

Subharmonic Solutions to Weakly Nonlinear Duffing's Equation

京大 数解研 占部 実

1. まえがきと定理

Duffing の方程式'とはつき'の方程式'をいう:

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + \alpha \frac{dq}{d\tau} + \kappa^2 q (1 + \beta q^2) = P \cos \gamma \tau.$$

これは変数変換

$$\kappa \tau = t, \quad \frac{\kappa^2}{P} q = x, \quad \frac{\alpha}{\kappa} = \sigma, \quad \frac{\beta P^2}{\kappa^4} = \varepsilon, \quad \frac{\gamma}{\kappa} = \omega$$

を行つと, つき'のようになる:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \sigma \frac{dx}{dt} + x (1 + \varepsilon x^2) = \cos \omega t.$$

ここで, ωt を t で置きかえらると,

$$(E_0) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\sigma}{\omega} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{\omega^2} x (1 + \varepsilon x^2) = \frac{1}{\omega^2} \cos t$$

を得る. (E_0) の周期解で正の最小周期が $2p\pi$ であるも

のを, $1/p$ -次の subharmonic solution という. ただし, p は 1 より大きい正の整数である.

最近, 筆者はつぎの定理を得たので, ここでその証明を述べる.

定理 " $|\varepsilon|$, $\sigma (> 0)$ が十分小さいときは, $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $|x| \rightarrow \infty$ あるいは $|dx/dt| \rightarrow \infty$ となるものを除けば, $0 < \omega - 3 \ll 1$ のときのみ subharmonic solution が存在し, しかもその次数は $1/3$ のものに限られる.

$\sigma = 0$ のときは, generic な subharmonic solution に関する限り同じことが成り立つ.

$0 < \omega - 3 \ll 1$ のとき,

$$(1.1) \quad 1 - \left(\frac{3}{\omega}\right)^2 = \varepsilon \kappa, \quad \sigma = \frac{1}{3} \varepsilon \omega \sigma_1$$

とあけば, $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $|x| \rightarrow \infty$ あるいは $|dx/dt| \rightarrow \infty$ となるものを除けば, (E_0) の $1/3$ -次の subharmonic solutions は

$$(1.2) \quad x = x_i(t) = u_i \cos \frac{t}{3} + \frac{32}{9} \sigma_1 \sin \frac{t}{3} - \frac{1}{8} \cos t \\ + O(\varepsilon) + O(\sigma_1^2) \\ (i=1, 2),$$

および $x = x_i(t + 2\pi), x_i(t + 4\pi) \quad (i=1, 2)$ の
6個から成る。ただし

$$(1.3) \quad \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{8} + \sqrt{\frac{16}{3} \left(\kappa - \frac{21}{1024} \right)} \right], \\ u_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{16}{3} \left(\kappa - \frac{21}{1024} \right)} \right]. \end{cases}$$

$i=1$ に対応する解は, $\sigma > 0$ のとき, ε の正, 負に依
じて正または負に漸近安定で, $\sigma = 0$ のときは中立安定であ
り, $i=2$ に対応する解は不安定である。

なお, $\sigma > 0$ のときは,

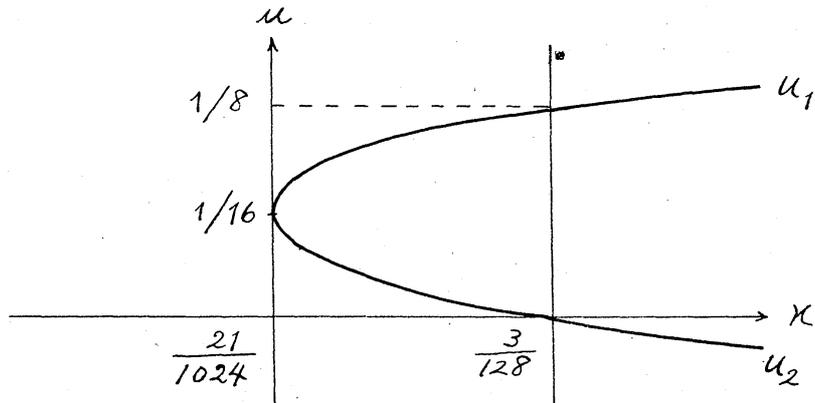
$$(1.4) \quad x_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{1}{3} (2n-1)t + b_n \sin \frac{1}{3} (2n-1)t \right] \quad (i=1, 2)$$

の形で, $\sigma = 0$ のときは,

$$(1.5) \quad x_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{1}{3} (2n-1)t \quad (i=1, 2)$$

の形である。

$u = u_i \quad (i=1, 2)$ のグラフは図示すると, つぎの通りであ
る:



上の定理の証明を行うには、まず1より大きい任意の正の整数 p をとり、 t を pt で置きかえて (E_0) をつぎのよりに書直す：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{p\sigma}{\omega} \frac{dx}{dt} + \frac{p^2}{\omega^2} x (1 + \varepsilon x^2) = \frac{p^2}{\omega^2} \cos pt.$$

ここで

$$(1.6) \quad \frac{p^2}{\omega^2} = \lambda, \quad \frac{p\sigma}{\omega} = \varepsilon\sigma_1$$

とおくと、つぎの方程式を得る：

$$(E) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\sigma_1 \frac{dx}{dt} + \lambda x (1 + \varepsilon x^2) = \lambda \cos pt.$$

明らかに、 (E_0) の $1/p$ -次の subharmonic solution は (E) の周期 2π の周期解に対応する。

つぎに、方程式 (E) において、

$$(1.7) \quad \lambda = \lambda_0 - \varepsilon \chi$$

とあき、 λ_0 のいろいろな値に於いて (E) の周期解の存在を調べる。このようにして、上の定理は証明された。

2. $\lambda_0 = p^2$ の場合

このとき、(E) の非摂動系は

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p^2 x = p^2 \cos pt$$

となる。この一般解は

$$x = A \cos pt + B \sin pt + \frac{p}{2} t \sin pt$$

で、これは周期的ではない。したがって、 $|\varepsilon|$ が十分小さいときは、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $|x| \rightarrow \infty$ あるいは $|dx/dt| \rightarrow \infty$ となるものを除けば、(E) には周期 2π の周期解は存在しない。したがって、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $|x| \rightarrow \infty$ あるいは $|dx/dt| \rightarrow \infty$ となるものを除けば、(E₀) には $1/p$ 次の sub-harmonic solution は存在しない。

3. λ_0 が整数の平方である場合

このとき、(E₀) はつぎの形である：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{\sigma_1}{p} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{p^2} (\lambda_0 - \varepsilon k) (x + \varepsilon x^3) = \frac{1}{p^2} (\lambda_0 - \varepsilon k) \cos t.$$

したがって、この非擾動系は、1階連立の形に書くと、つぎのようになる：

$$(3.1) \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\lambda_0}{p^2} x + \frac{\lambda_0}{p^2} \cos t.$$

この周期 $2p\pi$ の周期解はただ一つで、それはつぎの式で与えられる周期 2π のものだけである：

$$x = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - p^2} \cos t, \quad y = -\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - p^2} \sin t.$$

さて、上の周期解に関する (3.1) の第一変分方程式は

$$(3.2) \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\lambda_0}{p^2} x$$

である。(3.2) の基本行列で、 $t=0$ のとき単位行列 I となるものを $\Phi(t)$ とすると、

$$\det [\Phi^p(2\pi) - I] = 4 \sin^2 \pi \sqrt{\lambda_0} \neq 0$$

を得る。したがって、よく知られている擾動論の定理から、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $|x| \rightarrow \infty$ あるいは $|dx/dt| \rightarrow \infty$ となるものを除けば、周期 $2p\pi$ の (E_0) の周期解は、周期 2π の (E_0) の周期解以外には存在しない。いっかえすと、 $\varepsilon \rightarrow 0$

のとき $|x| \rightarrow \infty$ あるいは $|dx/dt| \rightarrow \infty$ となるものを除けば, (E_0) には $1/p$ -次の subharmonic solution は存在しない.

4. $\lambda_0 = 1$ の場合

このとき, (E) は 1 階連立の形に書くと, つぎのようになる:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + \cos pt + \varepsilon (\kappa x - x^3 - \sigma_1 y - \kappa \cos pt + \varepsilon \kappa x^3). \end{cases}$$

この非摂動系の一般解は

$$\begin{cases} x = A \cos t + B \sin t - \frac{1}{p^2-1} \cos pt, \\ y = -A \sin t + B \cos t + \frac{p}{p^2-1} \sin pt \end{cases}$$

であるから, 定数変化法により A, B を変数 u, v で置きかえ, つぎの変数変換を行う:

$$(4.2) \quad \begin{cases} x = u \cos t + v \sin t - \frac{1}{p^2-1} \cos pt, \\ \end{cases}$$

$$y = -u \sin t + v \cos t + \frac{p}{p^2-1} \sin pt.$$

(4.2) を (4.1) に代入すると、つぎの方程式を得る:

$$(4.3) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = -\varepsilon f(u, v, t; \varepsilon) \sin t, \\ \frac{dv}{dt} = \varepsilon f(u, v, t; \varepsilon) \cos t. \end{cases}$$

ただし

$$(4.4) \quad f(u, v, t; \varepsilon) = kx - x^3 - \sigma y - k \cos pt + \varepsilon k x^3$$

で、このとき x, y は (4.2) の右辺の対応する式を表わしている。

(4.2) に于り、(4.1) の周期 2π の周期解には、(4.3) の周期 2π の周期解が対応する。(4.3) の周期解を求めるため、(4.3) の平均系

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u, v, t; 0) \sin t \, dt, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u, v, t; 0) \cos t \, dt \end{cases}$$

を考える。(4.4) から、平均系はつぎのようになる:

$$(4.5) \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2} \left[\left\{ \frac{3}{4} u^2 v + \frac{3}{4} v^3 + \frac{3}{2(p^2-1)^2} v \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \delta_p \cdot \frac{3}{2(p^2-1)} uv \right\} - \kappa v - \tau_1 u \right], \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2} \left[\left\{ \frac{3}{4} u^3 + \frac{3}{4} uv^2 + \frac{3}{2(p^2-1)^2} u \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \delta_p \cdot \frac{3}{4(p^2-1)} (u^2 - v^2) \right\} - \kappa u + \tau_1 v \right]. \end{aligned} \right.$$

ただし

$$(4.6) \quad \delta_p = \begin{cases} 1 & \dots p=3 \text{ のとき,} \\ 0 & \dots p \neq 3 \text{ のとき.} \end{cases}$$

(A) $p \neq 3$ のとき

平均系の critical point はつきの方程式の解である

す:

$$(4.7) \left\{ \begin{aligned} v \left(\frac{3}{4} u^2 + \frac{3}{4} v^2 + \frac{3}{2(p^2-1)^2} - \kappa \right) - \tau_1 u &= 0, \\ u \left(\frac{3}{4} u^2 + \frac{3}{4} v^2 + \frac{3}{2(p^2-1)^2} - \kappa \right) + \tau_1 v &= 0. \end{aligned} \right.$$

70

これより次の式を得る：

$$(4.8) \quad \sigma_1 (u^2 + v^2) = 0.$$

$$(A_1) \quad \frac{\sigma_1 > 0 \text{ のとき}}{(4.8) \text{ より}}$$

$$(4.9) \quad u = v = 0.$$

これに関する (4.7) の左辺の Jacobian は

$$-\left[\sigma_1^2 + \left\{ \frac{3}{2(p^2-1)^2} - \kappa \right\}^2 \right] \neq 0.$$

したがって、 $|\varepsilon|$ が十分小さいときは、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $|u| \rightarrow \infty$ あるいは $|v| \rightarrow \infty$ となるものを除けば、(4.3) の周期 2π の周期解はただ一つで、それはつぎの形で与えられる：

$$(4.10) \quad u = \varepsilon \varphi(t, \varepsilon), \quad v = \varepsilon \psi(t, \varepsilon).$$

ここで、(1.6)、(1.7) により、117 の場合、(E₀) は

$$(4.11) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\varepsilon \sigma_1}{p} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{p^2} (1 - \varepsilon \kappa) (x + \varepsilon x^3) = \frac{1}{p^2} (1 - \varepsilon \kappa) \cos t$$

である。1階連立の形に書けば、

$$(4.12) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{p^2}(1-\varepsilon k)(x+\varepsilon x^3) - \frac{\varepsilon \pi}{p} y + \frac{1}{p^2}(1-\varepsilon k) \cos t \end{cases}$$

である。この非擾動系は

$$(4.13) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{p^2} x + \frac{1}{p^2} \cos t \end{cases}$$

で、これはつぎの周期 2π の周期解をもっている:

$$x = -\frac{1}{p^2-1} \cos t, \quad y = \frac{1}{p^2-1} \sin t.$$

この周期解に関する (4.13) の第一変分方程式は

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{p^2} x$$

で、この $t=0$ のとき単位行列 I となる基本行列を $\Phi(t)$ とすれば、

$$\det [\Phi(2\pi) - I] = 4 \sin^2 \frac{\pi}{p} \neq 0$$

を得る。したがって、(4.12) はつぎの形の周期 2π の周期解をもっている:

$$(4.14) \begin{cases} x = -\frac{1}{p^2-1} \cos t + \varepsilon \bar{x}(t, \varepsilon), \\ y = \frac{1}{p^2-1} \sin t + \varepsilon \bar{y}(t, \varepsilon). \end{cases}$$

すると、 t を pt で置きかえて、つぎの形の (E) の周期解を得る:

$$x = -\frac{1}{p^2-1} \cos pt + \varepsilon \bar{x}(pt, \varepsilon).$$

したがって、つぎの形の (4.1) の解を得る:

$$(4.15) \begin{cases} x = -\frac{1}{p^2-1} \cos pt + \varepsilon \bar{x}(pt, \varepsilon), \\ y = \frac{p}{p^2-1} \sin pt + \varepsilon \bar{y}(pt, \varepsilon). \end{cases}$$

これと (4.2) を比較すると、いまの場合、対応する u, v は (4.10) の形である。すると (4.10) の形の解の一意性から、はじめに得られた解は (4.15) の形の解であるか否かは存らざることになる。(4.15) の解は (4.14) に対応するもので、これは (E₀) の周期 2π の周期解に対応するもので

ある。したがって、これは *subharmonic solution* に対応するものではない。

以上のことから、いまの場合には、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $|x| \rightarrow \infty$ あるいは $|dx/dt| \rightarrow \infty$ となるものを除けば、*subharmonic solution* は存在しないことがわかる。

(A₂) $\tau_1 = 0$ のとき

(4.7)より、平均系の *critical point* に対しては、

$$(4.16) \quad \frac{3}{4} u^2 + \frac{3}{4} v^2 + \frac{3}{2(p^2-1)^2} - \kappa = 0$$

が、そうであるならば

$$(4.17) \quad u = v = 0$$

である。ところが、(4.16)をみたすものに対しては、(4.7)の左辺の *Jacobian* は0である。したがって、これに対しては、系の小さな *disturbance* に対して、(4.3)の周期解は存在するとは限らない。したがって、(4.16)をみたす *critical point* に対しては *generic* な *subharmonic solution* は得られない。(4.17)をみたすものに対しては、

$$(4.18) \quad \kappa = \frac{3}{2(p^2-1)^2}$$

である場合を除けば, (4.7)の左辺の Jacobian は 0 ではないから, (A₁) のときの議論がそのまま成り立つ. したがってこのときにも, subharmonic solution は得られる.

(4.18) が成り立つときには, Jacobian が 0 になるので, generic な subharmonic solution は存在しない.

以上のことから, 11 の場合には, 結局, $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $|x| \rightarrow \infty$ または $|dx/dt| \rightarrow \infty$ となるものを除けば, generic な subharmonic solution は存在しないことになる.

[注] 実際現象では, つねに小さな damping は存在するので, (A₂) は実際現象の解説には不要であろう.

(B) $p=3$ のとき

このときは, (1.6), (1.7) から, 明らかに

$$1 - \left(\frac{3}{\omega}\right)^2 = \varepsilon \kappa$$

である.

さて, 平均系 (4.5) の critical point に対する各種

式は、いまの場合、つぎのようになる：

$$(4.19) \begin{cases} v \left(\frac{3}{4} u^2 + \frac{3}{4} v^2 + \frac{3}{128} - \kappa \right) + \frac{3}{16} uv - \tau_1 u = 0, \\ u \left(\frac{3}{4} u^2 + \frac{3}{4} v^2 + \frac{3}{128} - \kappa \right) - \frac{3}{32} (u^2 - v^2) + \tau_1 v = 0. \end{cases}$$

(B₁) $\tau_1 = 0$ のとき

このとき、(4.19) の解はつぎのようになる：

$$(\alpha) \quad u = v = 0,$$

$$(\beta) \quad v = 0, \quad u = u_i \quad (i=1, 2),$$

$$(\gamma) \quad v = \pm \sqrt{3} u, \quad u = u_i \quad (i=3, 4).$$

ただし、 u_1, u_2 は(1.3) で与えられる値であり、 u_3, u_4 はつぎの式で与えられる値である：

$$(4.20) \begin{cases} u_3 = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{16} - \sqrt{\frac{4}{3} \left(\kappa - \frac{21}{1024} \right)} \right], \\ u_4 = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{16} + \sqrt{\frac{4}{3} \left(\kappa - \frac{21}{1024} \right)} \right]. \end{cases}$$

(α) に対応する (4.19) の左辺の Jacobian は

$$(4.21) \quad \kappa = 3/128$$

である場合を除けば, 0ではない. この Jacobian が 0 であるときは, (A_1) により, (α) に対応する (E) の周期解は (E_0) の subharmonic solution にはならない. このことから, (α) に対応しては generic な subharmonic solution は現われない.

(β) に対応する (4.19) の E 上の Jacobian は

$$(4.22) \quad \kappa = 21/1024, 3/128$$

である場合を除けば, 0ではない. この Jacobian が 0 であるときは, (4.3) は周期 2π の周期解をもち, したがって, (4.2) により, (E_0) は (1.2) の形の $1/3$ -次の subharmonic solution をもつ. なお, このとき, (4.5) の右辺の Jacobian matrix の固有値 λ に対応する方程式は, つぎのようになる:

$$\lambda^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} \cdot \frac{27}{64} \cdot u_i^2 \left(u_i - \frac{1}{16} \right) = 0 \quad (i=1, 2).$$

(1.3) から, $u_1 > 1/16$, $u_2 < 1/16$ であるから, $u = u_1$ に対しては λ はともに純虚数になり, これに対応する subharmonic solution は中立安定となり, $u =$

u_2 に対しては, λ は一つは正, 他は負となり, これに対応する *subharmonic solution* は不安定となる.

(γ) に対応する (4.19) の左辺の Jacobian は, (4.22) の場合を除くと, やはり 0 である. したがって, (4.22) の場合を除くと, (γ) に対応して (4.3) の周期 2π の周期解が得られ, したがって (E_0) の $1/3$ -次の *subharmonic solution* が得られる. ここで, (E_0) の形からわかるように, $x_i(t)$ は (E_0) の最小周期 6π の周期解であるから, $x_i(t+2\pi)$, $x_i(t+4\pi)$ も周期 6π の周期解になり, しかもこれらは互に異なる. すなわち, これらに対応して, 前のものとは異なる (4.3) の周期解 (u, v) が得られ, $\varepsilon \rightarrow 0$ のときのこれらの極限は (β) と異なる (4.5) の *critical point* となる. これらは (γ) に対応する.
 (γ) に対応する (4.3) の周期解はそれぞれ一意的に定まるから, 結局 (γ) に対応する (E_0) の *subharmonic solution* は $x_i(t+2\pi)$, $x_i(t+4\pi)$ に対応する.
 ことがわかる.

さて, (4.2), (4.4) から, $\tau_1 = 0$ のときは,

$$(4.23) \quad \begin{cases} f(u, v, -t; \varepsilon) = f(u, -v, t; \varepsilon), \\ f(u, v, t+\pi; \varepsilon) = -f(u, v, t; \varepsilon) \end{cases}$$

が成り立つ。したがって、 $(u(t), v(t))$ が (4.3) の周期
 2π の周期解ならば、 $(u(-t), -v(-t))$ も $(u(t+\pi),$
 $v(t+\pi))$ もまた (4.3) の周期 2π の周期解である。いま
 $(u(t), v(t))$ を (3) に対応する周期解であるとするとき、
 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき、

$$u(-t), u(t+\pi) \rightarrow u_0, \quad -v(-t), v(t+\pi) \rightarrow 0$$

であるから、(4.22) の場合を除けば、 $(u(t), v(t))$ の一
 意性から、

$$\begin{cases} u(-t) = u(t+\pi) = u(t), \\ -v(-t) = v(t+\pi) = v(t) \end{cases}$$

を得る。すると、 $u(t), v(t)$ の Fourier 級数は

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos 2nt, \quad v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin 2nt$$

の形になり、したがって、(4.2) により、 (β) に対応す
 る (E_0) の subharmonic solution $x_i(t)$ ($i=1, 2$) の
 Fourier 級数は (1.5) の形になる。

$$(B_2) \quad \underline{\tau_1 > 0 \text{ のとき}}$$

τ_1 は十分小さくする。すると、(4.19) の

解は, $\tau_1 \rightarrow 0$ のとき $|u| \rightarrow \infty$ あるいは $|v| \rightarrow \infty$ となるものを除けば, $\tau_1 = 0$ のときの解の近くにある.

まず, (α) の近くにある解を考えよう. (4.19) から明らか存するに, $u = v = 0$ は (4.19) の解である. しかもこの解に対しては, (4.19) の左辺の Jacobian は

$$-\left[\tau_1^2 + \left(\frac{\tau_1^2}{128} - k \right)^2 \right] \neq 0$$

である. ところがこの場合には, (A_1) に対応して $u = v = 0$ に対応する (E) の周期解は (E_0) の subharmonic solution にはならない. したがってこの場合には, (E_0) の subharmonic solution は現われない.

(β) の近くにある解を考えよう. このときは, (4.22) の場合を除くと, (4.19) の左辺の Jacobian は $\tau_1 = 0$ に対して 0 でないから, 十分小さな τ_1 に対して

$$\begin{cases} u = \hat{u}_i = u_i + \tau_1 \bar{u}_i(\tau_1), \\ v = \hat{v}_i = \tau_1 v_i(\tau_1) \end{cases} \quad (i=1, 2)$$

の形の (4.19) の解が一意的に定まる. 上の式を (4.19) に代入して計算すると, 上の式は実はつき"の形になることが容易にわかる:

$$(\beta') \quad \begin{cases} u = \hat{u}_i = u_i + \sigma_1^2 \bar{u}_i(\sigma_1), \\ v = \hat{v}_i = \frac{32}{9} \sigma_1 + \sigma_1^2 v_i(\sigma_1) \end{cases}$$

($i=1, 2$).

(β') に対しては, σ_1 が十分小さければ, (4.22) の場合を除けば, (4.19) の左辺の Jacobian は 0 でない. したがって (4.2) から (E_0) は (1.2) の形の $1/3$ -次の *subharmonic solution* をもつことがわかる. なおこのとき, (4.5) の右辺の Jacobian matrix の固有値 λ に対する方程式はつぎのようになる:

$$\lambda^2 + \varepsilon \sigma_1 \lambda + \frac{\varepsilon^2}{4} \left[\frac{27}{64} u_i^2 \left(u_i - \frac{1}{16} \right) + O(\sigma_1^2) \right] = 0$$

($i=1, 2$).

これより

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{2} \left[-\sigma_1 \pm \sqrt{-\frac{27}{64} u_i^2 \left(u_i - \frac{1}{16} \right) + O(\sigma_1^2)} \right]$$

($i=1, 2$).

$u = u_1$ に対しては $u_1 > 1/16$ であるから, λ の実部は $-\varepsilon$ と同符号になり, これに対応する *subharmonic solution* は ε の正, 負にしたがってそれぞれ正または負に漸近安定となり, $u = u_2$ に対しては $u_2 < 1/16$ であ

るから、 λ の一つは正、他は負となり、これに対応する sub-harmonic solution は不安定となる。

(γ) の近くにある (4.19) の解に関しては、(B₁) で述べたことがそのまま成り立つ。すなわち、(β') に対応して得られた (E_0) の subharmonic solution を $x_i(t)$ とするとき、 $x_i(t+2\pi)$, $x_i(t+4\pi)$ ($i=1, 2$) が (γ) の近くにある (4.19) の解に対応する (E_0) の subharmonic solution になる。

$\Gamma_1 \neq 0$ のときは、(4.23) の第1式は成り立っているが、第2式は成り立たない。したがって、(4.22) の場合を除けば、(β') に対応する (4.3) の周期解に対して

$$u(t+\pi) = u(t), \quad v(t+\pi) = v(t)$$

が成り立つ。すると、 $u(t)$, $v(t)$ の Fourier 級数は、ともに

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos 2nt + b_n \sin 2nt)$$

の形になる。したがって (4.2) により、(β') に対応する (E_0) の subharmonic solution $x_i(t)$ ($i=1, 2$) の Fourier 級数は (1.4) の形になる。

5. $\lambda_0 = q^2$ の場合 (q は正の整数で, $q \neq p, 1$)

このときは, (1.7) により, 方程式 (E) はつぎの形である:

$$(5.1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\sigma_1 \frac{dx}{dt} + (q^2 - \varepsilon\kappa)(x + \varepsilon x^3) = (q^2 - \varepsilon\kappa) \cos pt.$$

整数 p, q の最大公約数を r とし, $p = rp_1, q = rq_1$ とおく。すると, (5.1) は

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\sigma_1 \frac{dx}{dt} + r^2(q_1^2 - \varepsilon\kappa_1)(x + \varepsilon x^3) \\ = r^2(q_1^2 - \varepsilon\kappa_1) \cos p_1 r t \end{aligned}$$

と書かれるので, $rt = t_1$ とおくと,

$$(5.2) \quad \frac{d^2x}{dt_1^2} + \varepsilon\sigma_2 \frac{dx}{dt_1} + (q_1^2 - \varepsilon\kappa_1)(x + \varepsilon x^3) \\ = (q_1^2 - \varepsilon\kappa_1) \cos p_1 t_1$$

を得る。もちろん, このとき, $(p_1, q_1) = 1, p_1 \neq q_1$ である。

$$(5.3) \quad \sigma_2 = \sigma_1 / r, \quad \kappa_1 = \kappa / r^2$$

である。(5.1) の周期 2π の周期解には明らかに (5.2) の

周期 $2\pi\gamma$ の周期解が対応する。したがって (E_0) の $1/p$ -次の subharmonic solution を求めるには, (5.2) の周期 $2\pi\gamma$ の周期解を求めればよいことになる。

(5.2) を 1 階連立の形に書くと,

$$(5.4) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt_1} = y, \\ \frac{dy}{dt_1} = -q_1^2 x + q_1^2 \cos p_1 t_1 + \varepsilon (\kappa_1 x - q_1^2 x^3 - \sigma_2 y - \kappa_1 \cos p_1 t_1 + \varepsilon \kappa_1 x^3) \end{cases}$$

を得る。この非擾動系の一般解は

$$\begin{cases} x = A \cos q_1 t_1 + B \sin q_1 t_1 + \frac{q_1^2}{q_1^2 - p_1^2} \cos p_1 t_1, \\ y = -q_1 A \sin q_1 t_1 + q_1 B \cos q_1 t_1 - \frac{p_1 q_1^2}{q_1^2 - p_1^2} \sin p_1 t_1, \end{cases}$$

であるから, 第 4 節に於いて, つぎの変数変換を考える:

$$(5.5) \quad \begin{cases} x = u \cos q_1 t_1 + v \sin q_1 t_1 + \frac{q_1^2}{q_1^2 - p_1^2} \cos p_1 t_1, \\ y = -q_1 u \sin q_1 t_1 + q_1 v \cos q_1 t_1 - \frac{p_1 q_1^2}{q_1^2 - p_1^2} \sin p_1 t_1. \end{cases}$$

すると, (4.3) に対応して, 11 の場合 つぎの方程式を得

る:

$$(5.6) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt_1} = -\frac{\varepsilon}{\varrho_1} f(u, v, t_1; \varepsilon) \sin \varrho_1 t_1, \\ \frac{dv}{dt_1} = \frac{\varepsilon}{\varrho_1} f(u, v, t_1; \varepsilon) \cos \varrho_1 t_1. \end{cases}$$

ただし

$$(5.7) \quad f(u, v, t_1; \varepsilon) = \kappa_1 x - \varrho_1^2 x^3 - \sigma_2 y - \kappa_1 \cos p_1 t_1 + \varepsilon \kappa_1 x^3$$

で、このとき x, y は (5.5) の右辺の対応する式を表わしている。

(5.4) の周期 2π あるいは $2\pi r$ の周期解には、(5.6) の対応する周期解が対応する。ここで (5.6) の平均系をつくると、これは周期 2π についても、 $2\pi r$ についても同形で、つぎのようになる:

$$(5.8) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt_1} = -\frac{\varepsilon}{\varrho_1} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u, v, t_1; 0) \sin \varrho_1 t_1 dt_1, \\ \frac{dv}{dt_1} = \frac{\varepsilon}{\varrho_1} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u, v, t_1; 0) \cos \varrho_1 t_1 dt_1. \end{cases}$$

(5.7) から、(5.8) はつぎのようになる:

$$(5.9) \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dt_1} &= \frac{\varepsilon}{2q_1} \left[q_1^2 \left\{ \frac{3}{4} u^2 v + \frac{3}{4} v^3 + \frac{3}{2} \cdot \frac{q_1^4}{(q_1^2 - p_1^2)^2} v \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \delta_1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{q_1^2}{q_1^2 - p_1^2} \cdot uv \right\} - \kappa_1 v - \sigma_2 q_1 u \right], \\ \frac{dv}{dt_1} &= -\frac{\varepsilon}{2q_1} \left[q_1^2 \left\{ \frac{3}{4} u^3 + \frac{3}{4} uv^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{q_1^4}{(q_1^2 - p_1^2)^2} \cdot u \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \delta_1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{q_1^2}{q_1^2 - p_1^2} \cdot (u^2 - v^2) + \delta_2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{q_1^6}{(q_1^2 - p_1^2)^3} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \kappa_1 u + \sigma_2 q_1 v \right]. \end{aligned} \right.$$

ただし

$$\delta_1 = \begin{cases} 1 & \dots p_1=3, q_1=1 \text{ のとき,} \\ 0 & \dots \text{ 以外のとき,} \end{cases} \quad \delta_2 = \begin{cases} 1 & \dots p_1=1, q_1=3 \text{ のとき,} \\ 0 & \dots \text{ 以外のとき.} \end{cases}$$

(A) $\delta_1 = \delta_2 = 0$ のとき

このとき, 平均系の critical point は (5.9) の右

側式の解である:

$$(5.10) \left\{ \begin{aligned} v \left[q_1^2 \left(\frac{3}{4} u^2 + \frac{3}{4} v^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{q_1^4}{(q_1^2 - p_1^2)^2} \right) - \kappa_1 \right] \\ - \sigma_2 q_1 u = 0, \end{aligned} \right.$$

$$\left[u \left[q_1^2 \left(\frac{3}{4} u^2 + \frac{3}{4} v^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{q_1^4}{(q_1^2 - p_1^2)^2} \right) - \kappa_1 \right] + \sigma_2 q_1 v = 0. \right.$$

これより

$$(5.11) \quad \sigma_2 q_1 (u^2 + v^2) = 0$$

を得る.

$$(A_1) \quad \underline{\sigma_2 > 0 \text{ のとき}}$$

(5.11) より

$$(5.12) \quad u = v = 0.$$

これに関する (5.10) の左辺の Jacobian は

$$-\left[\sigma_2^2 q_1^2 + \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{q_1^6}{(q_1^2 - p_1^2)^2} - \kappa_1 \right)^2 \right] \neq 0.$$

したがって, $|\varepsilon|$ が十分小さいときは, $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $|u| \rightarrow \infty$ あるいは $|v| \rightarrow \infty$ とするものを除けば, (5.6) の周期 2π および $2\pi r$ の周期解はそれぞれただ一つで, それらはいずれもつぎの形で与えられる:

$$(5.13) \quad u = \varepsilon \varphi(t_1, \varepsilon), \quad v = \varepsilon \psi(t_1, \varepsilon).$$

ところが, (5.6) の周期 2π の周期解は明らかに周期 $2\pi\gamma$ ももつてゐるから, 周期解の一意性から, (5.6) の周期 $2\pi\gamma$ の周期解は, $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $|u| \rightarrow \infty$ あるいは $|v| \rightarrow \infty$ となるものを除けば, (5.13) の形の周期 2π の周期解以外には存在しない。このふうな解に対応する (5.2) の解は (5.5) から, つぎの形である:

$$(5.14) \quad x = \frac{q_1^2}{q_1^2 - p_1^2} \cos p_1 t_1 + \varepsilon \bar{x}(t_1, \varepsilon).$$

さて, $p_1 \neq 1$ のときは, $p_1 t_1 = t_2$ とおけば, (5.2) はつぎの形に書直される:

$$(5.15) \quad \frac{d^2 x}{dt_2^2} + \frac{\varepsilon \sigma_2}{p_1} \frac{dx}{dt_2} + \frac{1}{p_1^2} (q_1^2 - \varepsilon \kappa_1) (x + \varepsilon x^3) \\ = \frac{1}{p_1^2} (q_1^2 - \varepsilon \kappa_1) \cos t_2.$$

この方程式は (4.11) に似た形で, しかもいまの場合, $(p_1, q_1) = 1$, $p_1 \geq 2$ であるから, (4.11) のときと同様に, (5.15) はつぎの形の周期 2π の周期解をもつてゐることを証明される:

$$x = \frac{q_1^2}{q_1^2 - p_1^2} \cos t_2 + \varepsilon \hat{x}(t_2, \varepsilon).$$

すると, $t_2 = p_1 t$, とおくとよいため, (5.2)は

$$(5.16) \quad x = \frac{q_1^2}{q_1^2 - p_1^2} \cdot \cos p_1 t_1 + \varepsilon \hat{x}(p_1 t_1, \varepsilon)$$

の形の, 周期 2π の周期解をもつことがわかる. これは (5.14) の形であるから, (5.14) の形の周期解の一意性から, (5.14) の周期解は実は (5.16) の形であることがわかる.

$p_1 = 1$ のときは, (5.14) は明らかにまた (5.16) の形であるから, 結局, (5.12) に対応する (5.2) の周期 $2\pi r$ の周期解はつねに (5.16) の形に存在することがわかる. すると, $t_1 = r t$ であるから, (5.16) はつぎの形に存在:

$$\begin{aligned} x &= \frac{q_1^2}{q_1^2 - p_1^2} \cdot \cos p_1 r t + \varepsilon \hat{x}(p_1 r t, \varepsilon) \\ &= \frac{q_1^2}{q_1^2 - p_1^2} \cdot \cos p t + \varepsilon \hat{x}(p t, \varepsilon). \end{aligned}$$

これは (E_0) の周期 2π の周期解に対応するものである.

したがってこれは (E_0) の *subharmonic solution* ではない。
 11.

以上のことから, (5.12) に対処しては, (E_0) の *subharmonic solution* は現われなことがわかる。

(A₂) $\sigma_2 = 0$ のとき

このときは, (5.10) の解は

$$(5.17) \quad q_1^2 \left(\frac{3}{4} u^2 + \frac{3}{4} v^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{q_1^4}{(q_1^2 - p_1^2)^2} \right) - \kappa_1 = 0$$

が, 与えなければ

$$(5.18) \quad u = v = 0$$

である。ところが, (5.17) をみたすものに対しては, (5.10) の左辺の *Jacobian* は 0 である。したがって, これに対処しては *generic* な *subharmonic solution* は現われな。また (5.18) に対しては

$$(5.19) \quad \kappa_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{q_1^6}{(q_1^2 - p_1^2)^2}$$

である場合を除くと, *Jacobian* は 0 ではないが, このときは

(A₁)と同様になるで、(E₀)の subharmonic solution は再び現われない。

以上のことから、いまの場合には、subharmonic solution を generic なものに限定するならば、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $|x| \rightarrow \infty$ あるいは $|dx/dt| \rightarrow \infty$ とするものを除けば、subharmonic solution は現われないことがわかる。

$$(B) \quad \underline{\delta_1 = 1 \text{ のとき}} \quad (p_1 = 3, q_1 = 1)$$

このとき、(5.2)は、(E)で $\lambda_0 = 1, p = 3$ である場合と同じになる。したがって第4節(B)に於て

$$(5.20) \quad \kappa_1 = 21/1024, 3/128$$

である場合を除けば、(5.2)の周期 2π の周期解が6個存在する。いま、その任意の一つを $x = f(t_1)$ とすると、これに対しては

$$x = f(t_1) = f(rt) = f(pt/3)$$

となるから、これは(E₀)の $1/3$ -次の subharmonic solution に対応することになる。

いまの場合、(1.6), (1.7)に於て

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{p^2} (q^2 - \varepsilon k) = \frac{1}{p_1^2} (q_1^2 - \varepsilon k_1) = \frac{1}{3^2} (1 - \varepsilon k_1)$$

であるから,

$$1 - \left(\frac{3}{\omega}\right)^2 = \varepsilon k_1$$

となる。これは (1.1) の第1式と同形である。したがって、
いまの場合の結果は、(E) で $\lambda_0 = 1$, $p = 3$ であるとき
と、すべて同じになる。

(C) $\delta_2 = 1$ のとき ($p_1 = 1, q_1 = 3$)

この場合、(5.2) の周期 2π の任意の周期解を

$x = f(t_1)$ とすると、 $p_1 = 1$ であるから、

$$x = f(rt) = f(pt)$$

となり、これは (E₀) の周期 2π の周期解に対応する。したがって、この場合には、(E₀) の generic な subharmonic solution は現われてこない。

以上、第2~5節の結果から、第1節で述べた定理が得られる。