数理解析研究所講究録
第 89 巻 1970 年 1-5

ヒルベルト モジュラー群に関する
非解析的な保型函数

名大 理　浅井哲也

ヒルベルト モジュラー群の場合に Maaß [4] の考えたような種類の非複素解析的（実解析的）な保型函数を考察することは自然な発想であり，又そこに本質的な困難はない。しかも 非解析的な函数を扱う限りにおいては 基礎の代数体を 総実 と制限する必要は もはやない．例えば，相対二次拡大 K/F について，（無限素点の分岐に関する適度の条件の下に） K の（量指標付） zeta 函数に対応する非解析的保型函数を $\mathcal{H}_F$（= F に即した上半空間）の上に構成することができる，— $\mathcal{H}_K$ 上の ϑ- 函数を対応させるのは 寧ろ古典的であろうが —．　しかし ここでは 煩雑さだけが目立つであろう一般論を記述することからは さしあたり逃避して これらの議論において 基本的な役割を果す Eisenstein 級数の定義などについて 簡単に例示するに とどめたい。

* * *

F を r_1+2r_2 次の代数体, $\alpha\to\alpha^{(j)}$ $(1\leq j\leq r_1)$ を実の共役, $\alpha^{(j)}=\overline{\alpha^{(j+r_2)}}$ $(r_1+1\leq j\leq r_1+r_2)$ を虚の共役, $\mathfrak{O}$ を F の整数環, 且つ簡単のために 類数 1 と仮定する. F に即した上半空間とは

$$\underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$}\\ \mathbf{z}\;=\;(z_1,\;\cdots,\;z_{r_1+r_2})}}{\mathcal{H}_F} = H_1\times\cdots\times H_{r_1+r_2}\;;\quad H_j=\begin{cases}H_{\mathbf{c}} & \cdots\; 1\leq j\leq r_1\\ H_{\mathfrak{q}} & \cdots\; r_1+1\leq j\leq r_1+r_2\end{cases}$$

で与えられる直積空間である. ここで $H_{\mathbf{c}}=\{z=x+iy \mid x\in\mathbb{R},\ y>0\}$ は複素上半平面, $H_{\mathfrak{q}}=\left\{z=\begin{pmatrix}x&-y\\y&\bar{x}\end{pmatrix} \,\middle|\, x\in\mathbb{C},\ y>0\right\}$ *) は四元数上半空間である. $H_{\mathbf{c}}, H_{\mathfrak{q}}$ の各点 z の y-part を今後 $y(z)$ と記す. $\mathcal{H}_F$ には群 $G=SL(2,\mathbb{R})^{r_1}\times SL(2,\mathbb{C})^{r_2}$ が各成分毎の一次分数変換として自然に作用する. $\Gamma=SL(2,\mathfrak{O})$ は $\sigma=(\sigma^{(j)})$ によって G の離散部分群で $\mathcal{H}_F$ に不連続的に働く. さて Γ に関する非解析的 Eisenstein 級数は次のように定義される (cusp は一つ!):

(1) $$E^*(\mathbf{z},s)=\sum_{\sigma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} Ny(\sigma\langle\mathbf{z}\rangle)^s, \qquad \mathrm{Re}\, s>1.$$

但し $\Gamma_\infty=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\in\Gamma \,\middle|\, \gamma=0\right\}$, $\mathcal{H}_F\ni\mathbf{z}=(z_j)$ の y-part のノルムは $Ny(\mathbf{z})=\prod_{j=1}^{r_1+r_2} y(z_j)^{e_j}$ $\left(e_j=\begin{cases}1 & \cdots\; 1\leq j\leq r_1\\ 2 & \cdots\; 1+r_1\leq j\leq r_1+r_2\end{cases}\right)$ で定められるものとする.

《註: ↑ この記号は(4), etc. でも使用》

---

*) $H_{\mathfrak{q}} = SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$ については, 例えば Kubota[3] など.

更に $F \ni \mu, \nu$ $(\neq (0,0))$ に対して $\mathbf{y}(\mu,\nu;\mathbf{z}) = \left(y(\mu^{(j)},\nu^{(j)};z_j)\right)$,

$$y(\mu^{(j)},\nu^{(j)};z_j) = \frac{y_j}{|\mu^{(j)}x_j+\nu^{(j)}|^2+|\mu^{(j)}|^2 y_j^2} \quad (1 \leq j \leq r_1+r_2)$$ と記号を定めて,

$$(2) \qquad E(\mathbf{z}, s) = \sum_{\{\mu,\nu\}\neq\{0,0\}} N\mathbf{y}(\mu,\nu;\mathbf{z})^s, \quad Re\, s > 1$$

(和は non-associated pair について渡る)

と定義すれば $\mathbf{y}(\sigma\langle\mathbf{z}\rangle) = \mathbf{y}(\gamma,\delta;\mathbf{z})$ $\left(\sigma = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in \Gamma\right)$ だから

$$(3) \qquad E(\mathbf{z}, s) = \zeta_F(2s)\cdot E^*(\mathbf{z}, s)$$

; $\zeta_F(s) = \sum_{\mathfrak{O}|(\mu)\neq 0} |N\mu|^{-s}$ は F の Dedekind zeta 函数,

である. こうして定義された Eisenstein 級数 E^* (又は E) は $\mathcal{H}_F$ の不変微分作用素について同時固有な, Γ の保型函数であることが確められる. 他方 s の函数としては E は本質的に Epstein zeta だから, 結局 Eisenstein 級数は全 s-平面へ解析接続 ($s=1$ で一位の極) される. このことは次の基本的な表示式からも知られる:

$$(4) \quad E(\mathbf{z},s) = N\mathbf{y}(\mathbf{z})^s \zeta_F(2s) + N\mathbf{y}(\mathbf{z})^{1-s}\Delta^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\right)^{r_1}\left(\frac{2\pi\,\Gamma(2s-1)}{\Gamma(2s)}\right)^{r_2}\zeta_F(2s-1)$$
$$+ 2^{r_1+r_2}\Delta^{-s}\left(\frac{\pi^s}{\Gamma(s)}\right)^{r_1}\left(\frac{(2\pi)^{2s}}{\Gamma(2s)}\right)^{r_2}\sum_{\{\mu,\nu\}',\,\mu\nu\neq 0}\left|\frac{N\nu}{N\mu}\right|^{s-\frac{1}{2}} e^{2\pi i S(\mu\nu\omega\mathbf{x})}\prod_j K_{e_j(s-\frac{1}{2})}\left(2e_j\pi\left|(\mu\nu\omega)^{(j)}\right|y_j\right)y_j^{\frac{e_j}{2}},$$

; K は変形 Bessel 函数, (ω) は逆差積, $\Delta = |N\omega|^{-1}$, $S(\alpha\mathbf{x}) = \sum_j e_j Re(\alpha^{(j)}x_j)$,

$\{\mu,\nu\}'$ は $\mathfrak{O}\times\mathfrak{O} \ni (\mu,\nu) \sim (\varepsilon\mu, \varepsilon^{-1}\nu)$ (ε: 単数) による同値類.

(4) 式は E の解析接続と同時に函数等式：

$$G(2s)\,E(\mathbf{z},s) = G(2(1-s))\,E(\mathbf{z},1-s)$$
$$;\quad G(s) = \Delta^{\frac{s}{2}}\left(\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right)\right)^{r_1}\left((2\pi)^{-s}\Gamma(s)\right)^{r_2}$$

をも与えていることに注意しておく。更に (4) 式は保型函数 $E(\mathbf{z},s)$ の（非解析的な）Fourier展開と見做せる。実際 一般に $\mathcal{H}_F$ 上の Maaß 型の保型函数が "平行移動" $\mathbf{z} = (z_j) \longrightarrow (z_j + \alpha^{(j)})$, $\alpha \in \mathfrak{a}$ (ideal) で不変であるならば

$$e(\beta,\mathbf{z}) = e^{2\pi i S(\beta \mathbf{x})}\prod_j K_{s_j}\left(2e_j\pi|\beta^{(j)}|y_j\right)y_j^{\frac{e_j}{2}},\quad \beta \in \mathfrak{a}^*$$

を base とする Fourier 級数によって表示することができる。（複素解析的保型函数(形式)における q-展開に相当する基本的な性質である。又 $e(\beta,\mathbf{z})$ 自身が $\mathcal{H}_F$ の不変微分作用素の同時固有函数であることにも注目！）

Eisenstein 級数の一般論としては ここで略述した特殊な例のみでは勿論不充分で，"量指標"を付けたものとか，(2) の和において μ, ν に適当な合同条件を加えたもの を扱う必要があるし，Mellin 変換による Dirichlet 級数との対応についても記すべきであるが 今は省かせて頂く。

* * *

ところで $E(\mathbf{z},s)$ の極 $s=1$ の状態には —— $F=\mathbb{Q}$ の時,

Kronecker 極限公式として著名であるが故に(!?)——特別の興味がある．一般の代数体の場合にも (4)式から極限公式の具体的な形を求めることができて $\log|\eta(z)|$ に類似の函数を得る．このことを含めて，本稿全般について詳わしくは [1] を合わせ眺めて頂ければ幸いである．

尚この原稿〆切日現在未着ながら近刊の Jacquet & Langlands [2] には表題に関して更に一般的な立場から研究が成されているということである．Weil [5] にもその一端が触れられている．

〜文献〜

[1] Asai: On a certain function analogous to $\log|\eta(z)|$, Nagoya J. vol 40 に出る予定．

[2] Jacquet & Langlands: Automorphic forms on GL(2), Springer's lec. note vol 114 (1970).

[3] Kubota: On automorphic functions and the reciprocity law in a number field, Lectures in Math. 2, 京大．

[4] Maaß: Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen ···, Math. Ann. 121 (1949).

[5] Weil: Zeta functions and Mellin transforms, Algebraic Geometry at the Bombay Colloq. 1968.