数理解析研究所講究録
第 89 巻 1970 年 51-65

討論会記録 I

アーベル多様体の整数論に関連した主な文献

名大 理　山内 正敏

アーベル多様体の整数論について，大別して，アーベル多様体そのものの整数論，アーベル多様体の moduli の整数論，に分けてみると，前者としては，zeta 函数や自己準同型環を決める事。後者としては，アーベル多様体の family の moduli に附随した保型函数，その特殊値から生ずる拡大体，保型函数体のモデルやそのヤコビ多様体を調べる事．等が主な問題になると思われる。それらの最近の主な問題，結果等を大まかに述べて，関連文献を挙げる。(便宜上 4つの項目に分けた。) 文献は"アーベル多様体"にこだわらず関係あると思われるものも挙げたが，surface, variety の zeta 函数等については省略した。又，比較的古典的な文献（楕円函数の虚数乗法等）についても省いたものが多い。それらについては [98] の巻末に詳しい。最後にこの分野に関する標準的なテキストになると思われるものを挙げた。

1. Tate-Šafarevič 群と Birch, Swinnerton-Dyer, Tate の予想.

Cassels の一連の論文[4, (I)〜(VIII)]は数多くの問題を提起している。E を代数体 k 上定義された1次元アーベル多様体，Ш をその Tate-Šafarevič 群(即ち, locally trivial な principal homogenous spaces)とすると，Cassels [4, (IV)]は，Selmer 予想にかんがみ，Ш の上に歪対称な pairing が存在することを示した。従って，Ш の位数が有限なら平方数である。高次元のアーベル多様体については Tate [25] が拡張。基礎体が代数体の時，Ш の位数が有限になるか，というのは大きな問題であり，1つの場合も check されていないが，これを支持する現象はいろいろある。Birch, Swinnerton-Dyer は，k = 有理数体の時，E の L-函数の $s=1$ での値($s=1$ まで解析接続を仮定)を多くの楕円曲線について実験的に計算して $s=1$ での $L(s)$ の零点の位数が E の有理点のなす群の rank に等しいという第1の予想，更に Tate も加わって一般次元のアーベル多様体 A の L-函数の $s=1$ での挙動が，A や，その dual の有理点のなす群の torsion part, free part の rank，Tate-Šafarevič 群の位数などでかけるだろうという第2の予想をたてている。(従って Ш の位数は，有限であることが期待される。)又[2]では，$y^2 = X^3 - DX$ について，$L(1)$ を有限の形にかき表わして，線型代数群の

玉河数に相当するものがあるはずだと注意している。〔cf. 15, 16〕。M. Artin, Tate は〔28〕で有限体上の代数曲面に対して，その zeta 函数の主要部（= 2 次元部分）の $s=1$ の値についても，Neron-Severi group の rank, Brauer group などで予想をたてている。Tate は上の事から更に予想を広げ，代数体 k 上の alg. variety V^n の zeta 函数の i-次元部分 $L_i(s)$ $(0 \leqq i \leqq 2n)$ の $i=2r$ に対して，$s=r+1$ での極の位数が余次元 r の algebraic cycles の rank に等しいだろうとしている。特に V を虚数乗法をもたない楕円曲線 E の多重直積とした時，E mod p の Frobenius 準同型の固有値の偏角に関する Sato-Tate 予想を導いた。又，標数一般の体の上の proj. alg. variety の l-adic étale cohomology 群に関して，classical な場合の Hodge の予想と類似した予想をたてている〔cf. 14〕。

Milne は有限体上の 1 変数代数函数体 K 上のアーベル多様体 A が，K の常数体上で定義されるとき，$Ш(A,K) \simeq Ext^1(J,A)$ (J: A のヤコビ多様体）を示し，Oda〔12〕の結果を使って，Ш が有限群であり，その位数が Birch, Swinnerton-Dyer 予想を満している事を示した。Shioda は，複素数体上の 1 変数代数函数体上のアーベル多様体で有理点のなす群の rank が 0 のものを構成し，Ш が複素トーラスの等分点の群になって

いる事を示した[19]。 又, Mazur[29]は, 代数体上のアーベル多様体で基礎体を Γ-拡大した時に, 有理点の群が有限生成になるかどうか調べている。

アーベル多様体の *principal homogenous space* については、基礎体が代数函数体の時は Ogg.[13], Šafarevič[17], 局所体の時は, Tate[24]に詳しい結果がある。又, 楕円曲線と, そのzeta函数については Cassels[86]が詳しい。

2. Tate 加群, 自己準同型環.

A, B が素体上有限生成な体 k 上のアーベル多様体とすると Tate[44]は自然な写像: $Hom_k(A, B)\otimes\mathbb{Z}_\ell \to Hom_G(T_\ell(A), T_\ell(B))$ ($G = Gal(\bar{k}/k)$, T_ℓ: Tate 加群)が双射である事を k=有限体の時これを証明し, これを用いて, k-単純なアーベル多様体の自己準同型の体の構造を決めた。Serre は k=代数体(少し条件をつけて) $A = B$=楕円曲線, 又は A, B 1次元で j 不変量が整数でない時上の双射性を示した[38], [39].
Honda は有限体 k 上の k-単純なアーベル多様体の *isogeny classes* と Weil q-数が1対1に対応する事を証明し[32], 有限体上のアーベル多様体の *up to isogeny* の分類は完成した。kが代数体の時は Serre が楕円曲線について, 虚数乗法をもたない時, $G(\bar{k}/k)$ の $Aut(V_\ell)$, ($V_\ell = T_\ell\otimes\mathbb{Q}_\ell$)

に於ける像の Lie 環が $End(V_\ell)$ と一致する事を示し，$V_\ell(A) \simeq V_\ell(A')$，（ℓ変量キ整数）ならば，A と A′ は k-isogenous を証明し，V_ℓ が isogeny 類を特徴づけるものとなった。[38][39][41]．

有限体上のアーベル多様体について，自己準同型環をきっちり決める事，同型類を決める事などが，問題として残されている。Deuring [31] の拡張は難しい問題だが，Shimura は総実な代数体の整数環 $\mathfrak{O}$，$\mathfrak{O} \subset End(A)$ の時の同型類について調べている。又．Waterhouse [46] もこれについて考察している。

代数体上の1次元アーベル多様体 A について Ogg [34] は A が good reduction をもつかどうかを，有限位数の点の不分岐性で判定を与えた。Serre-Tate [42] はこれを高次元の場合に拡張し，A が素点 v で good reduction をもつ事と $T_\ell(A)$ が v で不分岐であることは同値である事を示し，C.M. 型のアーベル多様体は適当に体を拡大するときずがなくなることを示した。

3．保型函数．

Shimura は [70] で総実な代数体の上の総虚な2次拡大体上の類体は保型函数の特殊値で生成されることを示し，古典

的な虚数乗法の一般化に成功した。4元数環の単数群Γで，canonicalに上半平面Hに作用するものを考え，$\Gamma\backslash H$をmoduliのvarietyとするアーベル多様体のfamilyが無数にあることを使って出すのである。基本的なideaは［64］にある。類体がアーベル多様体のmoduliの体として出てくるのではないことは注目に値する。$\Gamma\backslash H$をmoduliのvarietyとする，あるstructureのfamilyが，アーベル多様体以外に存在することが想像される。又この論文で，canonical modelのzeta函数が4元数環のヘッケ作用素で定義して，できるDirichlet級数でかけ，函数等式を満す［65］. 従って，Hasse予想は正しい。［cf. 63］. 続いて［71］では，modelがvarietyの時の考察がされている。又単数群のlevelを増やしていって出来る列に対応して出来るvarietiesの，coveringの列を考え，基礎になるvarietyの固定した点にcovering mapで落ちてくる点全てを定義体に添加してできる無限次のガロワ拡大体について，そのガロワ群がある種の局所表現をもっている事を示している。そこでのフロベニウス準同型の固有値に関するRiemann-Weil予想を証明しているが，この幾何学的な意味付けはまだわかっていない。同時に，この拡大体について，ArtinのL-函数流にzeta函数を定義して，その函数等式を問うている［72］。

最近，Shimura によって，実２次体上の ray class field が保型函数体のヤコビ多様体の等分点で生成される場合があることがあげられている［78］。

一般に保型函数で一意化される代数曲線のヤコビ多様体の等分点の生成する拡大体は非アーベルな体になるが，ここでの分解法則がヘッケ作用素の固有値で記述されることが，具体的な modular 群で証明される［76, 49］が一般論（ガロワ群をきめることも）は完成していない。これに関連して，上の型のヤコビ多様体を単純成分に分解する問題は［48］［59］［60］。代数体ではなく，函数体の場合については，Ihara はある種の modular 群 Γ について，Selberg 流に定義した，zeta 函数を跡公式を用いて，書ききり，それが有限体上の１変数代数函数体 K の合同 zeta 函数とほぼ一致することに注目して，Γ の素因子と，K の素因子との間に対応づけがあるだろうと予想し，従って，K と，その上の拡大体との間の相互律が Γ の部分群達で記述できるだろうと述べ，特別の場合にこれを解いて，非アーベルな類体論を構成している。［50 ～ 54］

4．modular 群 $\Gamma_0(N)$ に関する Weil の予想

Weil は［83］で modular 形式を対応する Dirichlet

級数の函数等式によって，characterize した。そこで，勝手な有理数体上の導手 N の楕円曲線 E の L-函数に対応する form は $\Gamma_0(N)$ の重さ 2 の尖点形式になるだろうと予想した。即ち $\Gamma_0(N)$ に附随したヤコビ多様体の単純因子に，isogenous になるだろうというのである。Honda [89] は，この予想に関して，詳しく論説している。そこでは formal group の観点からも述べてある。E の群法則を，原点で整級数に展開して得られる formal group と，E の L-函数から得られる formal group が，保型函数を使って変換できるだろうというのである。 Ogg [82] は，E_1，E_2，について，この予想を仮定すると，$E_1 \times E_2$ の zeta 函数についての Tate の予想（前述）を check している。

より一般の体（A-field）についての同様の考察がされている．Weil [84] [85]。

楕円曲線の導手については Ogg [34] [80] [81] などに説明されている。

1. のための文献.

1. B.J. Birch, Conjectures concerning elliptic curves, Proc. Symp. in Pure Math.,VIII (1965), 106-112.
2. _____, and H.P.F. Swinnerton-Dyer, Notes on elliptic curves, (I),(II). (I); J. Reine Angew. Math.,212(1963), 7-25. (II); ibid. 218(1965), 79-108.
3. _____, and N.M. Stephens, The parity of the rank of the Mordell-Weil group, Topology 5(1966), 295-299.
4. J.W.S. Cassels, Arithmetic on curves of genus 1,(I)～(VIII). (I); J. Reine Angew. Math.,202(1959), 52-99. (II); ibid. 203 (1960), 174-208. (III); Proc. London Math. Soc.,12(1962), 259-296. (IV); J. Reine Angew. Math.,211(1962), 95-112. (V); Jour. London Math. Soc.,38(1963), 244-248. (VI); J. Reine Angew. Math.,214(1964), 65-70. (VII); ibid. 216(1964), 150-158. (VIII); ibid. 217(1965), 180-199.
5. _____, Arithmetic on elliptic curves, Proc. Intern. Congress Math. Stockholm (1962), 234-246.
6. _____, Arithmetic on abelian varieties especially of dimension 1, Woods Hole Summer Institute on Algebraic Geometry, (1964).
7. S. Lang and J. Tate, Principal homogenous space over abelian varieties, Amer. J. of Math.,80(1958), 659-684.
8. J.S. Milne, Extensions of abelian varieties defined over a finite field, Inventiones Math.,5(1968), 63-84.
9. _____, The Tate-Šafarevič group of a constant abelian variety, ibid. 6(1968), 91-105.
10. _____, The conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer for constant abelian varieties over function fields, thesis 1967.
11. A. Néron, Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux, Publ. Math. I.H.E.S.,Paris 21(1964).
12. T. Oda, The first de Rham cohomology group and Dieudonné modules, Ann. Scien. Ec. Norm. Sup.,(4),2(1969), 63-135.
13. A. Ogg, Cohomology of abelian varieties over function fields, Ann. of Math.,76(1962), 185-212.

14. H. Pohlmann, Algebraic cycles on abelian varieties of complex multiplication type, Ann. of Math., 88(1968), 161-180.
15. A.P. Rajwade, Arithmetic on curves with complex multiplition by $\sqrt{-2}$, Proc. Camb. Phil. Soc., 64(1968), 659-672.
16. _____, Arithmetic on curves with complex multiplication by the Eisenstein integers, ibid. 65(1969), 59-73.
17. I. Šafarevič, Principal homogenous spaces defined over a function field, Amer. Math. Soc. Transl. ser. 2, 37(1964) 85-114.
18. E.S. Selmer, The diophantine equation $aX^3+bY^3+cZ^3=0$, Acta Math., 85(1951), 203-362.
19. T. Shioda, Elliptic modular surface I, II, Proc. Japan Acad. 45(1969), 786-790, and 833-837.
20. N.M. Stephens, The diophantine equation $X^3+Y^3=DZ^3$ and the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer, J. Reine Angew. Math., 231(1968), 121-162.
21. H.P.F. Swinnerton-Dyer, The conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, and of Tate, Proc. of a conference on Local fields, (1966), 132-157.
22. _____, An application of computing to class field theory, Algebraic Number Theory, chapter XIII, Academic Press, 1967.
23. 田原賢一, Tate-Šafarevič group と Brauer group について.
24. J. Tate, WC-group over $\mathfrak{p}$-adic fields, Sém. Bourbaki, 10 (1957), n°156.
25. _____, Duality theorems in galois cohomology over number fields, Proc. Intern. Congress Math. Stockholm (1962), 288-295.
26. _____, Principal homogenous spaces for abelian varieties, J. Reine Angew. Math., 209(1962), 98-99.
27. _____, Algebraic cycles and poles of zeta functions, Arithmetical Algebraic Geometry, New York (1965), 93-110.
28. _____, On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog, Sém. Bourbaki 1965/66, n°306.
29. B. Mazur, Rational points of abebian varieties with values in towers of number field.
30. 山本芳彦, 佐藤予想について, 金沢シンポジウム報告集.

2. のための文献

31. M. Deuring, Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkorper, Abh. Math. Sem.Hamburg,14(1941), 197-272.

32. T. Honda, Isogeny classes of abelian varieties over finite fields, J. Math. Soc. Japan,20(1968), 83-95.

33. Y. Manin, The theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic, Russian Math. Surveys,18(1963),1-81.

34. A.P. Ogg, Elliptic curves and wild ramification, Amer. J. of Math.,89(1967), 1-21.

35. M. Raynaud, Caracteristique d'Euler-Poincaré d'une faiseaux et cohomologie des variétés abéliennes, Sém. Bourbaki, 1964/65 n°286.

36. I. Safarevic, Algebraic number theory, Proc. Intern. Congress Math. Stockholm,(1962) (A.M.S. Transl. Ser.2, vol 31).

37. J.P. Serre, Analogues Kähleriens des certaines conjectures de Weil, Ann. of Math.,71(1960), 392-394.

38. _____, Groupes de Lie l-adiques attachés aux courbes elliptiques, Coll. Clermont-Ferrand, C.N.R.S.,(1964), 237-256.

39. _____, Courbes elliptiques et groupes formels, Resume des cours, 1965/66, Annuaire du College de France, 1966/67, 49-58.

40. _____, Groups p-divisibles (d'après Tate), Sem. Bourbaki 1966/67 n°318.

41. _____, Abelian l-adic representations and elliptic curves, Benjamin, 1968.

42. _____,and J. Tate, Good reduction of abelian varieties, Ann. of Math.,88(1968), 492-517.

43. J. Tate, p-divisible groups, Proc. of a conference on Local fields,(1966),

44. _____, Endomorphism of abelian varieties over finite fields, Inventiones Math.,2(1966), 134-144.

45. _____, Classes d'isogenie des variétés abéliennes sur un corps fini (d'apres T. Honda), Sem. Bourbaki 1968/69 n°352.

46. W.C. Waterhouse, Abelian varieties over finite fields, thesis, Harvard Univ.,1968.

47. _____, Abelian varieties over finite fields I, II,Symp. at New York (1969).

3. のための文献.

48. K. Doi, On the jacobian varieties of the field of elliptic modular functions, Osaka Math. J.,15(1963), 249-256.
49. _____ and H. Naganuma, On the jacobian varieties of the field of elliptic modular functions II, J. Math. Kyoto Univ., 6(1967), 177-185.
50. Y. Ihara, On congruence monodromy problems, vol.I, II, Lecture notes Univ. of Tokyo.
51. _____, Algebraic curves mod p and arithmetic group, Proc. of Symp. in Pure Math. IX (1966), 265-271.
52. _____, The congruence monodromy problems, J. Math. Soc. Japan,20(1968), 107-121.
53. _____, 素因子と共役類.(一),(二).数学の歩み.
54. _____, 有限体上一変数代数函数体の上の非アーベルな類体論(特別な場合)について, 第14回代数シンポジューム報告集.(於お茶の水大)
55. M. Kuga, Fibre varieties over a symmetric space whose fibres are abelian varieties, Lect. note, Univ. of Chicago, 1963/64.
56. _____, and G. Shimura, On the zeta function of a fibre variety whose fibres are abelian varieties, Ann. of Math., 82(1965), 478-539.
57. _____, Fibre varieties over a symmetric space whose fibres are abelian varieties, Proc. of Symp, in Pure Math. IX (1966), 338-346.
58. _____, and J.V. Leahy, Shimura's abelian varieties as Weil's higher Jacobian varieties, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, (1970), 229-253.
59. T. Matsui, On the endomorphism algebra of jacobian varieties attached to the field of elliptic modular functions, Osaka J. Math.,1(1964), 25-31.
60. T. Miyake, Decomposition of jacobian varieties and Dirichlet series of Hecke type, to appear.
61. G. Shimura, On the theory of automorphic functions, Ann. of Math.,70(1959), 101-144.
62. _____, Sur les integrales attachees aux formes automorphes, J. of Math. Soc. Japan,11(1959), 291-311.

63. G. Shimura, On the zeta functions of the algebraic curves uniformized by certain automorphic functions, J. Math. Soc. Japan,13(1961), 275-331.

64. _____, On the class fields obtained by complex multiplication of abelian varieties, Osaka Math. J.,14(1962),33-44.

65. _____, On Dirichlet series and abelian varieties attached to automorphic forms, Ann. of Math.,76(1962), 237-294.

66. _____, On analytic families of polarized abelian varieties and automorphic functions, Ann. of Math.,78(1963), 149-192.

67. _____, Class fields and automorphic functions, ibid. 80 (1964), 444-463.

68. _____, Moduli and fibre systems of abelian varieties, ibid. 83(1966), 294-338.

69. _____, Discontinuous groups and Abelian varieties, Math. Annalen,168(1967), 171-199.

70. _____, Construction of class fields and zeta function of algebraic curves, Ann. of Math.,85(1967), 58-159.

71. _____, Algebraic number fields and symplectic discontinuous groups, ibid. 86(1967), 503-592.

72. _____, Local representations of galois groups, ibid. 89 (1969), 99-124.

73. _____, On canonical models of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, ibid. 91(1970), 144-222.

74. _____, Moduli of abelian varieties and number theory, Proc. of Symp. in Pure Math. IX (1966), 312-332.

75. _____, The zeta function of an algebraic variety and automorphic functions, Woods Hole Summer Institute on Algebraic Geometry 1964.

76. _____, A reciprocity law in non-solvable extensions, J. Reine Angew. Math.,221(1966), 209-220.

77. _____, Automorphic functions and number theory, Lecture Notes in Mathematics, 54, Springer, 1968.

78. _____, Class fields over real quadratic fields in the theory of modular functions, Intern. Math. Conf. on Several Complex Variables, Maryland, 1970.

4. のための文献.

79. T. Honda, Formal groups and Zeta functions, Osaka J. Math., 5(1968), 199-213.
80. A.P. Ogg, Abelian curves of small conductor, J. Reine Angew. Math.,226(1967), 204-215.
81. _____, Abelian curves of 2-power conductor, Proc. Camb. Phil. Soc.,62(1966), 143-148.
82. _____, On a convolution of L-series, Inventiones Math.,7 (1969), 297-314.
83. A. Weil, Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktional-gleichungen, Math. Annalen,168(1967), 149-156.
84. _____, Series de Dirichlet et fonctions automorphes, Sém. Bourbaki 1967/68, n°346.
85. _____, Zeta functions and Mellin transforms, Algebraic Geometry, Papers Presented at the Bombay Colloquim, 1968.

一般的な文献

86. J.W.S. Cassels, Diophantine equations with special reference to elliptic curves, J. London Math. Soc.,41(1966),193-291.
87. R. Fricke, Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen II , Leipzig und Berlin 1922.
88. E. Hecke, Mathematische Werke, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1959.
89. 本田平, 形式群とゼーター関数, 第14回代数シンポジュウム報告集(於お茶の水大)
90. J. Igusa, On the transformation theory of elliptic functions, Amer. J. of Math.,81(1959), 436-452.
91. _____, Fibre systems of jacobian varieties III , Amer. J. of Math.,81(1959), 453-476.
92. _____, Kroneckerian model of fields of elliptic modular functions, ibid. 81(1959), 561-577.
93. S. Lang, Abelian varieties, Interscience Tracts, New York, 1959.
94. D. Mumford, Families of Abelian Varieties, Proc. of Symp. in Pure Math. IX (1966), 347-351.

95. D. Mumford, On the equations defining abelian varieties, I, II, III, Inventiones Math.,1(1966), 287-354, 3(1967), 75-135, 3(1967), 215-244.

96. _____, Introduction to abelian varieties, to appear in Tata Institute Studies in Mathematics, Oxford Univ. Press.

97. Seminaire H. Cartan, Fonctions automorphes, 1957/58.

98. G. Shimura and Y. Taniyama, Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory, Publ. Math. Soc. Japan, 1961.

99. 志村五郎, 保型函数と整数論 I, II. 数学 11(1960), 193-205, 13(1961), 65-80.

100. H.P.F. Swinnerton-Dyer, Application of algebraic geometry to number theory, Symp. at New York 1969.

101. 谷山 豊 全集.

102. H. Weber, Lehrbuch der Algebra 3, Braunschweig, 1908.

103. A. Weil, Variétés abéliennes et courbes algébriques, Hermann, Paris, 1948.

104. _____, Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, Hermann, Paris, 1949.

105. _____, Introduction a l'étude des variétés kählériennes, Hermann, Paris, 1958.

106. _____, Foundation of algebraic geometry, Amer. Math. Soc. Colloquim Publication, 2nd edition, 1962.