数理解析研究所講究録
第 87 巻 1970 年 16-40

Integral Manifolds for Linear Functional Differential Equations

東北大 理　内藤敏機

§1. 序

我々は，関数微分方程式

(1.1)　　$\dot{x}(t) = f(t, x_t)$

を考える。ここで x は $(-\infty, A)$ で定義され R^n の値を取る関数で，$t \in (-\infty, A)$ に対して x_t は

(1.2)　　$x_t(\theta) = x(t+\theta)$　　for $\theta \in (-\infty, 0]$

によって定義される $(-\infty, 0]$ 上の関数を表わす。(1.1) において各固定した t に対して $f(t, \cdot)$ は，$(-\infty, 0]$ の上で定義された適当な関数の集合 $\mathcal{B}$ の上で定義された汎関数である。初期時間を t_0，初期関数を $\varphi_0 \in \mathcal{B}$ とした時の (1.1) の初期値問題の解を $x(t; t_0, \varphi_0)$ で表わす。各固定した t に対して，$x(t; t_0, \varphi_0)$ から (1.2) によって定義した関数を $x_t(t_0, \varphi_0)$ と表わす。我々は (1.1) に対してその $(s+1)$ 次元 Integral Manifold を次のような $R \times \mathcal{B}$ の部分集合 S と定義する。

定義　SはR×$\mathcal{B}$の部分集合で，媒介変数$(t, c_1 \cdots c_p)$を用いて

$$S = \{(t, \varphi) \mid \varphi = f(c_1, \cdots, c_p, t) \ \ -\infty < t < +\infty, c_1, \cdots c_p \text{は適当な定義域を動く}\}$$

と表わされ，$(t_0, \varphi_0) \in S$ ならば，$-\infty < t < +\infty$ に於て(1.1)の解$x(t; t_0, \varphi_0)$が存在し，かつ$(t, x_t(t_0, \varphi_0)) \in S$である。

§2　Haleの空間

$\mathcal{B}$としてHaleは[H]に於て，次のような空間を公理的に与えた。以後これをHaleの空間と呼ぶ。

$\mathcal{B} = \mathcal{B}((-\infty, 0] \longrightarrow R^n)$は，$(-\infty, 0]$から$R^n$への関数$\varphi$の作る集合で，その上にノルム$\|\cdot\|$が定義されており，このノルムに関してBanach Spaceになっている。$\varphi \in \mathcal{B}$に対してφ^βをφの$(-\infty, -\beta]$への制限とすると，これは$(-\infty, -\beta]$からR^nへの関数である。$(\beta > 0)$　$\overline{\mathcal{B}}_\beta = \{\eta = \varphi^\beta \mid \varphi \in \mathcal{B}\}$とおき，$\eta \in \overline{\mathcal{B}}_\beta$に対して，

$$\|\eta\|_{\overline{\beta}} \equiv \inf\{\|\varphi\| \mid \varphi^\beta = \eta, \ \varphi \in \mathcal{B}\}$$

とおくと，$\|\cdot\|_{\overline{\beta}}$は$\overline{\mathcal{B}}$上のsemi-normである。$\overline{\mathcal{B}}_\beta$に同値関係～を，$\eta_1 \sim \eta_2 \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \|\eta_1 - \eta_2\|_{\overline{\beta}} = 0$によって定義し，$\mathcal{B}_\beta = \overline{\mathcal{B}}_\beta / \sim$とおくと$\mathcal{B}_\beta$はBanach Spaceである。$\mathcal{B}_\beta$のノルムを以後$\|\cdot\|_\beta$と書く。さて$\mathcal{B}$に対して次の仮定を置く。

(h_1)　$x(t)$が$(-\infty, A)$で定義され$(A > 0)$，$x_0 \in \mathcal{B}$かつ$[0, A)$で連続ならば，x_tは$t \in [0, A)$で連続である。

(h_2) $(-\infty, 0]$で定義された有界連続な関数は$\mathcal{B}$に属する。

(h_3) ある$\gamma > 0$が存在して次が成立する。$\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$が、そのEuclid normが一様有界な列で、$(-\infty, 0]$に含まれる任意のコンパクト区間の上で一様に$\varphi$に収束するならば

$$\varphi^{\gamma} \in \mathcal{B}_{\gamma}, \quad \lim_{k\to\infty} \| \varphi_k^{\gamma} - \varphi^{\gamma} \|_{\gamma} = 0$$

(h_4) $r \geq 0$で定義された連続，単調非減少，≥ 0な関数$b(r)$, $c(r)$が存在して，$\forall \varphi \in \mathcal{B}$, $\forall \beta \geq 0$に対して

$$\| \varphi \| \leqq b \left[\sup_{-\beta \leq \theta \leq 0} | \varphi(\theta) | \right] + c (\| \varphi^{\beta} \|_{\beta})$$

(h_5) $\forall \beta \geq 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{B}$に対して，$T_{\beta}\varphi \in \mathcal{B}_{\beta}$で$\lim_{\beta\to+\infty} \| T_{\beta}\varphi \|_{\beta} = 0$

（但し$(T_{\beta}\varphi)(\theta) = \varphi(\beta + \theta)$ for $\theta \in (-\infty, -\beta]$）

以上の仮定を$\mathcal{B}$に置く。例としては，$[-\alpha, 0]$で連続で$(\alpha \geq 0)$

$$\| \varphi \|^2 = \left[\sup_{-\alpha \leq \theta \leq 0} | \varphi(\theta) | \right]^2 + \int_{-\infty}^{0} | \varphi(\theta) |^2 p(\theta) \, d\theta$$

が有限な値であるようなφの全体は$\mathcal{B}$の一例である。ここで$p(\theta)$は$\int_{-\infty}^{0} p(\theta) d\theta < \infty$, $\frac{dp(\theta)}{d\theta} \geq 0$, $p(\theta) \geq 0$とする。他の例として$\lim_{\theta\to-\infty} |\varphi(\theta)| e^{\theta} = 0$となる連続関数の全体は，$\|\varphi\| = \sup_{-\infty < \theta \leq 0} |\varphi(\theta)| e^{\theta}$と置く事によって，Haleの空間の例である。上の二つの例では，$b(r)$, $c(r)$は共にrの一次式である。今からここで扱う問題では$(h_1)\sim(h_5)$の仮定では，解析を十分に行えないので，更に次の仮定を補う。この仮定を，上記の二つの例は満足している。

(h_4') $b(r)$, $c(r)$は共にrの一次式，$b(r) = c(r) = Mr$である。

(h_5) $\exists m>0$ が存在して, $\forall \beta \geqq 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{B}$ に対して $\|T_\beta \varphi\|_\beta \leqq m\|\varphi\|$

(h_6) $\exists l>0$ が存在して, $\forall \varphi \in \mathcal{B}$ に対して $|\varphi(0)| \leqq l\|\varphi\|$

(h_7) $\lim_{\delta \to 0+} \beta(\delta) = +\infty$ となる関数 $\beta(\delta)$ が存在して, $\beta \geqq \beta(\delta)$, $\varphi \in \mathcal{B}$, $\varphi(0)=0$ ならば $\|T_\beta \varphi\|_\beta \leqq \delta \|\varphi\|$

§3 Hale の空間で定義された線型関数微分方程式と Integral Manifold の存在定理

我々が以後扱う方程式は, 小さいparameter $\varepsilon \geqq 0$ を含む

$$(3.1)\quad \begin{aligned} \dot{y}(\tau) &= A(\tau,\varepsilon)y_\tau + B(\tau,\varepsilon)x_\tau + w(\tau,\varepsilon) \\ \dot{x}(\tau) &= \varepsilon[C(\tau,\varepsilon)y_\tau + D(\tau,\varepsilon)x_\tau + v(\tau,\varepsilon)] \end{aligned}$$

である。次の事を仮定する。$\mathcal{B}_n$ は $\tilde{y}:(-\infty,0]\to R^n$ の作るHale の空間, $\mathcal{B}_m$ は $\tilde{x}:(-\infty,0]\to R^m$ の作るHaleの空間とする。各固定した $\tau\in R$, $\varepsilon \geqq 0$ に対して, A, B, C, D は線型作用素で定義域値域は次の通りである。

$A:\mathcal{B}_n \to R^n$, $B:\mathcal{B}_m \to R^n$, $C:\mathcal{B}_n \to R^m$, $D:\mathcal{B}_m \to R^m$

w は R^n-vector, v は R^m-vector である。

(3.2) $\exists K>0$ が存在して, $\forall \tau \in R$ と, $\varepsilon \geqq 0$ に対して

$|A(\tau,\varepsilon)|, |B(\tau,\varepsilon)|, |C(\tau,\varepsilon)|, |D(\tau,\varepsilon)|, |w(\tau,\varepsilon)|, |v(\tau,\varepsilon)| \leqq K$

($|\cdot|$ は operator norm 又は Euclid norm を表わす。)

(3.3) 連続, 非減少な関数 $\omega:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\omega(0)=0$ が存在して, $\forall \tau\in R$, $\varepsilon \geqq 0$ に対して

$$|A(\tau,\varepsilon)-A(0,0)|,\ |B(\tau,\varepsilon)-B(0,0)|,\ |W(\tau,\varepsilon)-W(0,0)| \leqq \omega(\varepsilon)$$

(3.4) 方程式

$$(3.4)\qquad \dot{y}(\tau)=A(0,0)\,y_\tau$$

の解 $y(\tau;\tilde{\tau},y_{\tilde{\tau}})$ は

$$\|y_\tau\| \leqq k e^{-\rho(\tau-\tilde{\tau})}\|y_{\tilde{\tau}}\| \qquad \text{for } \tau\geqq\tilde{\tau}$$

を満す。但し $k>0$, $\rho>0$ は(3.4)の解の選び方には無関係な定数である。

以上の仮定の下に、我々は Halanay, Kurzweil [1],[2] にならって、次の定理を得た。

定理3.1　方程式(3.1)に対して上記仮定を置く。しからば、十分小さい $\varepsilon\geqq 0$ に対して ε の関数; $(0<)\mu(\varepsilon)$, $\nu(\varepsilon)$, $K(\varepsilon)$, $L(\varepsilon)$, $\underline{\Theta}(\varepsilon)$, $\overline{\Theta}(\varepsilon)$ $(<+\infty)$ (for $\varepsilon>0$)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mu(\varepsilon)=\mu(0)=0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\nu(\varepsilon)=\nu(0)<+\infty,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}K(\varepsilon)=K(0)<+\infty$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}L(\varepsilon)=L(0)<+\infty,\quad \nu(0),K(0),L(0)\neq 0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\underline{\Theta}(\varepsilon)=\underline{\Theta}(0)=0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\Theta}(\varepsilon)=\overline{\Theta}(0)=+\infty$$

と、写像 $g_\varepsilon : R^m\times R \longrightarrow \mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_m$ が存在して次が成立する。

(i) $\tilde{\gamma}\in R^m$, $\tilde{\tau}\in R$, $g_\varepsilon(\tilde{\gamma},\tilde{\tau})=(\tilde{y},\tilde{x})$ ならば $\tilde{x}(0)=\tilde{\gamma}$

$$\sup_{\gamma\in R^m,\tau\in R}\|g_\varepsilon(\gamma,\tau)-g_0(\gamma,\tau)\|\cdot[1+|\gamma|]^{-1} \leqq \underline{\Theta}(\varepsilon)$$

$\gamma_1,\gamma_2\in R^m$, $\tau\in R$ に対して $\|g_\varepsilon(\gamma_1,\tau)-g_\varepsilon(\gamma_2,\tau)\|\leqq L(\varepsilon)\,|\gamma_1-\gamma_2|$

$g_0(\gamma,\tau)$ は τ によらない関数である。

(ii) $\tilde{\gamma}\in R^m$, $\tilde{\tau}\in R$, $g_\varepsilon(\tilde{\gamma},\tilde{\tau})=(\tilde{y},\tilde{x})$ とする。この時 $(-\infty,+\infty)$ で

定義された(3.1)の解(y_τ, x_τ)が存在して

$$(y_{\hat\tau}, x_{\hat\tau}) = (\hat{y}, \hat{x}), \quad (y_\tau, x_\tau) = g_\varepsilon(x(\tau), \tau) \quad \text{for } \tau \in (-\infty, +\infty)$$

(iii) (y_τ, x_τ), (y'_τ, x'_τ)が$(-\infty, +\infty)$で定義された(3.1)の解で、$\forall \tau \in (-\infty, +\infty)$に対して、$(y_\tau, x_\tau) = g_\varepsilon(x(\tau), \tau)$, $(y'_\tau, x'_\tau) = g_\varepsilon(x'(\tau), \tau)$ならば

$$|x(\tau) - x'(\tau)| \geq K(\varepsilon)^{-1} e^{-\mu(\varepsilon)(\tau - \hat\tau)} |x(\hat\tau) - x'(\hat\tau)| \quad \text{for } \tau \geq \hat\tau$$

(iv) (y_τ, x_τ)が$\hat\tau \leq \tau < +\infty$で定義された(3.1)の解で

$\|(y_{\hat\tau}, x_{\hat\tau}) - g_\varepsilon(x(\hat\tau), \hat\tau)\| \cdot [1 + |x(\hat\tau)|]^{-1} < \textcircled{H}(\varepsilon)$ ならば

$$\|(y_\tau, x_\tau) - g_\varepsilon(x(\tau), \tau)\| \leq K(\varepsilon) e^{-\nu(\varepsilon)(\tau - \hat\tau)} \|(y_{\hat\tau}, x_{\hat\tau}) - g_\varepsilon(x(\hat\tau), \hat\tau)\| \quad \text{for } \tau \geq \hat\tau$$

(v) $g'_\varepsilon : R^m \times R \longrightarrow \mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_m$に対して条件

(i)′ $g'_\varepsilon(\hat\gamma, \hat\tau) = (\hat{y}, \hat{x}) \Rightarrow \hat{x}(0) = \hat\gamma$

$$\sup_{\gamma \in R^m, \tau \in R} \|g'_\varepsilon(\gamma, \tau) - g_0(\gamma, \tau)\| [1 + |\gamma|]^{-1} < \textcircled{H}(\varepsilon)$$

(ii)′ 上記(ii)においてg_εをg'_εで置きかえた条件

が成立つならば

$$g'_\varepsilon = g_\varepsilon$$

§4 Halanay, Kurzweil の定理

方程式(1.1)の解$x(t; t_0, \varphi_0)$の定義区間をJとすると、Jから$\mathcal{B}$への写像 $J \ni t \longmapsto x_t(t_0, \varphi_0) \in \mathcal{B}$ が定まる。(1.1)のすべての解から上のようにして作った写像の集合を考えると、それは次に定義するような flow を作る。

定義 (Halanay, Kurzweil [1]) Xをある集合とする。写像

$x : J(x) \longrightarrow X$ ($J = R$, 又は $[\tilde{\tau}, \infty)$, 又は $(\tilde{\tau}, \infty)$ for some $\tilde{\tau} \in R$) の集合 $\mathfrak{X}$ が X における flow であるとは次が成立つ事である。

(I) $x \in \mathfrak{X}$, $t \in J(x)$, $J_1 = [t, \infty)$ 又は (t, ∞) とする。$\tau \in J_1$ に対して $y(\tau) = x(\tau)$ と置くと $y \in \mathfrak{X}$ $(J(y) = J_1)$

(II) $x_1, x_2 \in \mathfrak{X}$, $t \in J(x_1) \cap J(x_2)$, $x_1(t) = x_2(t)$ ならば $\tau \geqq t$ に対して $x_1(\tau) = x_2(\tau)$

(III) $\forall \tilde{x} \in X$, $\forall \tilde{\tau} \in R$ に対して $J(x) = [\tilde{\tau}, \infty)$, $x(\tilde{\tau}) = \tilde{x}$ であるような $x \in \mathfrak{X}$ が存在する。

(IV) $x_i \in \mathfrak{X}$, $x_i(\tau) = x_j(\tau)$ for $\tau \in J(x_i) \cap J(x_j)$; $i, j = 1, 2, \cdots$ とする。$y : \bigcup_{i=1}^{\infty} J(x_i) \longrightarrow X$ を $y(\tau) = x_i(\tau)$ for $\tau \in J(x_i)$ によって定義すると, $y \in \mathfrak{X}$ $\left(J(y) = \bigcup_{i=1}^{\infty} J(x_i)\right)$

この定義の(III)によって, x は右に一意的に定まるから, $x(\tilde{x}, \tilde{\tau})$ とも書き, τ における値を $x(\tau ; \tilde{x}, \tilde{\tau})$ と書く。以後 X は二つの Banach Space C, Γ の直積, $X = C \times \Gamma$ であるとし, $x(\tau ; \tilde{x}, \tilde{\tau}) = (c(\tau ; \tilde{c}, \tilde{\gamma}, \tilde{\tau}), \gamma(\tau ; \tilde{c}, \tilde{\gamma}, \tilde{\tau}))$ のように成分ごとに分けて書く。Halanay, Kurzweil は flow $\mathfrak{X}$ に対して次の定理を証明している。

定理 4.1 (Halanay, Kurzweil [1]). $\theta, \vartheta, L, T, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, \vartheta_5$ は正定数で, $\vartheta_1 < \vartheta_3$, $\vartheta_2 < 1$ とする。$G_1 = \{(c, \gamma) \in X \mid |c| \leqq \theta |\gamma| + \vartheta\}$ と置き, $X = C \times \Gamma$ 上の flow $\mathfrak{X}$ が次の条件を満すとする。

1° $(\tilde{c}, \tilde{\gamma}) \in G_1$, $\tilde{\tau} \in R$ ならば, $\tau \in [\tilde{\tau} + T, \tilde{\tau} + 2T]$ に対して,

$(c(\tau;\hat{c},\tilde{\gamma},\tilde{\tau}),\gamma(\tau;\hat{c},\tilde{\gamma},\tilde{\tau}))\in G_1$

2° $(\tilde{c}_1,\tilde{\gamma}),(\tilde{c}_2,\tilde{\gamma})\in G_1,\ \tilde{\tau}\in R$ ならば

$|c(\tau;\tilde{c}_1,\tilde{\gamma},\tilde{\tau})-c(\tau;\tilde{c}_2,\tilde{\gamma},\tilde{\tau})|+L|\gamma(\tau;\tilde{c}_1,\tilde{\gamma},\tilde{\tau})-\gamma(\tau;\tilde{c}_2,\tilde{\gamma},\tilde{\tau})|$

$$\leqq\begin{cases}\vartheta_1|\tilde{c}_1-\tilde{c}_2| & \text{for } \tau\in[\tilde{\tau}+T,\tilde{\tau}+2T] \quad \text{(a)}\\ \vartheta_4|\tilde{c}_1-\tilde{c}_2| & \text{for } \tau\in[\tilde{\tau},\tilde{\tau}+T] \quad \text{(b)}\end{cases}$$

3° $(\tilde{c}_1,\tilde{\gamma}_1),(\tilde{c}_2,\tilde{\gamma}_2)\in G_1,\ |\tilde{c}_1-\tilde{c}_2|\leq L|\tilde{\gamma}_1-\tilde{\gamma}_2|,\ \tilde{\tau}\in R$

$\tau\in[\tilde{\tau}+T,\tilde{\tau}+2T]$ ならば

(a) $|c(\tau;\tilde{c}_1,\tilde{\gamma}_1,\tilde{\tau})-c(\tau;\tilde{c}_2,\tilde{\gamma}_2,\tilde{\tau})|\leqq L|\gamma(\tau;\tilde{c}_1,\tilde{\gamma}_1,\tilde{\tau})-\gamma(\tau;\tilde{c}_2,\tilde{\gamma}_2,\tilde{\tau})|$

(b) $|\gamma(\tau;\tilde{c}_1,\tilde{\gamma}_1,\tilde{\tau})-\gamma(\tau;\tilde{c}_2,\tilde{\gamma}_2,\tilde{\tau})-\tilde{\gamma}_1+\tilde{\gamma}_2|\leqq\vartheta_2|\tilde{\gamma}_2-\tilde{\gamma}_1|$

4° $(\tilde{c},\tilde{\gamma})\in G_1,\ \tilde{\tau}\in R$ ならば

(a) $1+|\gamma(\tau;\tilde{c},\tilde{\gamma},\tilde{\tau})|\geqq\vartheta_3(1+|\tilde{\gamma}|)$ for $\tau\in[\tilde{\tau}+T,\tilde{\tau}+2T]$

(b) $1+|\gamma(\tau;\tilde{c},\tilde{\gamma},\tilde{\tau})|\geqq\vartheta_5(1+|\tilde{\gamma}|)$ for $\tau\in[\tilde{\tau},\tilde{\tau}+T]$

$\mu=-(2T)^{-1}\log(1-\vartheta_2),\ \nu=-T^{-1}\log(\vartheta_1\vartheta_3^{-1})$ とおく。しからば写像 $p:\Gamma\times R\to C$ と，正定数 K ($\theta,\vartheta,L,T,\vartheta_1,\cdots\vartheta_5$ で定まる) が存在して次が成立する．

(i) $|p(\gamma,\tau)|\leq\theta|\gamma|+\vartheta,\ |p(\gamma_1,\tau)-p(\gamma_2,\tau)|\leq L|\gamma_1-\gamma_2|$ for $\gamma,\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma,\ \tau\in R$

(ii) $\tilde{\gamma}\in\Gamma,\ \tilde{\tau}\in R,\ \tilde{c}=p(\tilde{\gamma},\tilde{\tau})$ に対して，$(c,\gamma)\in\mathfrak{X}$ が存在して，

$J(c,\gamma)=R,\ c(\tilde{\tau})=\tilde{c},\ \gamma(\tilde{\tau})=\tilde{\gamma},\ c(\tau)=p(\gamma(\tau),\tau)$ for $\tau\in R$

(iii) $(c,\gamma)\in\mathfrak{X},\ (c_1,\gamma_1)\in\mathfrak{X},\ J(c,\gamma)=J(c_1,\gamma_1)=R,\ c(\tau)=p(\gamma(\tau),\tau)$

$c_1(\tau)=p(\gamma_1(\tau),\tau)$ for $\tau\in R$ ならば

$|\gamma(\tau)-\gamma_1(\tau)|\geqq K^{-1}e^{-\mu(\tau-\tilde{\tau})}|\gamma(\tilde{\tau})-\gamma_1(\tilde{\tau})|$ for $\tau\geqq\tilde{\tau}$

(iv) $(\hat{c},\hat{\gamma})\in G_1$, $\hat{\tau}\in R$, $\tau\geqq\hat{\tau}$ ならば

$$|c(\tau;\hat{c},\hat{\gamma},\hat{\tau})-p(\gamma(\tau;\hat{c},\hat{\gamma},\hat{\tau}))|\cdot[1+|\gamma(\tau;\hat{c},\hat{\gamma},\hat{\tau})|]^{-1}\leqq|\hat{c}-p(\hat{\gamma},\hat{\tau})|[1+|\hat{\gamma}|]^{-1}\times e^{-\mu(\tau-\hat{\tau})}$$

(v) $p':\Gamma\times R^1\to C$, $|p'(\gamma,\tau)|\leq\theta|\gamma|+\vartheta$ for $\gamma\in\Gamma$, $\tau\in R$, かつ p' に対して, (iii) において p を p' と書きかえた条件が成立するならば　　$p'=p$

定理4.2 (Halanay Kurzweil [1])　定理4.1 の仮定が満たされ, 更に $\vartheta_1<1$ とする。$\nu_1=-T^{-1}\log\vartheta_1$ とおく。この時ある $\varkappa_1>0$ が存在して $\forall(\hat{c},\hat{\gamma})\in G_1$, ${}^\forall\hat{\tau}\in R$ に対して

$$|c(\tau;\hat{c},\hat{\gamma},\hat{\tau})-p(\gamma(\tau;\hat{c},\hat{\gamma},\hat{\tau}),\tau)|\leq\varkappa_1 e^{-\nu_1(\tau-\hat{\tau})}|\hat{c}-p(\hat{\gamma},\hat{\tau})|$$

Flow $\mathcal{X}$ が周期 ξ を持つ場合, 即ち $\forall\hat{x}\in X$, $\hat{\tau}\in R$, $\tau>\hat{\tau}$ に対して $x(\tau+\xi;\hat{x},\hat{\tau}+\xi)=x(\tau;\hat{x},\hat{\tau})$ である場合には, 定理4.1で得られる p は τ について周期 ξ を持つ, 即ち $\forall\gamma\in\Gamma$, ${}^\forall\tau\in R$ に対して $p(\gamma,\tau+\xi)=p(\gamma,\tau)$ である。(Halanay, Kurzweil [1])

§5　予備的な補題

補題5.1　　方程式(3.4)に対して仮定(3.4)が満足されているならば, $R\times\mathcal{B}$ で定義された連続な Liapunov functional $V(\tau,\varphi)$ が存在して次の条件が成立つ。

(i) $\|\varphi\|\leqq V(\tau,\varphi)\leqq k\|\varphi\|$　　for ${}^\forall\varphi\in\mathcal{B}$, ${}^\forall\tau\in R$

(ii) $|V(\tau,\varphi_1)-V(\tau,\varphi_2)|\leqq k\|\varphi_1-\varphi_2\|$　　for $\forall\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{B}$, $\forall\tau\in R$

(iii) $V'_{(3.4)}(\tau,\varphi)\leqq-\rho V(\tau,\varphi)$　　for $\forall\varphi\in\mathcal{B}$, $\forall\tau\in R$

証明 $V(\tau,\varphi)=\sup_{t\geq 0}\|y_{\tau+t}(\tau,\varphi)\|e^{\rho t}$ とおく。詳しくは、T. Yoshizawa [3] P.193 を見て下さい。

補題5.2 (3.4)を仮定する。この時方程式

$$(5.1)\qquad \dot{y}(\tau)=A(0,0)y_\tau+u(\tau,y_\tau)$$

と、補題5.1で得たV(τ,φ)に対して $\forall\varphi\in\mathcal{B},\ \forall\tau\in R$ に於て

$$V'_{(5.1)}(\tau,\varphi)\leqq-\rho V(\tau,\varphi)+kb'(0)|u(\tau,\varphi)|$$
$$=-\rho V(\tau,\varphi)+kM|u(\tau,\varphi)|$$

が成立する。

証明 T. Yoshizawa [3] P.203 参照

系5.3 補題5.2により、(5.1)の解 y_τ に対して

$$V(\tau,y_\tau)\leqq e^{-\rho(\tau-\tilde{\tau})}V(\tilde{\tau},y_{\tilde{\tau}})+kM\int_{\tilde{\tau}}^{\tau}e^{-\rho(\tau-\sigma)}|u(\sigma,y_\sigma)|d\sigma\ ;\ \tau\geq\tilde{\tau}$$

この式と補題5.1によって、$\tau\geqq\tilde{\tau}$ に対して

$$\|y_\tau\|\leqq ke^{-\rho(\tau-\tilde{\tau})}\|y_{\tilde{\tau}}\|+kM\int_{\tilde{\tau}}^{\tau}e^{-\rho(\tau-\sigma)}|u(\sigma,y_\sigma)|d\sigma$$

特に $|u(\tau,\varphi)|\leqq{}^{\exists}u$ for $\forall\varphi\in\mathcal{B},\ \forall\tau\in R$ の場合には

$$\|y_\tau\|\leqq ke^{-\rho(\tau-\tilde{\tau})}\|y_{\tilde{\tau}}\|+kM\frac{1-e^{-\rho(\tau-\tilde{\tau})}}{\rho}u\qquad \text{for } \tau\geqq\tilde{\tau}$$

§6 定理3.1の証明－その1－

方程式(3.1)の解の集合から作られたflowに対して、定理4.1の条件が成立する事を見る。その為に、方程式(3.1)に於

て．$\varepsilon=0$とした場合の方程式

$$(6.1)\qquad \dot{y}(\tau)=Ay_\tau+Bx_\tau+w,\qquad \dot{x}(\tau)=0$$

但し　$A=A(0,0)$, $B=B(0,0)$, $w=w(0,0)$

に対して、定理4.1が成立する事を確める。この時，$\varepsilon>0$が十分小ならば，(3.1)に対しても定理4.1が成立する。まず，(3.1)の解と(6.1)の解を比較すると，次の補題を得る。

補題6.1　ρ, ε各々について単調非減少な関数$\Omega(\rho,\varepsilon)$,

$$\Omega:[0,\infty)\times[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty),\quad \Omega(0,\varepsilon)=\Omega(\rho,0)=0$$

が存在して次が成立する。

$\tilde{y}^1,\tilde{y}^2\in\mathcal{B}_n$, $\tilde{x}^1,\tilde{x}^2\in\mathcal{B}_m$, $\tilde{\tau}\in R$を任意に選ぶ。(y^i,x^i)を$[\tilde{\tau},\infty)$で定義され，初期条件$(y^i,x^i)_{\tilde{\tau}}=(\tilde{y}^i,\tilde{x}^i)$を満す(3.1)の解とする。$(i=1,2)$。$(y^{i+2},x^{i+2})$を$[\tilde{\tau},\infty)$で定義され，初期条件$(y^{i+2},x^{i+2})_{\tilde{\tau}}=(\tilde{y}^i,\tilde{x}^i)$を満す(6.1)の解とする$(i=1,2)$。この時．

$$\|y^1_\tau-y^3_\tau\|+\|x^1_\tau-x^3_\tau\|\leqq(\|\tilde{y}^1\|+\|\tilde{x}^1\|+1)\,\Omega(\tau-\tilde{\tau},\varepsilon)$$

$$\|y^1_\tau-y^2_\tau-y^3_\tau+y^4_\tau\|+\|x^1_\tau-x^2_\tau-x^3_\tau+x^4_\tau\|\leqq(\|\tilde{y}^1-\tilde{y}^2\|+\|\tilde{x}^1-\tilde{x}^2\|)\,\Omega(\tau-\tilde{\tau},\varepsilon)$$

$$\text{for}\quad \tau\geqq\tilde{\tau}$$

証明　(y^1,x^1), (y^3,x^3)の満す方程式(3.1)，(6.1)を積分形に直し，$y^1(\tilde{\tau})=y^3(\tilde{\tau})$, $x^1(\tilde{\tau})=x^3(\tilde{\tau})$である事を使い．仮定(3.2)，(3.3)を使うと，$\tau\geqq\tilde{\tau}$に対して

$$(6.2)\quad |y^1(\tau)-y^3(\tau)|+|x^1(\tau)-x^3(\tau)|\leqq\int_{\tilde{\tau}}^{\tau}(K+\varepsilon K)\{\|y^1_\sigma-y^3_\sigma\|+\|x^1_\sigma-x^3_\sigma\|\}d\sigma$$
$$+\int_{\tilde{\tau}}^{\tau}\{\omega(\varepsilon)+\varepsilon K\}\{\|y^3_\sigma\|+\|x^3_\sigma\|+1\}d\sigma$$

$x^3(\tau)=0$ であるから，(h_4) により

$$\|x^3_\sigma\| \leqq b\left(\sup_{\tilde{\tau}\leqq u\leqq\sigma}|x^3(u)|\right)+c\left(\|(x^3_\sigma)^{\sigma-\tilde{\tau}}\|_{\sigma-\tilde{\tau}}\right)$$
$$= b\left(|\tilde{x}'(0)|\right)+c\left(\|T_{\sigma-\tilde{\tau}}\tilde{x}'\|_{\sigma-\tilde{\tau}}\right)$$

故に (h_5) と (h_6) の仮定により

$$\|x^3_\sigma\| \leqq M(l+m)\|\tilde{x}'\| \qquad \text{for } \sigma\geqq\tilde{\tau}$$

が成立する。従って $|Bx^3_\sigma+w|\leqq KM(l+m)\|\tilde{x}'\|+K$ であるから，系5.3を使って，$\sigma\geqq\tilde{\tau}$ の時

$$\|y^3_\sigma\|\leqq ke^{-s(\sigma-\tilde{\tau})}\|\tilde{y}'\|+\frac{1}{s}kM\{KM(l+m)\|\tilde{x}'\|+K\}$$

が成立する。故に，M, l, m, K, k, s によって N_1 を適当に選べば，$\sigma\geqq\tilde{\tau}$ に対して

$$\|y^3_\sigma\|+\|x^3_\sigma\|+1 \leqq N_1\{\|\tilde{y}'\|+\|\tilde{x}'\|+1\}$$

である。$\Omega_1(\rho,\varepsilon)=N_1\{w(\varepsilon)+\varepsilon K\}\rho$ とおくと，Ω_1 は ρ,ε 各々について単調非減少で $\Omega(0,\varepsilon)=\Omega(\rho,0)=0$，そして (6.2) より

$$(6.3)\quad |y'(\tau)-y^3(\tau)|+|x'(\tau)-x^3(\tau)| \leqq \int_{\tilde{\tau}}^{\tau}(K+\varepsilon K)\{\|y'_\sigma-y^3_\sigma\|+\|x'_\sigma-x^3_\sigma\|\}d\sigma + \Omega_1(\tau-\tilde{\tau},\varepsilon)\{\|\tilde{y}'\|+\|\tilde{x}'\|+1\}$$

を得る $(\tau\geqq\tilde{\tau})$。$Y(\tau)=y'(\tau)-y^3(\tau)$，$X(\tau)=x'(\tau)-x^3(\tau)$，$\mathcal{Y}(\tau)=\sup_{\tilde{\tau}\leqq u\leqq\tau}|Y(u)|$，$\mathcal{X}(\tau)=\sup_{\tilde{\tau}\leqq u\leqq\tau}|X(u)|$ と置けば，(h_4) の仮定と，$y'_{\tilde{\tau}}=y^3_{\tilde{\tau}}$，$x'_{\tilde{\tau}}=x^3_{\tilde{\tau}}$ である事を使って，

$$(6.4)\quad \begin{aligned}\|y'_\sigma-y^3_\sigma\| &\leq b(\mathcal{Y}(\sigma))=M\mathcal{Y}(\sigma)\\ \|x'_\sigma-x^3_\sigma\| &\leq b(\mathcal{X}(\sigma))=M\mathcal{X}(\sigma)\end{aligned}$$

である。故に (6.3) 式は

$$|Y(\tau)|+|X(\tau)| \leqq \int_{\tilde{\tau}}^{\tau}(K+\varepsilon K)M\{y(\sigma)+x(\sigma)\}d\sigma+\Omega_1(\tau-\tilde{\tau},\varepsilon)\{\|\tilde{y}\|+\|\tilde{x}\|+1\}$$

この式の右辺はτについて単調非減少であるから,

$$y(\tau)+x(\tau) \leqq 2\int_{\tilde{\tau}}^{\tau}(K+\varepsilon K)M\{y(\sigma)+x(\sigma)\}d\sigma+\Omega_1(\tau-\tilde{\tau},\varepsilon)\{\|\tilde{y}\|+\|\tilde{x}\|+1\}$$

Gronwall's Inequality と (6.4) によって, これから直ちに

$$\|y^1_\tau-y^2_\tau\|+\|x^1_\tau-x^2_\tau\| \leqq M\Omega_1(\tau-\tilde{\tau},\varepsilon)e^{2(K+\varepsilon K)M(\tau-\tilde{\tau})}\{\|\tilde{y}\|+\|\tilde{x}\|+1\}$$

for $\tau \geqq \tilde{\tau}$。これで補題6.1の初めの不等式は証明された。残りの不等式の証明も同様にしてできる。Ωとしては, M, l, m, K, h, sによってNを適当に選んで

$$\Omega(\rho,\varepsilon)=N\{w(\varepsilon)+\varepsilon K\}\rho e^{2(K+\varepsilon K)M\rho}$$

と置けばよい。　　　　　　　　　　　　　　　　証明終

補題6.2　　任意の constant vector $w\in R^n$に対して

(6.5)　　$\dot{y}(\tau)=Ay_\tau+w$　　　(但し $A=A(0,0)$)

は, $(-\infty,+\infty)$で定義された constant solution y_w を持つ。y_wは指数安定で, 従ってwに対して一意に定まる。wにy_wを対応させる写像Rは, R^nから$\mathcal{B}_n$への有界加法的作用素である。

証明　$\Gamma=\{0\}$と置き, Banach Space $\mathcal{B}_n\times\Gamma$上のFlow $\mathcal{X}$を次のように定義する。

$(\ell,\gamma)\in\mathcal{X} \Leftrightarrow$ 定義域$J(y)$ (for some $\tilde{\tau}\in R$, $J(y)=[\tilde{\tau},\infty)$, or $(\tilde{\tau},\infty)$, or $(-\infty,+\infty)$) で定義された(6.5)の解yが存在して, $\ell(\tau)=y_\tau$, $\gamma(\tau)=0$　for $\tau\in J(\ell,\gamma)\equiv J(y)$

このflow $\mathscr{X}$に対して，$\theta, \vartheta, T, L, \vartheta_1, \cdots \vartheta_5$を次のように定めれば，定理4.1の条件が満足される事を見るのは容易である。

$0<\theta$, $\frac{1}{\mu}kM|W|=\frac{1}{2}\vartheta$, $ke^{-\mu T}\leq\frac{1}{2}$, $0<L, \vartheta_1, \vartheta_4\leq k$, $\vartheta_2<1$,

$\vartheta_3, \vartheta_5\leq 1$を満すように定める。定理4.1により$p: P\times R\to\mathcal{B}_n$が存在して，$p$は$\mathscr{X}$のIntegral Manifoldを作る。(6.5)は自励系であるから，§4の最後で注意したようにpはτによらない。即ち，$y_\tau=p(0,\tau)$と置くと，y_τは$\tau\in(-\infty,+\infty)$で一定であって，かつ定理4.1(ii)によって(6.5)の解である。(6.5)の解は指数安定であるから$(-\infty,+\infty)$に於るconstant solutionは一意的に定まる。y_τに対しては系5.3により評価式

$$\|y_\tau\|\leq ke^{-\mu(\tau-\tilde{\tau})}\|y_{\tilde{\tau}}\|+\frac{1}{\mu}kM|W|$$

が成立する。$y_\tau=y_{\tilde{\tau}}=$ constantであるから，$\tilde{\tau}\to-\infty$とすれば，

$$\|y_\tau\|\leq\frac{1}{\mu}kM|W|$$

従って　$|R|\leq\frac{1}{\mu}kM$　　　　証明終

注意；$y_\tau=p(0,\tau)\equiv y_w$は$\tau\in(-\infty,+\infty)$で一定で，(6.5)の解であるから，実は$y_w(\theta)$は$\theta\in(-\infty,0]$で一定である。故に$\dot{y}(\tau)=0$で，$0=Ay_w+w\equiv ARw+w$が$\forall w\in R^n$に対して成立つ。

補題6.3

$U: R^m\to\mathcal{B}_m$を$(Ux)(\theta)=x$ for $\theta\in(-\infty,0]$によって定義する。Uは有界加法的作用素である。

証明　(h_4)と(h_5)により$|U|\leq b(1)=M$である事が直ちに導かれ

る。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　証明終

補題 6.4　　$\mathcal{B}_{m,0}=\{\varphi\in\mathcal{B}_m \mid \varphi(0)=0\}$ とする。$\Psi:\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_m \longrightarrow \mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_{m,0}\times R^m$ を $\Psi(y,x)=(y-R[BUx(0)+w],\ x-Ux(0),\ x(0))$ によって定義する。しからば，Ψ は逆写像を持ち次が成立つ。

(6.6) $\exists K_2>0,\ \|\Psi(0,0)\|\leqq K_2|w|,\ \|\Psi^{-1}(0,0,0)\|\leqq K_2|w|$

(6.7) $\exists K_3>0$

$$\|\Psi(y^1,x^1)-\Psi(y^2,x^2)\|\leqq K_3\|(y^1,x^1)-(y^2,x^2)\| \quad \forall(y^i,x^i)\in\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_m\ \ i=1,2$$

$$\|\Psi^{-1}(a^1,b^1,c^1)-\Psi^{-1}(a^2,b^2,c^2)\|\leqq K_3\|(a^1,b^1,c^1)-(a^2,b^2,c^2)\|$$

$$\forall(a^i,b^i,c^i)\in\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_{m,0}\times R^m,\quad i=1,2$$

証明　Ψ^{-1} は $(a,b,c)\in\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_{m,0}\times R^m$ に対して

$$\Psi^{-1}(a,b,c)=(a+R[BUc+w],\ b+Uc)$$

で定義される．(6.6)，(6.7) を確めるのは容易。　証明終

以後 $\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_{m,0}=C$，$R^m=\Gamma$ と書く．方程式(3.1)の解から，$X=C\times\Gamma$ 上の flow $\mathcal{X}_\varepsilon$ を次のように定義する。

$(c,\gamma)\in\mathcal{X}_\varepsilon \Leftrightarrow$ ある区間 $J(y,x)$ (for some $\tau\in R$, $J(y,x)=[\tau,\infty)$, or (τ,∞), or $(-\infty,+\infty)$) で定義された(3.1)の解 (y,x) が存在して，$(c(\tau),\gamma(\tau))=\Psi(y_\tau,x_\tau)$，$\tau\in J(c,\gamma)\equiv J(y,x)$

また方程式(6.1)から $\mathcal{X}_\varepsilon$ と同様にして，$X=C\times\Gamma$ 上の flow $\mathcal{X}$ を定義する。この二つの flow を比較すると補題6.1 から次

の補題を得る。

補題 6.5　ρ, ε 各々について単調非減少な関数 $\Omega'(\rho, \varepsilon)$

$$\Omega' : [0,\infty)\times[0,\infty) \longrightarrow [0,\infty),\ \Omega'(0,\varepsilon) = \Omega'(\rho, 0) = 0$$

が存在して次が成立する。

$$(c^i, \gamma^i) \in \mathcal{X}_\varepsilon,\ (c^{i+2}, \gamma^{i+2}) \in \mathcal{X}\quad i=1,2\ ;\ J(c^i, \gamma^i) = [\hat{\tau}, \infty)\quad i=1,2,3,4\ ;$$

$$(c^i, \gamma^i)(\hat{\tau}) = (c^{i+2}, \gamma^{i+2})(\hat{\tau}) = (\tilde{c}^i, \tilde{\gamma}^i)\quad i=1,2\ ;\ \tau \geqq \tilde{\tau}$$

$$\Rightarrow \| c^1(\tau) - c^3(\tau) \| + |\gamma^1(\tau) - \gamma^3(\tau)| \leq \Omega'(\tau - \hat{\tau}, \varepsilon)\,(1 + \|\tilde{c}^1\| + |\tilde{\gamma}^1|)$$

$$\| c^1(\tau) - c^2(\tau) - c^3(\tau) + c^4(\tau) \| + |\gamma^1(\tau) - \gamma^2(\tau) - \gamma^3(\tau) + \gamma^4(\tau)| \leq \Omega'(\tau - \hat{\tau}, \varepsilon)\{\|\tilde{c}^1 - \tilde{c}^2\| + |\tilde{\gamma}^1 - \tilde{\gamma}^2|\}$$

§7　定理3.1の証明 ―その2―

前節で $X = C\times\Gamma$ 上の flow $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}_\varepsilon$ を定義した。補題6.2と補題6.4は　$C\times\Gamma\times R$ の部分集合 $\{(0,\gamma,\tau) \mid \gamma\in\Gamma, \tau\in R\}$ は flow $\mathcal{X}$ の Integral Manifold である事を示している。この集合を S と置く時, S にある意味で近い $\mathcal{X}_\varepsilon$ の Integral Manifold S_ε が存在する事が証明される。我々は $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}_\varepsilon$ に対して定理4.1が成立つ事を証明する。

補題7.1　$\varphi \in \mathcal{B}_{m,0}$ に対して $T^\beta\varphi \in \mathcal{B}_{m,0}$ を $\theta\in[-\beta, 0]$ の時は $(T^\beta\varphi)(\theta) = 0$, $\theta\in(-\infty, -\beta]$ の時は $(T^\beta\varphi)(\theta) = \varphi(\beta+\theta)$ によって定義する。しからば $\beta(\delta)$ を仮定 (h_7) における関数とすると, $\beta \geqq \beta(\delta)$ の時　$\|T^\beta\varphi\| \leq M\delta\|\varphi\|$

証明　(h_4) と (h_7) から直ちに導かれる。

補題7.2　$\theta, \vartheta, L, T, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_7$ を次の不等式を満足するように定める。まず

$j(\delta) = \mathrm{Max}\{ k e^{-2\rho\beta(\delta)}, \frac{kKM^2}{\rho}(m e^{-\rho\beta(\delta)}+\delta)+M\delta \}$ と置く。

δを十分小さくして $K_3^2 j(\delta)<1$, $j(\delta)\leqq\frac{1}{2}$ となるようにする。

そして　$0<\theta, \vartheta, L<+\infty$, $T=2\beta(\delta)$, $\vartheta_1=K_3^2 j(\delta)$,

$0<\vartheta_2<1$, $\vartheta_3=\vartheta_5=1$, $\vartheta_4=K_3^2\,\mathrm{Max}\{k, kKM^2\frac{m}{\rho}+Mm\}$

しからば Flow $\mathcal{X}$ に対して定理4.1の条件2°, 3°(b), 4°と

5°　$G_{\vartheta_7}=\{(c,\gamma)\in X \mid \|c\|\leqq\vartheta_7(\theta|\gamma|+\vartheta)\}$ と置く。$(\tilde{c},\tilde{\gamma})\in G_1$, $\tilde{\tau}\in R$ ならば　$\tau\in[\tilde{\tau}+T, \tilde{\tau}+2T]$ に対して

$$(c(\tau;\tilde{c},\tilde{\gamma},\tilde{\tau}), \gamma(\tau;\tilde{c},\tilde{\gamma},\tilde{\tau}))\in G_{\vartheta_7}.$$

6°　$(\tilde{c}_1,\tilde{\gamma}_1)\in G_1$, $(\tilde{c}_2,\tilde{\gamma}_2)\in G_1$, $|\tilde{c}_1-\tilde{c}_2|\leqq L|\tilde{\gamma}_1-\tilde{\gamma}_2|$, $\tilde{\tau}\in R$, $\tau\in[\tilde{\tau}+T, \tilde{\tau}+2T]$

ならば　$\|c(\tau;\tilde{c}_1,\tilde{\gamma}_1,\tilde{\tau})-c(\tau;\tilde{c}_2,\tilde{\gamma}_2,\tilde{\tau})\|\leqq\frac{1}{2}L|\gamma(\tau;\tilde{c}_1,\tilde{\gamma}_1,\tilde{\tau})-\gamma(\tau;\tilde{c}_2,\tilde{\gamma}_2,\tilde{\tau})|$

が満足される。

証明　まず4°を示す。Flow $\mathcal{X}$の定義により $\tau\geqq\tilde{\tau}$ に対して $\gamma(\tau;\tilde{c},\tilde{\gamma},\tilde{\tau})=\tilde{\gamma}$ であるから $\vartheta_3=\vartheta_5=1$ と定めれば、$\mathcal{X}$に対して4°が成立つのは明きらかである。

2°を見る。$(c(\tau;\tilde{c}^i,\tilde{\gamma},\tilde{\tau}), \gamma(\tau;\tilde{c}^i,\tilde{\gamma},\tilde{\tau}))=(c^i(\tau), \gamma^i(\tau))$ $i=1,2$ と略記する。$\mathcal{X}$の定義により(6.1)の解(y^i, x^i)が存在して$(c^i(\tau), \gamma^i(\tau))=\Phi(y^i_\tau, x^i_\tau)$ $i=1,2$。(6.1)で $\dot{x}(\tau)=0$ であるから $\gamma^i(\tau)=x^i(\tau)=x^i(\tilde{\tau})=\tilde{\gamma}$ である。故に条件2°は $\|c^1(\tau)-c^2(\tau)\|\leqq\vartheta_1(\vartheta_4)\|\tilde{c}^1-\tilde{c}^2\|$ for $\tau\in[\tilde{\tau}+T, \tilde{\tau}+2T]$ (for $\tau\in[\tilde{\tau}, \tilde{\tau}+T]$) と表わされる。ところで、

(6.7)により $\|c^1(\tau)-c^2(\tau)\| = \|\Phi(y^1_\tau, x^1_\tau)-\Phi(y^2_\tau, x^2_\tau)\| \leqq K_3(\|y^1_\tau-y^2_\tau\|+\|x^1_\tau-x^2_\tau\|)$。

$y^1(\tau)-y^2(\tau)$, $x^1(\tau)-x^2(\tau)$ は方程式

$$\frac{d}{d\tau}(y^1(\tau)-y^2(\tau)) = A(y^1_\tau-y^2_\tau)+B(x^1_\tau-x^2_\tau)$$

$$\frac{d}{d\tau}(x^1(\tau)-x^2(\tau)) = 0$$

を満足する。故に系5.3により，$\tau \geqq \hat{\tau}$ に対して

$$(7.1)\quad \|y^1_\tau-y^2_\tau\| \leqq k e^{-\rho(\tau-\hat{\tau})}\|y^1_{\hat{\tau}}-y^2_{\hat{\tau}}\|+kM\int_{\hat{\tau}}^{\tau} e^{-\rho(\tau-\sigma)}|B(x^1_\sigma-x^2_\sigma)|d\sigma$$

さて，まず2°(a)の場合を見る。$x^1(\hat{\tau})=\hat{\xi}=x^2(\hat{\tau})$ であるから，$x^1_{\hat{\tau}}-x^2_{\hat{\tau}} \in \mathcal{B}_{m,0}$ で，$x^1_\sigma-x^2_\sigma = T^{\sigma-\hat{\tau}}(x^1_{\hat{\tau}}-x^2_{\hat{\tau}})$ $\sigma \geqq \hat{\tau}$ である。

$\sigma-\hat{\tau} \geqq \beta(\delta)$ であれば補題7.1により $\|x^1_\sigma-x^2_\sigma\| \leqq M\hat{\sigma}\|x^1_{\hat{\tau}}-x^2_{\hat{\tau}}\|$ である。また(h_4), (h_5')から $\sigma \geqq \hat{\tau}$ ならば $\|x^1_\sigma-x^2_\sigma\| \leqq Mm\|x^1_{\hat{\tau}}-x^2_{\hat{\tau}}\|$ である。それ故 $\tau \geqq \hat{\tau}+T=\hat{\tau}+2\beta(\delta)$ の時

$$(7.2)\quad \int_{\hat{\tau}}^{\tau} e^{-\rho(\tau-\sigma)}|B(x^1_\sigma-x^2_\sigma)|d\sigma \leqq K\left(\int_{\hat{\tau}}^{\hat{\tau}+\beta(\delta)}+\int_{\hat{\tau}+\beta(\delta)}^{\tau}\right)e^{-\rho(\tau-\sigma)}\|x^1_\sigma-x^2_\sigma\|d\sigma$$

$$\leqq \frac{1}{\rho}KM\{m e^{-\rho\beta(\delta)}+\hat{\sigma}\}\|x^1_{\hat{\tau}}-x^2_{\hat{\tau}}\|$$

故に(7.1)と(7.2)とから $\tau \geqq \hat{\tau}$ の時

$$\|y^1_\tau-y^2_\tau\|+\|x^1_\tau-x^2_\tau\| \leqq j(\delta)\{\|y^1_{\hat{\tau}}-y^2_{\hat{\tau}}\|+\|x^1_{\hat{\tau}}-x^2_{\hat{\tau}}\|\}$$

を得る。従って $\|c^1(\tau)-c^2(\tau)\| \leqq K_3 j(\delta)\{\|y^1_{\hat{\tau}}-y^2_{\hat{\tau}}\|+\|x^1_{\hat{\tau}}-x^2_{\hat{\tau}}\|\}=$

$=K_3 j(\delta)\{\Phi^{-1}(c^1(\hat{\tau}),\gamma^1(\hat{\tau}))-\Phi^{-1}(c^2(\hat{\tau}),\gamma^2(\hat{\tau}))\}=K_3^2 j(\delta)\{\|c^1(\hat{\tau})-c^2(\hat{\tau})\|+|\gamma^1(\hat{\tau})-\gamma^2(\hat{\tau})|$

$=\vartheta_1\|c^1(\hat{\tau})-c^2(\hat{\tau})\|$，2°(a)が示された。2°(b)も同様に示される。

3°(b)は4°と同様に容易に判る。

5°は次のように示される。$(c(\tau;\hat{c},\hat{\xi},\hat{\tau}), \gamma(\tau;\hat{c},\hat{\xi},\hat{\tau}))=(c(\tau),\gamma(\tau))$ と略記する。$\mathfrak{X}$ の定義から(6.1)の解(y, x)が存在して，

$$(c(\tau), \gamma(\tau)) = \Phi(y_\tau, x_\tau) = (y_\tau - R[B\bar{U}x(\hat{\tau}) + w],\ x_\tau - \bar{U}x(\hat{\tau}),\ x(\hat{\tau}))。$$

y'を $\dot{y}'(\tau) = Ay'_\tau + B\bar{U}x(\hat{\tau}) + w$ を満足する constant solution, 即ち $y'_\tau = R[B\bar{U}x(\hat{\tau}) + w]$ と置くと, $y_\tau - y'_\tau$は方程式

$$\tfrac{d}{d\tau}(y(\tau) - y'(\tau)) = A(y_\tau - y'_\tau) + B(x_\tau - \bar{U}x(\hat{\tau}))$$

を満足する。$2°$(a)の証明と同様の計算により $\tau \geq \hat{\tau} + T$ の時,

$$\|y_\tau - y'_\tau\| + \|x_\tau - \bar{U}x(\hat{\tau})\| \leq f(\delta)\{\|y_{\hat{\tau}} - y'_{\hat{\tau}}\| + \|x_{\hat{\tau}} - \bar{U}x(\hat{\tau})\|\}$$

である。$(c(\tau), \gamma(\tau))$ の定義により, この式から $\tau \geq \hat{\tau} + T$の時,

$$\|c(\tau)\| \leq f(\delta)\|c(\hat{\tau})\| \leq f(\delta)\{\theta|\gamma(\hat{\tau})| + \vartheta\} = \vartheta_7\{\theta|\gamma(\tau)| + \vartheta\}$$

である。従って $5°$ を得た。

$6°$も$5°$と似た方法で証明される。　　　　　　証明終

補題 7.3　Flow $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_\varepsilon$ の elements について補題6.5の条件と同じとする。$D(\varepsilon) = \Omega'(2T, \varepsilon)$と置けば $\tau \in [\hat{\tau}, \hat{\tau} + 2T]$の時

$$\|c^1(\tau) - c^3(\tau)\| + |\gamma^1(\tau) - \gamma^3(\tau)| \leq D(\varepsilon)(1 + \|\hat{c}^1\| + |\hat{\gamma}^1|)$$

$$\|c^1(\tau) - c^2(\tau) - c^3(\tau) + c^4(\tau)\| + |\gamma^1(\tau) - \gamma^2(\tau) - \gamma^3(\tau) + \gamma^4(\tau)| \leq D(\varepsilon)(\|\hat{c}^1 - \hat{c}^2\| + |\hat{\gamma}^1 - \hat{\gamma}^2|)$$

証明　補題6.5の直接の結果である。

さて, $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_\varepsilon$について Integral Manifolds が存在する事を証明する準備が整った。定理4.1の条件$1°$～$4°$が成立する事を見る。まず$\mathfrak{X}$については $\theta, \vartheta, L, T, \vartheta_1, \cdots, \vartheta_5$ を補題7.2 のように選べばよい事は直ちに判る。従って定理4.1が成立つ。

得られたIntegral Manifold $p:\Gamma\times R'\to C$は，θ, ϑが任意に選べる事によって$p=0$である。定理4.1の一意性の条件(i)により，$p':\Gamma\times R'\to C$，$\sup_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \tau\in R}} \frac{p'(\gamma,\tau)}{1+|\gamma|}<+\infty$，$p'$に対して定理4.1の条件(ii)を$p'$で置きかえた条件が成立つ，ならば$p'=p=0$である。

$\mathfrak{X}_\varepsilon$については次の補題を得る。

補題7.4　十分小さい$\varepsilon>0$に対して次のようなεの関数，$0<\underline{\theta}(\varepsilon)$, $\overline{\theta}(\varepsilon)$, $\underline{\vartheta}(\varepsilon)$, $\overline{\vartheta}(\varepsilon)$, $\underline{L}(\varepsilon)$, $\overline{L}(\varepsilon)$, $\vartheta_1(\varepsilon)$, $\vartheta_2(\varepsilon)$, $\vartheta_3(\varepsilon)$, $\vartheta_4(\varepsilon)$, $\vartheta_5(\varepsilon)$, $\vartheta_7(\varepsilon)<+\infty$が存在する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\underline{\theta}(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\underline{\vartheta}(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\underline{L}(\varepsilon)=0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\theta}(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\vartheta}(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{L}(\varepsilon)=+\infty$$

$$\vartheta_1<\vartheta_1(\varepsilon)<\vartheta_3(\varepsilon)<\vartheta_3=1,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\vartheta_1(\varepsilon)=\vartheta_1,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\vartheta_3(\varepsilon)=\vartheta_3=1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\vartheta_2(\varepsilon)=0,\quad \vartheta_4<\vartheta_4(\varepsilon),\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\vartheta_4(\varepsilon)=\vartheta_4,\quad 0<\vartheta_5(\varepsilon)<\vartheta_5=1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\vartheta_5(\varepsilon)=\vartheta_5=1,\quad \vartheta_7(\varepsilon)>\vartheta_7,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\vartheta_7(\varepsilon)=\vartheta_7\ ;$$

$$\underline{\theta}(\varepsilon)\le\theta\le\overline{\theta}(\varepsilon),\quad \underline{\vartheta}(\varepsilon)\le\vartheta\le\overline{\vartheta}(\varepsilon),\quad \underline{L}(\varepsilon)\le L\le\overline{L}(\varepsilon),\quad \vartheta_2(\varepsilon)\le\vartheta_2<1$$

を満す任意のθ, ϑ, L, ϑ_2と$\vartheta_1(\varepsilon)$, $\vartheta_3(\varepsilon)$, $\vartheta_4(\varepsilon)$, $\vartheta_5(\varepsilon)$, $\vartheta_7(\varepsilon)$, $T=2\beta(\delta)$について，Flow $\mathfrak{X}_\varepsilon$に対して定理4.1の条件2°, 3°, 4°と補題7.2の5°とが成立する。

証明　$\mathfrak{X}_\varepsilon$について定理4.1，2°, 3°, 4°と補題7.2の5°が成立つようにするには，ϑ, θ, L, T, $\vartheta_1,\cdots,\vartheta_7$をどのように定めたらよいかを見る。まず4°から調べる。θ, ϑを適当に決めて$G_1=\{(c,\gamma)\mid \|c\|\le\theta|\gamma|+\vartheta\}$と置く。$(\tilde{c},\tilde{\gamma})\in G_1$, $\tilde{\tau}\in R$に対して，

$(\tilde{c},\tilde{\gamma},\tilde{\tau})$ を通る $\mathcal{X}_\varepsilon$ の元を $x'=(c',\gamma')$, $\mathcal{X}$ の元を $x=(c,\gamma)$ と書く。
補題7.3により，$\tau\in[\tilde{\tau}+T,\tilde{\tau}+2T]$ の時

$$|+|\gamma'(\tau)| \geqq |+|\gamma(\tau)|-|\gamma(\tau)-\gamma'(\tau)|$$
$$\geqq \vartheta_3(1+|\tilde{\gamma}|)-D(\varepsilon)(1+\|\tilde{c}\|+|\tilde{\gamma}|)$$
$$\geqq [\vartheta_3-D(\varepsilon)(1+\max(\theta,\vartheta))](1+|\tilde{\gamma}|)$$

同様に，$\tau\in[\tilde{\tau},\tilde{\tau}+T]$である時

$$|+|\gamma'(\tau)| \geqq [\vartheta_5-D(\varepsilon)(1+\max(\theta,\vartheta))](1+|\tilde{\gamma}|)$$

今 ε の関数 $\alpha(\varepsilon)>0$ を適当に定めて

$$(7.3)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\alpha(\varepsilon)=0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha(\varepsilon)}{D(\varepsilon)}=+\infty$$

とする。$\vartheta_3(\varepsilon)=\vartheta_3-\alpha(\varepsilon)=1-\alpha(\varepsilon)$, $\vartheta_5(\varepsilon)=\vartheta_5-\alpha(\varepsilon)=1-\alpha(\varepsilon)$ と置く。
上の評価式から $\max(\theta,\vartheta)\leq\frac{\alpha(\varepsilon)}{D(\varepsilon)}-1$ ならば

$$|+|\gamma'(\tau)| \geqq \vartheta_3(\varepsilon)(1+|\tilde{\gamma}|) \qquad \tau\in[\tilde{\tau}+T,\tilde{\tau}+2T]$$
$$|+|\gamma'(\tau)| \geqq \vartheta_5(\varepsilon)(1+|\tilde{\gamma}|) \qquad \tau\in[\tilde{\tau},\tilde{\tau}+T]$$

を得る。我々は4°の評価で θ,ϑ に対して一つの上界 $\frac{\alpha(\varepsilon)}{D(\varepsilon)}-1<+\infty$ を得た事を注意しよう。
次に5°を調べる。Flow のNotationは4°の時と同じとする。
補題7.3により，$\tau\in[\tilde{\tau}+T,\tilde{\tau}+2T]$ の時

$$\|c'(\tau)-c(\tau)\|+\|\gamma'(\tau)-\gamma(\tau)\| \leq D(\varepsilon)\{(\theta+1)|\tilde{\gamma}|+\vartheta+1\}$$

従って $\mathcal{X}$ に対する5°と，$\mathcal{X}$ の定義により

$$\|c'(\tau)\|+|\gamma'(\tau)| \leq D(\varepsilon)\{(\theta+1)|\tilde{\gamma}|+\vartheta+1\}+\vartheta_7(\theta|\tilde{\gamma}|+\vartheta)+|\tilde{\gamma}|$$

上記に得た4°を使って

$$\|c'(\tau)\|+|\gamma'(\tau)|\le\{D(\varepsilon)(\theta+1)+\vartheta_7\theta+1\}\left[\frac{1}{\vartheta_3(\varepsilon)}\{1+|\gamma'(\tau)|\}-1\right]+D(\varepsilon)(\vartheta+1)+\vartheta_7\vartheta$$

$$\therefore\|c'(\tau)\|\leqq\left\{\frac{D(\varepsilon)(\theta+1)}{\vartheta_3(\varepsilon)}+\frac{\vartheta_7\theta}{\vartheta_3(\varepsilon)}+\frac{1}{\vartheta_3(\varepsilon)}-1\right\}|\gamma'(\tau)|$$

$$+\{D(\varepsilon)(\theta+1)+\vartheta_7\theta+1\}\left\{\frac{1}{\vartheta_3(\varepsilon)}-1\right\}+D(\varepsilon)(\vartheta+1)+\vartheta_7\vartheta$$

この最後の式の右辺が $\leqq\vartheta_7(\varepsilon)\{\theta|\gamma'(\tau)|+\vartheta\}$ となるように、$\vartheta_7(\varepsilon)<1$, θ, ϑ を取ればよい。まず θ に対しては

$$(7.4)\qquad \frac{D(\varepsilon)(\theta+1)}{\vartheta_3(\varepsilon)}+\frac{\vartheta_7\theta}{\vartheta_3(\varepsilon)}+\frac{1}{\vartheta_3(\varepsilon)}-1\le\vartheta_7(\varepsilon)\theta$$

$$\frac{D(\varepsilon)}{\vartheta_3(\varepsilon)}+\frac{1}{\vartheta_3(\varepsilon)}-1\le\left(\vartheta_7(\varepsilon)-\frac{D(\varepsilon)}{\vartheta_3(\varepsilon)}-\frac{\vartheta_7}{\vartheta_3(\varepsilon)}\right)\theta$$

この式から、$F(\varepsilon)=D(\varepsilon)\vartheta_3(\varepsilon)^{-1}+\vartheta_3(\varepsilon)^{-1}-1$, $\vartheta_7(\varepsilon)=D(\varepsilon)\vartheta_3(\varepsilon)^{-1}+\vartheta_7\vartheta_3(\varepsilon)^{-1}+P(\varepsilon)+Q(\varepsilon)$ $(P,Q>0)$、($\lim_{\varepsilon\to0}F(\varepsilon)P(\varepsilon)^{-1}=0$ となるように $P(\varepsilon)>0$ を適当に定める。$Q(\varepsilon)$ は ϑ に対する条件から、すぐ後で条件を定める。) と置けば θ が

$$\frac{F(\varepsilon)}{P(\varepsilon)}\le\theta$$

を満たせば(7.4)は満足される。ϑ に対しては

$$(7.5)\qquad \{D(\varepsilon)(\theta+1)+\vartheta_7\theta+1\}\left\{\frac{1}{\vartheta_3(\varepsilon)}-1\right\}+D(\varepsilon)(\vartheta+1)+\vartheta_7\vartheta\le\vartheta_7(\varepsilon)\vartheta$$

でなければならない。4°において $\max(\theta,\vartheta)\le\frac{\alpha(\varepsilon)}{D(\varepsilon)}-1$ としたから

$$\{D(\varepsilon)(\theta+1)+\vartheta_7\theta+1\}\left\{\frac{1}{\vartheta_3(\varepsilon)}-1\right\}\le\frac{1}{1-\alpha(\varepsilon)}\left\{\alpha(\varepsilon)^2+\vartheta_7\frac{\alpha(\varepsilon)^2}{D(\varepsilon)}+(-\vartheta_7+1)\alpha(\varepsilon)\right\}$$

である。$G(\varepsilon)=\frac{1}{1-\alpha(\varepsilon)}\{\alpha(\varepsilon)^2+\vartheta_7\alpha(\varepsilon)^2D(\varepsilon)^{-1}+(-\vartheta_7+1)\alpha(\varepsilon)\}+D(\varepsilon)$ と置く。条件(7.3)の他に $\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\alpha(\varepsilon)^2}{D(\varepsilon)}=0$ となるように $\alpha(\varepsilon)$ を取り直せば、$\lim_{\varepsilon\to0}G(\varepsilon)=0$。そして

$$(7.6)\qquad G(\varepsilon)\le\{\vartheta_7(\varepsilon)-D(\varepsilon)-\vartheta_7\}\vartheta$$

であれば(7.5)は満足される。そして(7.6)は

$$\frac{G(\varepsilon)}{Q(\varepsilon)} \leq \vartheta$$

であれば満たされる。Qは $\lim_{\varepsilon\to 0} Q(\varepsilon)=0$, $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{G(\varepsilon)}{Q(\varepsilon)}=0$ となるように取る。以上の評価から, $\underline{\theta}(\varepsilon)=F(\varepsilon)P(\varepsilon)^{-1}$, $\overline{\theta}(\varepsilon)=\alpha(\varepsilon)D(\varepsilon)^{-1}-1$, $\underline{\vartheta}(\varepsilon)=G(\varepsilon)Q(\varepsilon)^{-1}$, $\overline{\vartheta}(\varepsilon)=\alpha(\varepsilon)D(\varepsilon)^{-1}-1$, $\vartheta_3(\varepsilon)=\vartheta_5(\varepsilon)=1-\alpha(\varepsilon)$, $\vartheta_7(\varepsilon)=D(\varepsilon)\vartheta_3(\varepsilon)^{-1}+\vartheta_7\vartheta_3(\varepsilon)^{-1}+P(\varepsilon)+Q(\varepsilon)$ と定めれば4°, 5°が成立つ事がわかった。

2°, 3°の条件も4°, 5°と同様の議論をして得られる。結果だけを記しておく。$\alpha'(\varepsilon)=\mathrm{Min}\{D(\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}, (1-2\alpha(\varepsilon)-\vartheta_1)D(\varepsilon)^{-1}\}$ と置く。$D(\varepsilon)=L(4(1+L)^2)^{-1}$ の正の二根を $L_1(\varepsilon)<L_2(\varepsilon)$ とする。この時, $\vartheta_1(\varepsilon)=\vartheta_1+D(\varepsilon)\alpha'(\varepsilon)$, $\vartheta_4(\varepsilon)=\vartheta_4+D(\varepsilon)\alpha'(\varepsilon)$, $\vartheta_2(\varepsilon)=D(\varepsilon)(1+\alpha'(\varepsilon))$ $\underline{L}(\varepsilon)=L_1(\varepsilon)$, $\overline{L}(\varepsilon)=\mathrm{Min}(L_2(\varepsilon), \alpha'(\varepsilon), \frac{\alpha(\varepsilon)}{D(\varepsilon)}-1)$ と置けば, 2°, 3°が成立する。

証明終り

補題7.4と定理4.1によって次の定理を得た。

定理7.5　十分小さい $\varepsilon>0$ の関数 $0<\Theta_1(\varepsilon), \Theta_2(\varepsilon)<+\infty$, $\lim_{\varepsilon\to 0}\Theta_1(\varepsilon)=0$, $\lim_{\varepsilon\to 0}\Theta_2(\varepsilon)=+\infty$ が存在して次が成立する。

$$\mu(\varepsilon)=-(2T)^{-1}\log(1-\vartheta_2(\varepsilon)),\quad \nu(\varepsilon)=-T^{-1}\log\vartheta_1(\varepsilon)$$

$$K(\varepsilon)=\mathrm{Max}\left\{\frac{1+\vartheta_2(\varepsilon)}{1-\vartheta_2(\varepsilon)}, \frac{\vartheta_3(\varepsilon)}{\vartheta_1(\varepsilon)}, \frac{1}{\vartheta_1(\varepsilon)}, \frac{\vartheta_4(\varepsilon)}{\vartheta_1(\varepsilon)}\right\}$$

と置く。$p_\varepsilon:\Gamma\times R\to C$ が存在して次が成立つ。

(i) $\forall\gamma, \gamma_1, \gamma_2\in\Gamma$, $\forall\tau\in R$ に対して

$$\|p_\varepsilon(\gamma,\tau)\|\leq\Theta_1(\varepsilon)(|\gamma|+1),\quad \|p_\varepsilon(\gamma_1,\tau)-p_\varepsilon(\gamma_2,\tau)\|\leqq\underline{L}(\varepsilon)|\gamma_1-\gamma_2|$$

(ii) $\tilde{\gamma}\in\Gamma$, $\tilde{\tau}\in R$, $\tilde{c}=p_\varepsilon(\tilde{\gamma},\tilde{\tau})$に対して，$(c,\gamma)\in\mathcal{X}_\varepsilon$が存在して

$J(c,\gamma)=R$, $c(\tilde{\tau})=\tilde{c}$, $\gamma(\tilde{\tau})=\tilde{\gamma}$, $c(\tau)=p(\gamma(\tau),\tau)$ for $\tau\in R$

(iii) (c,γ), $(c',\gamma')\in\mathcal{X}_\varepsilon$, $J(c,\gamma)=J(c',\gamma')=R$, $c(\tau)=p_\varepsilon(\gamma(\tau),\tau)$

$c'(\tau)=p_\varepsilon(\gamma'(\tau),\tau)$ for $\tau\in R$ ならば

$|\gamma(\tau)-\gamma'(\tau)|\geqq K(\varepsilon)^{-1}e^{-\mu(\varepsilon)(\tau-\tilde{\tau})}|\gamma(\tilde{\tau})-\gamma'(\tilde{\tau})|$ for $\tau\geqq\tilde{\tau}$

(iv) $\|\tilde{c}\|\leqq\Theta_2(\varepsilon)(|\tilde{\gamma}|+1)$ $\tilde{\tau}\in R$ ならば，$\tau\geqq\tilde{\tau}$に対して

$\|c(\tau;\tilde{c},\tilde{\gamma},\tilde{\tau})-p_\varepsilon(\gamma(\tau;\tilde{c},\tilde{\gamma},\tilde{\tau}))\|\leqq K(\varepsilon)e^{\nu(\varepsilon)(\tau-\tilde{\tau})}\|\tilde{c}-p_\varepsilon(\tilde{\gamma},\tilde{\tau})\|$.

(v) $p':\Gamma\times R\longrightarrow C$

$$\sup_{\gamma\in\Gamma,\tau\in R}\frac{\|p'(\gamma,\tau)\|}{1+|\gamma|}\leq\Theta_2(\varepsilon)$$

p'に対して(ii)においてpをp'と書きかえた条件が成立するならば　$p'=p_\varepsilon$

証明　$\Theta_1(\varepsilon)=\mathrm{Max}(\theta(\varepsilon),\vartheta(\varepsilon))$, $\Theta_2(\varepsilon)=\mathrm{Min}(\bar{\theta}(\varepsilon),\bar{\vartheta}(\varepsilon))$と置けば．定理4.1と補題7.4とから導かれる。

定理7.5によって．我々は最初の目的である定理3.1を得る。

即ち，
$$q_\varepsilon(\gamma,\tau)=\Phi^{-1}(p_\varepsilon(\gamma,\tau),\gamma)$$
$$q_0(\gamma,\tau)=\Phi^{-1}(0,\gamma)$$

と置けば定理3.1が成立ち，q_εが方程式(3.1)のIntegral Manifoldである。§1の定義に従って書けば

$$S_\varepsilon=\{(\tau,y,x)\in R\times B_n\times B_m\mid(y,x)=q_\varepsilon(\gamma,\tau),\ \tau\in R,\ \gamma\in R^m\}$$

は方程式(3.1)の$m+1$次元Integral Manifoldである。

— 参考文献 —

[1] A. Halanay, J. Kurzweil : A theory of Invariant Manifolds for Flows; Rev. Roum. Math. Pures et Appl. Tome XIII N°8. P.1079-1087 1968

[2] J. Kurzweil ; Invariant Manifolds of a class of Linear Functional Differential Eqs; Ibid. Tome XIII N°8 P.1113-1120 1968

[3] T. Yoshizawa, Stability theory by Liapunov's second Method; the Mathematical Society of Japan 1966

[4] J. K. Hale, Dynamical Systems and Stability J. of Math. Analysis and Appl. 26. P.39-59 1969