数理解析研究所講究録
第87巻 1970年 49-60

平面における characteristic 0^+ の流れ

神戸大 理　浦　太郎

§1. Introduction.

Shair Ahmad : Dynamical systems of characteristics 0^+, to appear in Pacific Journal of Mathematics の紹介をする。

論文の意図は，characteristic 0^+ という大域的性質をもった，R^2 または S^2 の流れをできるだけ詳しく分類しようとするものである。Characteristic 0^+ の意味は後に述べる。

元来，われわれの力学系研究の最終目標は，何か妥当な isomorphism を定め，それによって決定される equivalence relation を法として，すべての力学系を完全に分類することである。Isomorphism を定めることにも大きな問題があるが [13]，それには相空間の homeomorphism が入ることは自然であるので，相空間は定まった位相空間と考

えて研究に着手するのは当然の出発点である。

Isomorphism は何であれ，R^1, S^1 の流れの分類は終局に近い所まで，できている。

これに反し，R^2, S^2, T^2 の流れは非常に難しく，研究結果は，われわれの最終目標から非常に遠い。

その結果，ある種の性質をとりあげて，その性質をもつ流れについて，分類を考えるのが一つの手順である。とりあげる性質がうまいものであれば，分類はきれいにいく。一方，その性質が面白いものでなければ，結果がきれいでも，興味はない。

そのような性質として，特異点がない [14]，平行化可能である，global な Poincaré center である [4]，等が考えられている。この論文では characteristic 0^+ という性質をとり上げたわけであるが，この性質は面白味をもつし，結果は完全ではないが，可成りのところまで達し，かつきれいであると思う。

注．R^2 ではすべての平行化可能な流れは互に isomorphic である。Global Poincaré centers は，[9] に述べられている，または Smale 一派の考える isomorphism に関しては互に isomophic であるが，もっと細かい isomophism にたいしては，さらに分類される，[R. McCann, unpublished]

§2. Notation. Status of the problem.

R, R^+, R^- で実数全体, 負でない実数全体, 正でない実数全体の集合を表わす.

π が X の上の流れ（または力学系）であるとは

X : 位相空間, $\pi : X \times R \to X$ の写像

1. Identity axiom : $\pi(x, 0) = x$
2. Homomorphism axiom : $\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t+s)$
3. Continuity axiom : π : continuous on $X \times R$

をみたすことをいう. X を phase-space（相空間）という. [7], [9].

$$\pi(x, R) = C(x), \quad \pi(x, R^+) = C^+(x), \quad \pi(x, R^-) = C^-(x)$$

と書き, x の orbit, + semi-orbit, − semi-orbit と呼ぶ. [6], [7], [9].

$$K(x) = \overline{C(x)}, \quad K^+(x) = \overline{C^+(x)}, \quad K^-(x) = \overline{C^-(x)}$$

と書き, x の orbit-closure, + semi-orbit closure, − semi-orbit closure と呼ぶ. [7], [10] ~ [12].

$$L^+(x) = \bigcap \{ \overline{\pi(x, [a, \infty))} \mid a \in R \}$$ [1)]

---

1) 一般に f が $X \to Y$ または, $X \to 2^Y$ なる写像であるとき, 同じ記号 f で, $f(M) = \{ f(x) \mid x \in M \}$ または $\bigcup_{x \in M} f(x)$ で定義される写像 $f : 2^X \to 2^Y$ を表わす.

を x の $+$ limit set または ω-limit set という。[Lefschetz], [13]. 以下 $L(x)$ 等については説明を省略する.

$\mathcal{V}(x)$ で点 $x \in X$ の近傍のフィルターを表わすものとする。

$$D^+(x) = \bigcap \{ \overline{C^+(V)} \mid V \in \mathcal{V}(x) \}$$

を x の $+$ prolongation という。[3], [11]。

$$J^+(x) = \bigcap \{ \overline{\pi(V, [a, \infty))} \mid V \in \mathcal{V}(x),\ a \in R \}$$

を x の $+$ prolongational limit set という。[2], [3], [6].

以下相空間は Hausdorff 空間であると仮定する。

$$\mathcal{E}(x) = \{ t \mid \pi(x, t) = x,\quad t \in R \}$$

と置く。$\forall x \in X$, $\mathcal{E}(x) \ni 0$ である. $\mathcal{E}(x) \neq \{0\}$ のとき, x は self-intersecting であるという. 二つの場合がある.

(1) $\mathcal{E}(x) = R \overset{d}{\Leftrightarrow} x$: singular (critical, rest etc.)

singular points 全体の集合を $\mathcal{S}$ と書く。

(2) $\mathcal{E}(x)$: discrete subgroup of $R \overset{d}{\Leftrightarrow} x$: periodic

periodic points 全体の集合を $\mathcal{P}$ と書く。

$\phi \neq M < X$ とする

M : $+$ invariant $\overset{d}{\Leftrightarrow} C^+(M) = M$ $(\Leftrightarrow C^+(M) < M)$

一般に

$x \in X \Rightarrow C^+(x)$: + invariant, しかもこれは x を含む最小の + invariant set である

$\Rightarrow C(x)$: ± invariant. - - - - - - -

$\Rightarrow K^+(x)$: + strongly invariant, - - - - - - -

$x \in S \cup P \Rightarrow C^+(x)$: ± strongly invariant

($\Leftarrow$ は真でない)。

$C^+(x)$: + strongly invariant $\Leftrightarrow C^+(x) \supset L^+(x)$

特に $L^+(x) = \phi$ (x : + receding という [9]) $\Rightarrow C^+(x)$: + strongly invariant.

(1) $X = R^2$ のときは、 $C^+(x) \cap L^+(x) \neq \phi \Leftrightarrow C^+(x) \supset L^+(x) \neq \phi \Leftrightarrow x \in P \cup S$. これを Poincaré-Bendixson の定理という。[4], [8],

(2) X : locally compact なとき, $X \cup \{\infty\}$ を X の Alexandroff compactification とすれば, $L^+(x) = \phi \Leftrightarrow \pi(x, t) \to \infty$ as $t \to \infty$ である.

$\phi \neq M \subset X$ のとき,

M : + L-stable $\overset{d}{\Leftrightarrow} \forall U \in \mathcal{V}(M), \exists V \in \mathcal{V}(M) \ni C^+(V) \subset U$

M : +D-stable $\overset{d}{\Leftrightarrow} D^+(M) = M$

と定義する.

M : +L-stable $\Rightarrow M$: + invariant

M : $+$D-stable $\Rightarrow$ $+$strongly invariant. [12]

<u>Proposition.</u> X : locally compact, M : compactならば

M : $+$L-stable $\Leftrightarrow$ M : $+$D-stable [11]

<u>Definition.</u> $x \in X$ のとき

x : characteristic 0^+ $\overset{d}{\Leftrightarrow}$ $D^+(x) = K^+(x)$

π : characteristic 0^+ $\overset{d}{\Leftrightarrow}$ $^\forall x \in X$, x : char. 0^+

$+-$両方に characteristic 0^+, 0^- のとき, characteristic 0 という.

証明は省略するが, 任意の有限, 超限順序数 α に対して, 位数 α の $+$ prolongation D^+_α を定義することができる.

x : characteristic α^+ $\overset{d}{\Leftrightarrow}$ $D^+_\alpha(x) = D^+_{\alpha+1}(x)$

と定義される. $K^+ = D^+_0$ と理解すれば, characteristic 0^+ はこの特別の場合である.

<u>Proposition</u>

π : characteristic 0^+

$\Leftrightarrow$ すべての $+$strongly invariant set は $+$D-stable.

かくて, R^2 における characteristic 0^+ の流れ, いいかえると, すべての$+$strongly ~~stable~~ invariant set は $+$D-stableであるような流れを, できるかぎり, くわしく分類するのが, われわれの目的である.

$\phi \neq M \subset X$ のとき

$A^+(M) = \{x \mid \phi \neq L^+(x) \subset M\}$ を region of + attraction of M という。 $A^+(M)$ は invariant である.

M: + attractor $\overset{d}{\Longleftrightarrow}$ $A^+(M) \in \mathcal{V}(M)$ $\Rightarrow$ $A^+(M)$ open

M: + attractor & + D(または L)-stable

$\overset{d}{\Longleftrightarrow}$ M: + asymptotically D (またはL)-stable

M: globally + asymptotically D (またはL) -stable

$\overset{d}{\Longleftrightarrow}$ $A^+(M) = X$ & M: + D(または L)-stable.

[6].

π: dispersive $\overset{d}{\Longleftrightarrow}$ $J(X) = \phi$

π: parallelizable $\overset{d}{\Longleftrightarrow}$ $\exists Y \ni X = Y \times R$,

$\pi((y,\tau),t) = (y, \tau+t)$

Proposition X: locally compact separable metric space とする.

π: parallelizable $\Longleftrightarrow$ π: dispersive [1]

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X, & D^+(x) = C^+(x) \\ \mathcal{S} \cup \mathcal{P} = \phi \end{cases}$$ [5].

注 前節でふれた Poincaré center, global Poincaré center また次節でのべる noeud (= node), foyer (= focus) 等については，常微分方程式の教化書をみられたい.

§3. Flows of characteristic O^+ in the plane.

平面上の characteristic O^+ の流れ π は，次の (1)〜(6) に分類される。

(1) $\mathcal{S} = \phi$. このとき π は parallelizable である。

(2) $\mathcal{S} = \{x_0\}$, $\mathcal{P} \neq \phi$. (注意 $\mathcal{P} \neq \phi \Rightarrow \mathcal{S} = \{x_0\}$).

このとき π は，さらに次の 1, 2 の二つに分類される。

1. $\{x_0\}$ は global Poincaré center である。(したがって，$\mathcal{P} \cup \{x_0\} = R^2$).

2. $\{x_0\}$ は non-global Poincaré center である。$N = \mathcal{P} \cup \mathcal{S}$ とおくと，N は simply connected continuum であって (したがって $N \neq R^2$)，globally + asymptotically stable である。(注意: N は compact であるから，stability に関して，D, L の区別はない。) また $x \notin N \Rightarrow L^+(x) = \partial N$, $L^-(x) = \phi$.

(3) $\mathcal{S} = \{x_0\}$, $\mathcal{P} = \phi$.

このとき，$\{x_0\}$ は globally + asymptotically stable (したがって，x_0 は noeud または foyer) である。

(4) $\mathcal{S}$ は bounded であるが singleton ではない。

このとき π は，次の性質 a, b をもつ。

a. $\mathcal{P} = \phi$.

b. $\mathcal{S}$ は simply connected continuum であって, globally + asymptotically stable である.

c. $x \notin \mathcal{S} \Rightarrow L^+(x)$ は $\partial\mathcal{S}$ に含まれる singleton である. また $L^-(x) = \phi$.

逆に $y \in \partial\mathcal{S} \Rightarrow \exists x \notin \mathcal{S} \ni L^+(x) = \{y\}$.

(5) $R^2 = \mathcal{S}$ (immobile flow).

(6) $\mathcal{S}$ は unbounded であって $\mathcal{S} \neq R^2$.

このとき π は, 次の性質 a～f をもつ.

a. $\mathcal{S}$ の connected components は高々可附番個であって, 各 component は simply connected, unbounded である.

b. $R^2 - \mathcal{S}$ の connected components も高々可附番個であって, 各 component は simply connected, unbounded である.

c. $\mathcal{S}$ およびその各 component は + asymptotically D-stable である. しかし $\mathcal{S}$ が connected な場合をのぞくと, $\mathcal{S}$ もそのどの component も globally + asymptotically D-stable ではない. $\mathcal{S}$ が connected な場合には, $\mathcal{S}$ が globally + asymptotically D-stable なことと, そうでないことと, いずれも起こりえる.

d. $R^2 - A^+(\mathcal{S})$ ($\neq \phi$ ならば) は parallelizable である．(したがって $J(R^2 - A^+(\mathcal{S})) = \phi$。)

e. (i) $A^+(\mathcal{S})$ は高々可附番個の components をもち，各 component は simply connected であって，丁度一つの $\mathcal{S}$ の component を含む．

(ii) $A^+(\mathcal{S})$ の各 component の境界は，高々可附番個の，$J(x) = \phi$ なるような orbit $C(x)$ で成り立つ．

(iii) $A^+(\mathcal{S})$ の各 component は R^2 に homeomorphic である．

f. $x \in A^+(\mathcal{S}) - \mathcal{S}$ に対して，$L^+(x)$ は singleton であって $\partial\mathcal{S}$ に含まれる．逆にすべての $y \in \partial S$ に対して $\exists x \in A^+(\mathcal{S}) - \mathcal{S} \ni L^+(x) = \{y\}$．

§4. Flows of characteristic O^+ in S^2.

S^2 の上の characteristic O^+ の流れは，次の二つの場合 (1), (2) にかぎる．

(1) $\mathcal{S} = S^2$ (immobile flow)

(2) $\mathcal{S} = \{x, y\}$, $\mathcal{P} = S^2 - \{x, y\}$ で x, y は共に Poincaré centers．

したがって characteristic O^+ なら characteristic O^-

したがって characteristic O でもある.

§6. Flows of characteristic O in R^2.

R^2の上の characteristic O の流れは, 次の三つの場合 (1) 〜 (3) にかぎる.

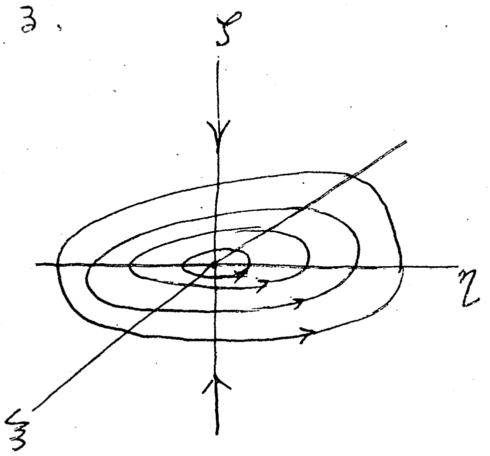
(1) $\mathcal{S} = \phi$, parallelizable

(2) $\mathcal{S} = R^2$ (immobile)

(3) $\mathcal{S} = \{x_0\}$, global Poincaré center.

§6. An example of a flow of characteristic O^+.

R^2, S^2 でない phase-space の上の流れでは, たとえ characteristic O^+ であっても, asymptotically stable でも Poincaré center でもないような特異点をもちうる.



$X = \xi\eta$-plane $\cup$ ζ-axis

$\mathcal{S} = \{(0,0,0)\}$

$\mathcal{P} = \xi\eta$-plane

この流れは characteristic O^+ をもつことが容易にたしかめられる.

REFERENCES

[1] H. Antosiewicz and J. Dugundji; Parallelizable flows and Liapunov's second method, Ann. of Math. 73 (1961) 543-555.

[2] J. Auslander; Generalized Recurrence in Dynamical Systems, Contr. to Diff. Equations 3 (1964) 65-74.

[3] J. Auslander and P. Seibert; Prolongations and stability in dynamical systems, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 14 (1964) 237-268.

[4] I. Bendixson; Sur les courbes définie par des équations différentielles, Acta Math. 24 (1901) 1-88.

[5] Nam P. Bhatia; Criteria for dispersive flows, Math. Nachr. 32 (1966) 89-93.

[6] N. P. Bhatia and G. P. Szegö; Dynamical Systems: Stability Theory and Applications, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[7] W. H. Gottschalk and G. A. Hedlund; Topological Dynamics, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. vol. 36, 1955.

[8] I. Kimura and T. Ura; Sur le courant extérieur à une région invariante; Théorème de Bendixson, Comment. Math. Univ. St. Paul. 8 (1960) 23-39.

[9] V. V. Nemytskii and V. V. Stepanov; Qualitative Theory of Differential Equations, Moscow, 1947-9; English translation, Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1960.

[10] P. Seibert and P. Tulley; On dynamical systems on the plane, Arch. Math. 18 (1967) 290-292.

[11] T. Ura; sur le courant extérieur à une région invariante; Prolongement d'une caractéristique et l'ordre de stabilité, Funkcial. Ekvac. 2 (1959) 143-200; nouv. édition 105-143.

[12] T. Ura; Sur le courant extérieur à une région invariante; Prolongement d'une caractérisique et l'ordre de stabilité, complément, Funkcial. Ekvac. 9 (1966) 171-179.

[13] T. Ura; Isomorphism and Local Caracterization of Local Dynamical Systems, Funkcial. Ekvac. 12 (1969) 99-122.

[14] R. McCann; Planar dynamical systems without critical points (to appear).