数理解析研究所講究録
第 87 巻 1970 年 8-15

差分方程式 $y(x+1)=y(x)+1+\frac{\lambda}{y(x)}$ について

東大理　木村俊房

1. 目的

非線型差分方程式

$$(1)\qquad y(x+1) = y(x) + 1 + \frac{\lambda}{y(x)} \quad (\lambda \neq 0 \text{ : 定数})$$

の解で，$|x|<\infty$ で有理型となるものを考察する.

$$y(x+1) = y(x) + \frac{\lambda}{y(x)}$$

の形の方程式は $z(x) = \mathrm{const}\cdot y(x)^2$ で (1) に帰着される.

2. 写像 $w = f(z) = z+1+\frac{\lambda}{z}$

この写像によって，z と w は表の様に点が対応する.

z	0	∞	$-\lambda$	-1	$\pm\sqrt{\lambda}$	$\pm i\sqrt{\lambda}$	$\frac{-1\pm\sqrt{1-4\lambda}}{2}$
w	∞	∞	$-\lambda$	$-\lambda$	$1\pm2\sqrt{\lambda}$	1	0

円：$|z|=\sqrt{|\lambda|}$ は点 $w=1+2\sqrt{\lambda}$, $1-2\sqrt{\lambda}$ を結ぶ線分に移り，円の内部，外部はともに w 平面からこの線分を除いた領域に $1:1$ に写像される.

f の n 回の iteration を f_n で表わす：

$$f_n(z) = \underbrace{f(f(\cdots f(z))\cdots)}_{n}, \quad f_0(z) \equiv z, \quad f_1(z) = f(z).$$

任意の α（∞ でもよい）に対して

$$A_n(\alpha) = \{\beta ; \ f_n(\beta) = \alpha\},$$

$$A(\alpha) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n(\alpha)$$

とおく．容易に

定理「$\lambda = 1$，$\alpha = -1$ のときは $A(\alpha) = \{-1\}$，それ以外の場合には，$A(\alpha)$ は少くとも3点以上を含む．」

有理型函数解が値 α を取らなければ，$A(\alpha)$ に属する値もとらない．

α に対して，

$$\alpha^{(0)} = \alpha, \quad \alpha^{(n-1)} = f(\alpha^{(n)}) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

をみたす点列 $\{\alpha^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ を α の A-列とよぶことにする．

α の A-列は一般に無限個ある．(1) の有理型函数解 $y(x)$ が $x = x_0$ で値 α を取れば，

$$\{y(x_0 - n)\}_{n=0}^{\infty}$$

は α の A-列である．

3. 有理函数解の非存在.

$y(x)\equiv-\lambda$ は明らかに (1) の解であるが,

定理「$y(x)\equiv-\lambda$ 以外に (1) は有理函数解をもたない。」

この定理は, $x=\infty$ で

$$y(x)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{a_n}{x^n}\ ,\quad a_k\neq0,\quad k\gtreqless0, \tag{2}$$

と展開される解は存在しないことを示すことによって証明される. たとえば, $k<0$ の解 (2) が存在したとする. もし $k<-1$ ならば

$$y(x+1)=a_k x^{-k}+(-k a_k+a_{k+1})x^{-k-1}+\cdots\cdots,$$

$$y(x)+1+\frac{\lambda}{y(x)}=a_k x^{-k}+a_{k+1}x^{-k-1}+\cdots\cdots$$

であるから, $a_k\neq0$ に反する.

$k=-1$ ならば,

$$y(x+1)=a_{-1}x+(a_{-1}+a_0)+\frac{a_1}{x}+\cdots\cdots,$$

$$y(x)+1+\frac{\lambda}{y(x)}=a_{-1}x+(a_0+1)+\left(\frac{\lambda}{a_{-1}}+a_1\right)\frac{1}{x}+\cdots$$

から, $a_{-1}=1$, $a_1=\frac{\lambda}{a_{-1}}+a_1$. $\lambda\neq0$ に反する.

他の場合も同様である.

4. 有理型函数解の存在

前節から

$$y(x) \sim \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$$

の形の形式解は存在しないことがわかった。しかし

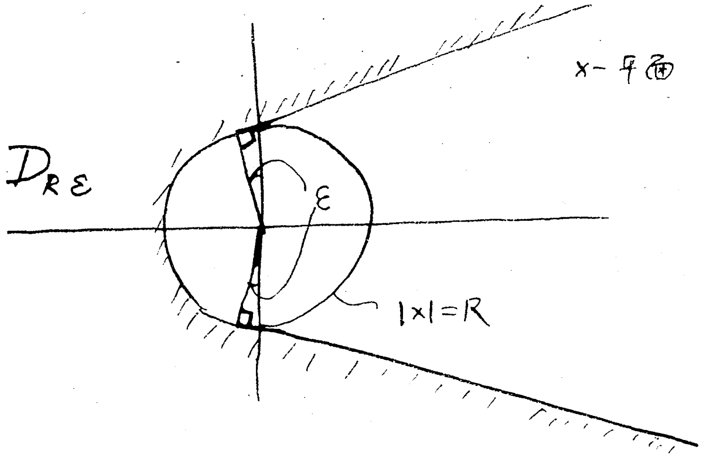
定理「c を任意定数として，(1) は

$$y(x) \sim x + \lambda \log x + c + x \sum_{j+k \geq 2} p_{jk} \left(\frac{1}{x}\right)^j \left(\frac{\log x}{x}\right)^k$$

の形の形式解をもつ。p_{jk} は c をきめると一意的にきまる。」

この形式解は次の様な解析的意味をもつ。

x 平面内の図のような領域を $D_{R\varepsilon}$ とする



R_0 は十分大きく，$\varepsilon > 0$ は任意にとる。

定理「任意の c に対し，(1) の解 $\varphi_c(x)$ でつぎの性質をもつものがただ1つ存在する．

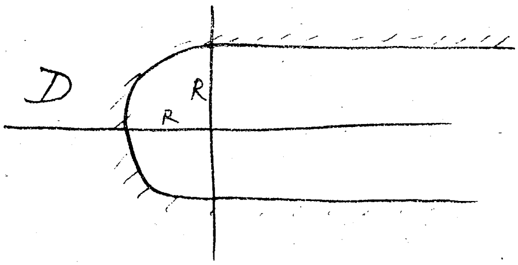
(i) $\varphi_c(x)$ は $D_{R_0,\varepsilon}$ で正則，

(ii) $\varphi_c(x)$ はフィルターの基 $\{D_{R,\varepsilon}\ ;\ R \geqq R_0\}$ に沿っての漸近展開

(3) $$\varphi_c(x) \sim x + \lambda \log x + c + x\sum_{j+k=2}^{\infty} \beta_{jk} \left(\frac{1}{x}\right)^j \left(\frac{\log x}{x}\right)^k$$

をもつ.」

解 $\varphi_c(x)$ は解析接続によって，$|x| < \infty$ において有理型である．さらに図のような領域 D



で正則である．

(1) の任意の解 $y(x)$ に対して

$$y(x + \pi(x))\ ,\quad \pi(x) \text{ は周期 } 1 \text{ の函数}$$

も解である．とくに，$\pi(x) \equiv \text{const.}$ をとることによって，

$$\varphi_c(x) = \varphi_0(x + c)$$

である．

Picard の定理と §2 で述べたことから

定理「$\wp_c(x)$ は，$\lambda=-1$ のときは値 -1 を除いて，すべての値をとる。λ の如何に拘らず，$\wp_c(x)$ は極をもつ」

5. 解 $\wp_c(x)$ の性質

$x=x_0$ が $\wp_c(x)$ の極ならば，明らかに

(4) $x_0+1,\ x_0+2,\ \cdots\cdots$

はすべて $\wp_c(x)$ の極である．しかし

(5) $x_0-1,\ x_0-2,\ \cdots\cdots$

はすべて極とはなり得ない．x_0 は，(4) は極であるが (5) は極でないようにとっておこう。x_0-1 は $\wp_c(x)$ の零点である．

$$\{\wp_c(x_0-1-k)\}_{k=0}^{\infty}$$

は $\alpha=0$ の 1 つの A-列である．$\wp_c(x)$ の漸近展開から

$$\wp_c(x_0-1-k)\in D_{R_0\varepsilon}\ ,\ k\geqq k_0$$

である．

一方，x_0 は $\wp_c(x)$ の極であるから，$\wp_c(x)$ による x_0 を中心とする適当な角領域の像は $D_{R_0\varepsilon}$ を含むとしてよい．そして，x_0 に収束する点列 $\{x_0^{(k)}\}_{k=k_0}^{\infty}$ で

$$\wp_c(x_0^{(k)}) = \wp_c(x_0 - 1 - k) \qquad k \geqq k_0$$

となるものが存在する.

$$\wp_c(x_0^{(k)} + k + 1) = \wp_c(x_0) \qquad k \geqq k_0$$

であるから, $x_0 + k + 1$ の近傍 に, $k - k_0 + 1$ 個の極が現われる.

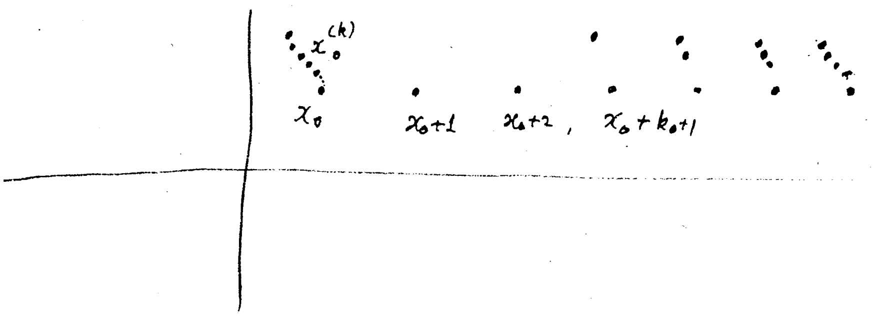
以上から, 極の列

$$x_0,\ x_0+1,\ x_0+2,\ \cdots\cdots$$

から常に無限個の極の列

$$x_0^{(k_0)} + k_0 + 1,\ x_0^{(k_0)} + k_0 + 2,\ \cdots\cdots$$
$$x_0^{(k_0+1)} + k_0 + 2,\ x_0^{(k_0+1)} + k_0 + 3,\ \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

が出現することがわかる.



$\wp_c(x)$ の極の出現のしかたから, 有理型函数の位数として,

定理「$\wp_c(x)$の位数は $\geqq 2$.」

Γ函数の位数は1と較べると興味深い.

6. 問題

つぎの問題が考えられる.

1. λの特別な値に対して $\wp_c(x)$の極の位数は1であることはわかる. 一般のλに対して極の位数を調べよ.

2. $\wp_c(x)$の位数は $=2$ か？

3. $\wp_c(x)$, あるいは (1)の任意の解は, $\equiv -\lambda$ を除いて, 代数的微分方程式の解になることはないか?

4. $\wp_c(x+\pi(x))$ で有理型函数解は盡くされないが, この形に書けない解はどのようなものか?

5. 右半面でも, (3) に漸近展開される解は存在するが, この解は $|x|<\infty$ で多価か？