu_1)=1\\ \mu_1|n_1}}\cdots\sum_{\substack{\mu_k\in M(N;\tau_k)\\ (m_k,\mu_k)=1\\ \mu_k|n_k}}1$$

$$=\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=N\\ m_i|n_i\,(i=1,\cdots,k)}}\ \prod_{i=1}^{k}\ \sum_{\substack{\mu_i\in M(N;\tau_i)\\ (m_i,\mu_i)=1\\ \mu_i|n_i}}1$$

$$=\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=N\\ m_i|n_i\,(i=1,\cdots,k)}}\ \prod_{i=1}^{k}\binom{\omega_N(n_i)-t_i}{\tau_i}.$$

そこで
$$K_0=\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=N\\ m_i|n_i\,(i=1,\cdots,k)}}\delta(n_1,\cdots,n_k),$$

$$\sum_{j=1}^{k}K_j(N;m_1,\cdots,m_k;T)-(k-1)K_0(N;m_1,\cdots,m_k;T)$$

$$=\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=N\\ m_i|n_i\,(i=1,\cdots,k)}}\delta'(n_1,\cdots,n_k),$$

$$\delta(n_1,\cdots,n_k)=\prod_{i=1}^{k}\sum_{\tau_i=0}^{2T}(-1)^{\tau_i}\binom{\omega_N(n_i)-t_i}{\tau_i},$$

$$\delta'(n_1,\cdots,n_k)$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\left\{\sum_{\tau_j=0}^{2T+1}(-1)^{\tau_j}\binom{\omega_N(n_j)-t_j}{\tau_j}\cdot\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k}\sum_{\tau_i=0}^{2T}(-1)^{\tau_i}\binom{\omega_N(n_i)-t_i}{\tau_i}\right\}$$

$$-(k-1)\prod_{i=1}^{k}\sum_{\tau_i=0}^{2T}(-1)^{\tau_i}\binom{\omega_N(n_i)-t_i}{\tau_i}$$

とおくと補題 2, 3 によりつねに

$$\delta(n_1, \cdots, n_k) \geq 0, \quad \delta'(n_1, \cdots, n_k) \leq 0$$

で, $\omega_N(\omega_i) - t_i = 0 \ (i=1, \cdots, k)$ のとき, すなわち

$$\prod_{p|n_i, p \in P(N)} p = m_i \quad (i=1, \cdots, k)$$

のとき, そしてそのときだけ

$$\delta(n_1, \cdots, n_k) = \delta'(n_1, \cdots, n_k) = 1$$

である. 従って $G(N; m_1, \cdots, m_k)$ の定義を思い起こすと

$$\sum_{j=1}^{k} K_j(N; m_1, \cdots, m_k; T) - (k-1) K_0(N; m_1, \cdots, m_k; T)$$

$$\leq G(N; m_1, \cdots, m_k) \leq K_0(N; m_1, \cdots, m_k; T)$$

をうる. $\sum$ の j を i と書き換えて, $m_i \ (i=1, \cdots, k)$ を動かして, 不等式の各辺の和をボめると補題の不等式となる.

補題 6. $T = [4y(N)] + 1$ とおくと, $N \to \infty$ のとき

$$H^*(N; t_1, \cdots, t_k; T) + H^{***}(N; t_1, \cdots, t_k; T)$$

$$= \frac{\{y(N)\}^{t_1 + \cdots + t_k} e^{-ky(N)}}{t_1! \cdots t_k!} \{1 + o(1)\}$$

が $t_i < 2y(N)$ である $t_i \ (i=1, \cdots, k)$ に関して一様に成り立つ.

証明. (5) を見ると各 $i \ (i=1, \cdots, k)$ に対し

$$(6)\qquad \sum_{m_i\in\mathcal{M}(N;t_i)}\frac{1}{m_i}\sum_{\tau_i=0}^{2T}(-1)^{\tau_i}\sum_{\substack{\mu_i\in\mathcal{M}(N;\tau_i)\\(m_i,\mu_i)=1}}\frac{1}{\mu_i}$$
$$=\frac{\{y(N)\}^{t_i}e^{-y(N)}}{t_i!}\{1+o(1)\}$$

が $t_i<2y(N)$ で一様に成り立つことを示せばよいことがわかる．簡単のために添字 i を省いて

$$\sum_{m\in\mathcal{M}(N;t)}\frac{1}{m}\sum_{\tau=0}^{2T}(-1)^{\tau}\sum_{\substack{\mu\in\mathcal{M}(N;\tau)\\(m,\mu)=1}}\frac{1}{\mu}$$

を条件 $t<2y(N)$ のもとで考察する．

さて集合 $\mathcal{M}(N;\tau)$ の定義から直ちに

$$\sum_{\tau=0}^{\infty}(-1)^{\tau}\sum_{\substack{\mu\in\mathcal{M}(N;\tau)\\(m,\mu)=1}}\frac{1}{\mu}=\prod_{\substack{p\in\mathcal{P}(N)\\p\nmid m}}\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

従って

$$(7)\qquad \left|\sum_{\tau=0}^{2T}(-1)^{\tau}\sum_{\substack{\mu\in\mathcal{M}(N;\tau)\\(m,\mu)=1}}\frac{1}{\mu}-\prod_{\substack{p\in\mathcal{P}(N)\\p\nmid m}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right|$$
$$\leq\sum_{\tau=2T+1}^{\infty}\sum_{\mu\in\mathcal{M}(N;\tau)}\frac{1}{\mu}.$$

また $y(N)$ と $\mathcal{M}(N;\tau)$ の定義から

$$\sum_{\mu\in\mathcal{M}(N;\tau)}\frac{1}{\mu}\leq\frac{\{y(N)\}^{\tau}}{\tau!},$$

従って

$$\sum_{\tau=2T+1}^{\infty}\sum_{\mu\in\mathcal{M}(N;\tau)}\frac{1}{\mu}\leq\sum_{\tau=2T+1}^{\infty}\frac{\{y(N)\}^{\tau}}{\tau!}$$

$$\leq\frac{\{y(N)\}^{2T+1}}{(2T+1)!}\sum_{\tau=0}^{\infty}\frac{\{y(N)\}^{\tau}}{\tau!}=\frac{\{y(N)\}^{2T+1}e^{y(N)}}{(2T+1)!}.$$

$(2T+1)!>(2T+1)^{2T+1}e^{-(2T+1)}$，かつ　$T=[4y(N)]+1$　とおいたことから，$2T+1>8y(N)$．　したがって

$$\frac{\{y(N)\}^{2T+1}}{(2T+1)!}<\left(\frac{ey(N)}{2T+1}\right)^{2T+1}<\left(\frac{e}{8}\right)^{8y(N)}<e^{-8y(N)}.$$

かくて

$$(8)\qquad \sum_{\tau=2T+1}^{\infty}\sum_{\mu\in\mathcal{M}(N;\tau)}\frac{1}{\mu}=o\left(e^{-y(N)}\right).$$

さて $\mathcal{P}(N)$ の定義により

$$\sum_{p\in\mathcal{P}(N)}\frac{1}{p^2}=o(1)$$

であるから，

$$\prod_{p\in\mathcal{P}(N)}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\exp\left\{\sum_{p\in\mathcal{P}(N)}\log\left(1-\frac{1}{p}\right)\right\}$$

$$=\exp\left\{-\sum_{p\in\mathcal{P}(N)}\frac{1}{p}+O\left(\sum_{p\in\mathcal{P}(N)}\frac{1}{p^2}\right)\right\}$$

$$=\exp\{-y(N)+o(1)\}=e^{-y(N)}\{1+o(1)\}.$$

また $m\in\mathcal{M}(N;t)$，$t<2y(N)$ である　m　の素因数の数は $2y(N)$ より小さく，各素因数は $\mathcal{P}(N)$ に属し，したがって $\exp\{(\log\log N)^2\}$　より大きい．　このことと補題４から

$$1<\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}<\prod_{p|m}\left(1+\frac{2}{p}\right)<\left\{1+2e^{-(\log\log N)^2}\right\}^{2y(N)}$$

$$=1+O\left\{y(N)e^{-(\log\log N)^2}\right\}=1+o(1).$$

かくて

$$(9)\qquad \prod_{\substack{p\in\mathfrak{P}(N)\\ p\nmid m}}\left(1-\frac{1}{p}\right)=e^{-y(N)}\{1+o(1)\}$$

が $m\in\mathcal{M}(N;t)$, $t<2y(N)$ である m に関して一様に成り立つ. さて (7), (8), (9) から

$$(10)\qquad \sum_{m\in\mathcal{M}(N;t)}\frac{1}{m}\sum_{\tau=0}^{2T}(-1)^{\tau}\sum_{\substack{\mu\in\mathcal{M}(N;\tau)\\(m,\mu)=1}}\frac{1}{\mu}$$

$$=\{1+o(1)\}e^{-y(N)}\sum_{m\in\mathcal{M}(N;t)}\frac{1}{m}$$

が $t<2y(N)$ である t に関して一様に成り立つ.

多項定理により

$$(11)\qquad \sum_{m\in\mathcal{M}(N;t)}\frac{1}{m}\leq\frac{\{y(N)\}^t}{t!}\leq\sum_{m\in\mathcal{M}(N;t)}\frac{1}{m}+\sum_{w}\frac{1}{w},$$

ここに w は次の条件に適する正整数の上を動く:

w は $\mathfrak{P}(N)$ に属する素数だけから合成されている;

w は squarefree でない;

w は重複度数だけ数えて t 個の素因数をもつ.

このような w の各を $w=d^2q$ とおき, $d>1$ で q は square-free とすることができるから

$$\sum_w \frac{1}{w} \le \sum_d \frac{1}{d^2} \sum_q \frac{1}{q}$$

が成り立つ．ここに d, q はそれぞれ次の条件を満たす正整数の上を動く：

d は $\mathfrak{P}(N)$ に属する素数だけから合成され，$d>1$；

q は $\mathfrak{P}(N)$ に属する素数だけから合成され，squarefree．

$\mathfrak{P}(N)$ の定義のときの (2) により $d > e^{(\log\log N)^2}$，したがって

$$\sum_d \frac{1}{d^2} = O\left(e^{-(\log\log N)^2}\right).$$

また q が squarefree であることと $y(N)$ の定義により

$$\sum_q \frac{1}{q} \le 1 + y(N) + \frac{\{y(N)\}^2}{2!} + \cdots = e^{y(N)}.$$

かくして

$$\sum_w \frac{1}{w} = O\left(e^{y(N)-(\log\log N)^2}\right)$$

を得る．ところで $t < 2y(N)$ と仮定しているから

$$\frac{\{y(N)\}^t}{t!} > \left(\frac{t}{2}\right)^t \cdot \frac{1}{t^t} = 2^{-t} > e^{-2y(N)}.$$

ゆえに

$$\sum_w \frac{1}{w} = O\left(\frac{\{y(N)\}^t}{t!} e^{3y(N)-(\log\log N)^2}\right).$$

補題 4 により $y(N) = O(\log\log N)$ であるから

$$\sum_{w} \frac{1}{w} = o\left(\frac{\{y(N)\}^t}{t!}\right).$$

これと (11) とから

$$\sum_{m \in M(N;t)} \frac{1}{m} = \frac{\{y(N)\}^t}{t!}\{1+o(1)\}$$

を得る．しかもこの式が $t<2y(N)$ である t に関して一様に成り立つこともわかった．

これと (10) とから

$$\sum_{m \in M(N;t)} \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{2T} (-1)^\tau \sum_{\mu \in M(N;\tau)} \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{\{y(N)\}^t e^{-y(N)}}{t!}\{1+o(1)\}$$

が $t<2y(N)$ である t に関して一様に成り立つことになり，これで補題の証明は済んだ．

補題 7. $N \to \infty$ のとき

$$H^{**}(N;t_1,\cdots,t_k;T) = o\left(\frac{\{y(N)\}^{t_1+\cdots+t_k} e^{-ky(N)}}{t_1!\cdots t_k!}\right)$$

が $t_i<2y(N)$ である $t_i\ (i=1,\cdots,k)$ と任意の正整数 T に関して一様に成り立つ．

証明．$L^{**}(N;m_1,\cdots,m_k;\tau_1,\cdots,\tau_k)$ の定義における和の各項において，$d=(m_1\mu_1,\cdots,m_k\mu_k)$, $m_i\mu_i=m_i'\mu_i'd$, $m_i'|m_i$, $\mu_i'|\mu_i$

$(i=1,\cdots,k)$ とおくと $m_i'\in\mathcal{M}(N;t_i')$, $t_i'\leq t_i$, $\tau_i'\in\mathcal{M}(N;\tau_i')$, $\tau_i'\leq\tau_i$ $(i=1,\cdots,k)$, $d|N$ であり，異なる項からは異なる m_i',μ_i' $(i=1,\cdots,k)$, d の組を得る．かつ $k>1$ であるから

$$\frac{(m_1\mu_1,\cdots,m_k\mu_k)}{m_1\mu_1\cdots m_k\mu_k}=\frac{1}{m_1'\mu_1'\cdots m_k'\mu_k'd^{k-1}}\leq\frac{1}{m_1'\mu_1'\cdots m_k'\mu_k'd}.$$

ゆえに $|H^{**}(N;t_1,\cdots,t_k;T)|$

$$\leq\sum_{m_1\in\mathcal{M}(N;t_1)}\cdots\sum_{m_k\in\mathcal{M}(N;t_k)}$$

$$\sum_{\tau_1=0}^{2T}\cdots\sum_{\tau_k=0}^{2T}\sum_{\substack{\mu_1\in\mathcal{M}(N;\tau_1)\\(m_1,\mu_1)=1}}\cdots\sum_{\substack{\mu_k\in\mathcal{M}(N;\tau_k)\\(m_k,\mu_k)=1\\(m_1\mu_1,\cdots,m_k\mu_k)>1\\(m_1\mu_1,\cdots,m_k\mu_k)|N}}\frac{(m_1\mu_1,\cdots,m_k\mu_k)}{m_1\mu_1\cdots m_k\mu_k}$$

$$\leq\sum_d\frac{1}{d}\cdot\prod_{i=1}^{k}\sum_{t_i'=0}^{t_i}\sum_{m_i'\in\mathcal{M}(N;t_i')}\frac{1}{m_i'}\cdot\sum_{\tau_i'=0}^{2T}\sum_{\mu_i'\in\mathcal{M}(N;\tau_i')}\frac{1}{\mu_i'},$$

したがってもちろん

(12) $$|H^{**}(N;t_1,\cdots,t_k;T)|\leq\sum_d\frac{1}{d}\cdot\left(\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{m\in\mathcal{M}(N;t)}\frac{1}{m}\right)^{2k},$$

ここに d は次の条件を満たす正整数の上を動く：

d は $\mathcal{P}(N)$ に属する素数だけから合成されている；

$d\,|\,N$, $d>1$, squarefree.

ゆえに $$\sum_d\frac{1}{d}\leq\sum_{p|N,\,p\in\mathcal{P}(N)}\frac{1}{p}\cdot\prod_{p|N,\,p\in\mathcal{P}(N)}\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

さて $\mathfrak{P}(N)$ の定義から $p \in \mathfrak{P}(N)$ ならば $p > e^{(\log\log N)^2}$.

かつ $2^{\omega(N)} \leq N$ から $\omega(N) \leq \log N/\log 2 < 2\log N$. したがって

$$\sum_{p|N,\, p\in\mathfrak{P}(N)} \frac{1}{p} = O\left(e^{-(\log\log N)^2} \log N\right),$$

$$\prod_{p|N,\, p\in\mathfrak{P}(N)} \left(1+\frac{1}{p}\right) \leq \left(1+e^{-(\log\log N)^2}\right)^{2\log N} = O(1).$$

ゆえに

$$\sum_{d} \frac{1}{d} = O\left(e^{-(\log\log N)^2} \log N\right). \tag{13}$$

また不等式 (11) の左半分から

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{m\in\mathfrak{M}(N;t)} \frac{1}{m} \leq \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\{y(N)\}^t}{t!} = e^{y(N)}.$$

これと (12), (13) から

$$H^{**}(N;t_1,\cdots,t_k;T) = O\left(e^{2ky(N)-(\log\log N)^2} \log N\right).$$

ところで $t_i < 2y(N)$ $(i=1,\cdots,k)$ と仮定しているから

$$\frac{\{y(N)\}^{t_1+\cdots+t_k}}{t_1!\cdots t_k!} > \frac{\{y(N)\}^{t_1+\cdots+t_k}}{\{2y(N)\}^{t_1+\cdots+t_k}} \tag{14}$$

$$= 2^{-(t_1+\cdots+t_k)} > e^{-2ky(N)}.$$

ゆえに

$$\frac{H^{**}(N;t_1,\cdots,t_k;T)}{\dfrac{\{y(N)\}^{t_1+\cdots+t_k}\, e^{-ky(N)}}{t_1!\cdots t_k!}} = O\left(e^{5ky(N)-(\log\log N)^2} \log N\right).$$

補題4により $y(N)=O(\log\log N)$ であるから上式の右辺は $o(1)$ である．

補題8．$N\to\infty$ のとき

$$H^{***}(N;t_1,\cdots,t_k;T)=o\left(\frac{\{y(N)\}^{t_1+\cdots+t_k}e^{-ky(N)}}{t_1!\cdots t_k!}\right)$$

が $t_i<2y(N)$ である $t_i\ (i=1,\cdots,k)$ と任意の T に関して一様に成り立つ．

証明．前補題の証明で (12) を導いたと同様にして

$$\left|H^{***}(N;t_1,\cdots,t_k;T)\right|\leqq\sum_d\frac{1}{d^2}\left(\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{m\in\mathcal{M}(N;t)}\frac{1}{m}\right)^{2k}$$

を得る．しかし今度は d に対する制限から $d|N$ を除く．

$$\sum_d\frac{1}{d^2}<\sum_{d>\exp\{(\log\log N)^2\}}\frac{1}{d^2}=O\left(e^{-(\log\log N)^2}\right).$$

したがってまた前補題の証明を繰返すだけでよい．

補題9．$T=[4y(N)]+1$ とおくと，$N\to\infty$ のとき

$$H'(N;t_1,\cdots,t_k;T)=\frac{\{y(N)\}^{t_1+\cdots+t_k}e^{-ky(N)}}{t_1!\cdots t_k!}\{1+o(1)\}$$

が $t_i<2y(N)$ である $t_i\ (i=1,\cdots,k)$ に関して一様に成り立つ．

証明．(4), (5), 補題6, 7, 8 からこの補題を得る．

補題10．$T=[4y(N)]+1$ とおくと，$N\to\infty$ のとき

$$H_0(N;t_1,\cdots,t_k;T)-\frac{N^{k-1}}{(k-1)!}H'(N;t_1,\cdots,t_k;T)$$

$$=o\left(\frac{N^{k-1}\{y(N)\}^{t_1+\cdots+t_k}e^{-ky(N)}}{t_1!\cdots t_k!}\right)$$

が $t_i<2y(N)$ である $t_i\ (i=1,\cdots,k)$ に関して一様に成り立つ.

証明. 補題1により

$$H_0(N;t_1,\cdots,t_k;T)-\frac{N^{k-1}}{(k-1)!}H'(N;t_1,\cdots,t_k;T)$$

$$=O\left\{N^{k-2}\sum_{m_1\in\mathcal{M}(N;t_1)}\cdots\sum_{m_k\in\mathcal{M}(N;t_k)}\right.$$

$$\left.\sum_{\tau_1=0}^{2T}\cdots\sum_{\tau_k=0}^{2T}\ \sum_{\mu_1\in\mathcal{M}(N;\tau_1)}\cdots\sum_{\mu_k\in\mathcal{M}(N;\tau_k)}1\right\}$$

$$=O\left\{N^{k-2}\prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{m_i\in\mathcal{M}(N;t_i)}\ \sum_{\tau_i=0}^{2T}\ \sum_{\mu_i\in\mathcal{M}(N;\tau_i)}1\right)\right\}.$$

$t_i<2y(N)$ のとき $t_i<2T$ であるから

$$H_0(N;t_1,\cdots,t_k;T)-\frac{N^{k-1}}{(k-1)!}H'(N;t_1,\cdots,t_k;T) \tag{15}$$

$$=O\left\{N^{k-2}\left(\sum_{t=0}^{2T}\ \sum_{m\in\mathcal{M}(N;t)}1\right)^{2k}\right\}$$

とすることができる.

さて $\mathfrak{P}(N)$ の元の数を $|\mathfrak{P}(N)|$ で表わすと, $\mathcal{M}(N;t)$ の定義から直ちに

$$\sum_{m\in\mathcal{M}(N;t)} 1 = \binom{|\mathfrak{p}(N)|}{t} \leq \frac{|\mathfrak{p}(N)|^t}{t!},$$

したがって

$$\sum_{t=0}^{2T}\sum_{m\in\mathcal{M}(N;t)} 1 \leq \sum_{t=0}^{2T}\frac{|\mathfrak{p}(N)|^t}{t!} \leq |\mathfrak{p}(N)|^{2T}\sum_{t=0}^{2T}\frac{1}{t!} < e|\mathfrak{p}(N)|^{2T}.$$

仮定により $T \leq 4y(N)+1$, また $\mathfrak{p}(N)$ の定義から $|\mathfrak{p}(N)| < N^{(\log\log N)^{-2}}$ であるから

$$\sum_{t=0}^{2T}\sum_{m\in\mathcal{M}(N;t)} 1 = O\left(N^{2(\log\log N)^{-2}\{4y(N)+1\}}\right).$$

ゆえに (15) から

$$H_0(N;t_1,\cdots,t_k;T) - \frac{N^{k-1}}{(k-1)!}H'(N;t_1,\cdots,t_k;T)$$
$$= O\left(N^{k-2+4k(\log\log N)^{-2}\{4y(N)+1\}}\right),$$

したがって (14) から

$$H_0(N;t_1,\cdots,t_k;T) - \frac{N^{k-1}}{(k-1)!}H'(N;t_1,\cdots,t_k;T)$$
$$= \frac{N^{k-1}\{y(N)\}^{t_1+\cdots+t_k}e^{-ky(N)}}{t_1!\cdots t_k!}\cdot$$
$$O\left(e^{3ky(N)}N^{-1+4k(\log\log N)^{-2}\{4y(N)+1\}}\right).$$

補題4によって $y(N)=O(\log\log N)$ であるから上式の右辺の $O(\ )$ は $o(1)$ である．しかも $t_i<2y(N)$ である $t_i\ (i=1,\cdots,k)$ に関して一様に $o(1)$ であることが証明されている．

補題 11. $T=[4y(N)]+1$ とおくと，$N\to\infty$ のとき

$$H_0(N;t_1,\cdots,t_k;T)=\frac{N^{k-1}\{y(N)\}^{t_1+\cdots+t_k}e^{-ky(N)}}{(k-1)!\,t_1!\cdots t_k!}\{1+o(1)\}$$

が $t_i<2y(N)$ である $t_i\ (i=1,\cdots,k)$ に関して一様に成り立つ。

証明．補題 9, 10 からこの補題を得る．

補題 12. $T=[4y(N)]+1$ とおくと，$N\to\infty$ のとき

$$H_i(N;t_1,\cdots,t_k;T)=\frac{N^{k-1}\{y(N)\}^{t_1+\cdots+t_k}e^{-ky(N)}}{(k-1)!\,t_1!\cdots t_k!}\{1+o(1)\}\qquad(i=1,\cdots,k)$$

が $t_i<2y(N)$ である $t_i\ (i=1,\cdots,k)$ に関して一様に成り立つ．

証明．補題 6〜10 を経由して補題 11 を得たと同じ道筋を繰返せばよい．

補題 13. $N\to\infty$ のとき

$$F(N;t_1,\cdots,t_k)=\frac{N^{k-1}\{y(N)\}^{t_1+\cdots+t_k}e^{-ky(N)}}{(k-1)!\,t_1!\cdots t_k!}\{1+o(1)\}$$

が $t_i<2y(N)$ である $t_i\ (i=1,\cdots,k)$ に関して一様に成り立つ．

証明．補題 5, 11, 12 からこの補題を得る．

補題 14. $\alpha_i<\beta_i\ (i=1,\cdots,k)$ が与えられているとする．

$t_i=y(N)+u_i\sqrt{y(N)}$ とおくと，$N\to\infty$ のとき

$$F(N;t_1,\cdots,t_k)$$

$$=\frac{N^{k-1}}{(k-1)!}\cdot(2\pi)^{-\frac{k}{2}}\{y(N)\}^{-\frac{k}{2}}e^{-\frac{1}{2}(u_1^2+\cdots+u_k^2)}\{1+o(1)\}$$

が $\alpha_i<u_i<\beta_i$ である $t_i\ (i=1,\cdots,k)$ に関して一様に成り立つ.

証明. Stirling の公式により

$$t_i! = \sqrt{2\pi}\, t_i^{t_i+\frac{1}{2}} e^{-t_i}\left\{1+O\left(\frac{1}{t_i}\right)\right\}.$$

ここで $t_i=y(N)+u_i\sqrt{y(N)}$ とおき, $N\to\infty$ ならしめると

$$t_i! = \sqrt{2\pi}\{y(N)\}^{y(N)+u_i\sqrt{y(N)}+\frac{1}{2}} e^{-y(N)+\frac{u_i^2}{2}}\left\{1+O\left(\frac{1}{\sqrt{y(N)}}\right)\right\},$$

したがって

$$\frac{\{y(N)\}^{t_i} e^{-y(N)}}{t_i!} = \frac{e^{-\frac{u_i^2}{2}}}{\sqrt{2\pi y(N)}}\left\{1+O\left(\frac{1}{\sqrt{y(N)}}\right)\right\}$$

が $\alpha_i<u_i<\beta_i$ であるような t_i に関して一様に成り立つことがわかる. $i=1,\cdots,k$ として k 個の等式をかけ合わせて

$$\frac{\{y(N)\}^{t_1+\cdots+t_k} e^{-ky(N)}}{t_1!\cdots t_k!}$$
$$=(2\pi)^{-\frac{k}{2}}\{y(N)\}^{-\frac{k}{2}} e^{-\frac{1}{2}(u_1^2+\cdots+u_k^2)}\{1+o(1)\}.$$

さて $t_i=y(N)+u_i\sqrt{y(N)}$, $\alpha_i<u_i<\beta_i$ であるような t_i は, N が大きいとき $t_i<2y(N)$ となるから, 上式と補題 13 によって補題の成り立つことがわかる.

補題 15. $\alpha_i<\beta_i\ (i=1,\cdots,k)$ が与えられているとする. 次の条件を満たす正整数の組 $(n_1,\cdots,n_k)$ の数を $A^{**}(N)=A^{**}(N;\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_k,\beta_k)$ で表わす:

$$N=n_1+\cdots+n_k;$$

$$y(N)+\alpha_i\sqrt{y(N)}<\omega_N(n_i)<y(N)+\beta_i\sqrt{y(N)} \quad (i=1,\cdots,k).$$

この $A^{**}(N)$ は $N\to\infty$ のとき

$$A^{**}(N)\sim\frac{N^{k-1}}{(k-1)!}\cdot(2\pi)^{-\frac{k}{2}}\prod_{i=1}^{k}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

証明.
$$A^{**}(N)=\sum_{t_1,\cdots,t_k}F(N;t_1,\cdots,t_k)$$

とおくことができる. ここに各 $t_i\ (i=1,\cdots,k)$ の動く範囲をそれぞれ $y(N)+\alpha_i\sqrt{y(N)}<t_i<y(N)+\beta_i\sqrt{y(N)}$ とすればよい. このような t_i を大きさの順に $t_{ij}\ (j=1,\cdots,s_i)$ として, $t_{ij}=y(N)+u_{ij}\sqrt{y(N)}$ とおくと, $u_{i,j+1}-u_{ij}=1/\sqrt{y(N)}$ であるから補題14により

$$A^{**}(N)=\{1+o(1)\}\frac{N^{k-1}}{(k-1)!}(2\pi)^{-\frac{k}{2}}\prod_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s_i}e^{-\frac{u_{ij}^2}{2}}(u_{i,j+1}-u_{ij})$$

と書くことができる. ところで

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{s_i}e^{-\frac{u_{ij}^2}{2}}(u_{i,j+1}-u_{ij})=\int_{\alpha_i}^{\beta_i}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

であるから補題を得る.

定理4の証明の完結. 補題15における $A^{**}(N)$ を定理4における $A(N)$ で置き換えることができれば定理4が証明されたことになるが, $A^{**}(N)$ を $A(N)$ で置き換えることは, $A^{**}(N)$ を定義したときの不等式で, $\omega_N(n_i)$, $y(N)$ をそれぞ

れ $\omega(n_i)$, $\log\log N$ で置き換えることである．まず $\omega_N(n_i)$ を $\omega(n_i)$ で置き換えるための影響を評価してみよう．そのために $A(N)$, $A^{**}(N)$ の中間に位置する $A^*(N)$ を導入する．次の条件を満たす正整数の組 $(n_1,\cdots,n_k)$ の数を $A^*(N)=A^*(N;\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_k,\beta_k)$ で表わす：

$$N=n_1+\cdots+n_k;$$

$$y(N)+\alpha_i\sqrt{y(N)}<\omega(n_i)<y(N)+\beta_i\sqrt{y(N)} \qquad (i=1,\cdots,k).$$

さて

$$0\leqq\sum_{n\leqq N}\{\omega(n)-\omega_N(n)\}=\sum_{n\leqq N}\sum_{p|n,\,p\nmid P(N)}1$$

$$=\sum_{p\leqq N,\,p\nmid P(N)}\left[\frac{N}{p}\right]\leqq N\sum_{p\leqq N,\,p\nmid P(N)}\frac{1}{p}=N\left\{\sum_{p\leqq N}\frac{1}{p}-y(N)\right\},$$

したがって補題4により

$$\sum_{n\leqq N}\{\omega(n)-\omega_N(n)\}=O(N\log\log\log N)=o(N\sqrt{y(N)}).$$

そこで任意に与えられた正数 ε に対し，$n\leqq N$, $\omega(n)-\omega_N(n)>\varepsilon\sqrt{y(N)}$ である n の集合を $\mathfrak{D}(\varepsilon,N)$ で表わすと，その元の数は $N>N_1(\varepsilon)$ のとき εN より小さくなる．

さて正数 ε に対し，次の条件を満たす正整数の組 $(n_1,\cdots,n_k)$ の数を $B(\varepsilon,N)$ で表わす：$n_1+\cdots+n_k=N$; $\omega(n_i)-\omega_N(n_i)>\varepsilon\sqrt{y(N)}$ $(i=1,\cdots,k)$ の少なくとも1つが成り立つ．

$B(\varepsilon,N)$ をこのように定義すると

$$A^{**}(N;\alpha_1,\beta_1-\varepsilon,\cdots,\alpha_k,\beta_k-\varepsilon)-B(\varepsilon,N)$$

$$\leqq A^*(N;\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_k,\beta_k)$$
$$\leqq A^{**}(N;\alpha_1-\varepsilon,\beta_1,\cdots,\alpha_k-\varepsilon,\beta_k)+B(\varepsilon,N).$$

ところで $\mathfrak{B}(\varepsilon,N)$ に関して得た上の結果から，対称性も考慮して，$N>N_1$ のとき

$$B(\varepsilon,N)\leqq k\sum_{n_1\in\mathfrak{B}(\varepsilon,N)}\ \sum_{n_2+\cdots+n_k=N-n_1}1<k\varepsilon N^{k-1}.$$

ゆえに

$$A^{**}(N;\alpha_1,\beta_1-\varepsilon,\cdots,\alpha_k,\beta_k-\varepsilon)-k\varepsilon N^{k-1}$$
$$<A^*(N;\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_k,\beta_k)$$
$$<A^{**}(N;\alpha_1-\varepsilon,\beta_1,\cdots,\alpha_k-\varepsilon,\beta_k)+k\varepsilon N^{k-1}.$$

この不等式の各辺を N^{k-1} で割って補題15を適用すると

$$\frac{1}{(k-1)!}(2\pi)^{-\frac{k}{2}}\prod_{i=1}^{k}\int_{\alpha_i}^{\beta_i-\varepsilon}e^{-\frac{u^2}{2}}du-k\varepsilon$$

$$\leqq\liminf_{N\to\infty}\frac{A^*(N;\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_k,\beta_k)}{N^{k-1}}\leqq\limsup_{N\to\infty}\frac{A^*(N;\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_k,\beta_k)}{N^{k-1}}$$

$$\leqq\frac{1}{(k-1)!}(2\pi)^{-\frac{k}{2}}\prod_{i=1}^{k}\int_{\alpha_i-\varepsilon}^{\beta_i}e^{-\frac{u^2}{2}}du+k\varepsilon.$$

ε は任意の正数でよかったから結局

$$(16)\qquad\lim_{N\to\infty}\frac{A^*(N;\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_k,\beta_k)}{N^{k-1}}=\frac{1}{(k-1)!}(2\pi)^{-\frac{k}{2}}\prod_{i=1}^{k}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

今度は (16) において $A^*(N)$ を $A(N)$ で置き換えたいのであるが，それは $A^*(N)$ を定義するときの不等式における $y(N)$

を $\log\log N$ で置き換えることである．補題4により $y(N)\sim\log\log N$ であるから，任意に与えられた正数 ε に対して，$N>N_2(\varepsilon)$ のとき，

$$y(N)+(\alpha_i-\varepsilon)\sqrt{y(N)}<\log\log N+\alpha_i\sqrt{\log\log N}$$
$$<y(N)+(\alpha_i+\varepsilon)\sqrt{y(N)}\qquad(i=1,\cdots,k),$$
$$y(N)+(\beta_i-\varepsilon)\sqrt{y(N)}<\log\log N+\beta_i\sqrt{\log\log N}$$
$$<y(N)+(\beta_i+\varepsilon)\sqrt{y(N)}\qquad(i=1,\cdots,k).$$

したがって $N>N_2$ のとき

$$A^*(N;\alpha_1+\varepsilon,\beta_1-\varepsilon,\cdots,\alpha_k+\varepsilon,\beta_k-\varepsilon)$$
$$<A(N;\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_k,\beta_k)$$
$$<A^*(N;\alpha_1-\varepsilon,\beta_1+\varepsilon,\cdots,\alpha_k-\varepsilon,\beta_k+\varepsilon).$$

この不等式の各辺を N^{k-1} で割って，$N\to\infty$ とすると，(16) により

$$\frac{1}{(k-1)!}(2\pi)^{-\frac{k}{2}}\prod_{i=1}^{k}\int_{\alpha_i+\varepsilon}^{\beta_i-\varepsilon}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$\leq\liminf_{N\to\infty}\frac{A(N;\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_k,\beta_k)}{N^{k-1}}\leq\limsup_{N\to\infty}\frac{A(N;\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_k,\beta_k)}{N^{k-1}}$$

$$\leq\frac{1}{(k-1)!}(2\pi)^{-\frac{k}{2}}\prod_{i=1}^{k}\int_{\alpha_i-\varepsilon}^{\beta_i+\varepsilon}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

ε は任意の正数でよかったから定理4の成り立つことがわかった．

集合$P(N)$を導入したのは，いわゆる切断法（truncation method）で確率論で有効に用いられる手法である．また補題3から補題5を導いたのは実質的には篩（ふるい）法（sieve method）である．

文　献

[1] P. Erdös and M. Kac, The Gaussian law of errors in the theory of additive number-theoretic functions, Amer. J. Math., 62(1940), 738-742.

[2] G. H. Hardy and E. M. Wright, An introduction to the theory of numbers, Oxford.

[3] M. Tanaka, On the number of prime factors of integers, Jap. J. Math., 25(1955), 1-20.

[4] M. Tanaka, On the number of prime factors of integers II, J. Math. Soc. Japan, 9(1957), 171-191.

[5] M. Tanaka, On the number of prime factors of integers III, Jap. J. Math., 27(1957), 103-127.

[6] M. Tanaka, On the number of prime factors of integers IV, Jap. J. Math., 30(1960), 55-83.