数理解析研究所講究録
第94巻 1970年 1-23

位相環の微分加群について

京大 教養　鈴木 敏

§1. 序

昨年秋、今年春の2回の学会に於ける講演の内容を詳しく述べる。前者は、(5)、後者は、(6)として発表乃至は発表予定である。前者は、離散賦値環の一回の微分に関する論文であり、後者は、位相環に関する高階微分の一般論的な内容をもつものである。順序として、後者を先に述べる。これを前者の準備として話すが、今の所高階微分の応用に関する問題は考えていないので、いささか龍頭蛇尾の感を持たれると思うが、それなら寧ろ、2つの独立な話題と見てもらった方が適切であろう。

先づ、Grothendieck (1)、(2)の用語として次の説明をして置く。但し、環、Algebra と云うときには、常に可換で単位元をもつものに限ることにする。

環,加群の位相という時には、常に linear topology を考えることにする。ここに linear Topology と云うのは、(0)の近傍系の

基を、イデアルまたは、部分加群でとれる位相加群としての位相である。

(定義1) 位相環Aが<u>preadmissible</u>であるとは、Aに、ある開イデアルJが存在して任意のAの(0)の開近傍Vに対して、ある正の整数nがあり、$J^n \subset V$となることを云う。このとき、このようなJのことを<u>定義イデアル</u>と云う。

(定義2) Aを位相環, Mを位相的A-moduleとする。Mが<u>formally projective A-module</u>であるとは、次の場合に云う。任意のAの開イデアル$\mathfrak{a}$, discrete $A/\mathfrak{a}$-module P, Q, surjective A-homomorphism $u: P \to Q$及び連続なA-homomorphism $v: M \to Q$が、与えられたとき、連続なA-homomorphism $w: M \to P$で、

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "v"] & \\ P \arrow[rr, "w"] & & Q \end{tikzcd}$$

なる可換図が成立する。

(定義3) kを位相環、Aを位相的k-algebraとする。Aが、k上、<u>formally smooth</u>であるとは、次が成立つことである。任意のdiscrete k-algebra E, EのnilpotentイデアルJ, k-algebra homomorphism $u: A \longrightarrow E/J$が与えられたとき、k-algebra homomorphism $v: A \longrightarrow E$が存在して、可換図

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "u"'] & E \arrow[d] \\ & E/J \end{tikzcd}$$

が成立する。(ここで、$J^2=(0)$と仮定してよいことは容易に判る。)

(定義4) Aを位相環、M, Nを位相的A-moduleとする。$u: M \longrightarrow N$ を連続なA-homomorphismとする。

(1) $u(M)$がNの中でdenseなときに、uは<u>formally epimorphic</u>であると云う。

(2) Mの位相がNの位相の逆像であるとき、uは<u>formally monomorphic</u>であると云う。

(3) uが formally epimorphic で formally monomorphic のとき、uは<u>formally bimorphic</u>であると云う。

Aを位相環, Mを位相的A-moduleとするとき、$S_A(M) = \bigoplus_{n \geq 0} S_A^n(M)$ でその<u>symmetric algebra</u>を示す。一般性を持った$S_A(M)$の位相は、(0)の開近傍の基が次の形のものとして与えられる。$\{\mathfrak{a}S_A(M) + US_A(M)\}$。ただし、$\mathfrak{a}$は、$A$の$(0)$の近傍系をなすイデアル全体、$U$は$M$の$(0)$の近傍系をなす部分加群全体を動くものとする。$M$の位相が、$A$から導かれる位相より粗いときは、上で$\mathfrak{a}M \subset U$なるcouple $(\mathfrak{a}, U)$に限ってよい。

k を位相環，A，B を k-algebra とするとき，一般性をもった $A\otimes_k B$ の位相は，(0) の開近傍の基が，次の形のものとして，与えられる。$\{\mathfrak{a}\otimes B + A\otimes\mathfrak{b}\}$。ただし，$\mathfrak{a}$ は A の (0) の近傍系をなすイデアル，$\mathfrak{b}$ は B の (0) の近傍系をなすイデアルを動くものとする。

§2. 位相環の高階微分加群

k を位相環，A を位相的 k-algebra とする。$\Omega^{(q)}_{A/k}$ を A の k 上の，q 次の high order differentials の加群とする。つまり

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A\otimes_k A \xrightarrow{p} A \longrightarrow 0 \quad , \quad p(a\otimes b) = ab,$$

なる exact sequence を考えるとき，$\Omega^{(q)}_{A/k} \simeq I/I^{q+1}$。

一般に，M を A-module とするとき，$\mathrm{Dercont}_k(A, M)$ で A から M への連続な k-derivations の作る加群とする。M として，その位相が，A から導入された位相より，粗いものばかりを考える。（例えば，A のある開イデアル $\mathfrak{a}$ で annihilate される discrete な A-module がそうである。）M をこのような modules の作るカテゴリーに変るとき，$\mathrm{Dercont}_k(A, M)$ を represent するような，$\Omega^{(q)}_{A/k}$ の位相は，§1 で考えた，$A\otimes_k A$ の一般性をもった位相から導かれるものである。（普通 M は任意の位相 A-modules を動いてよいように考えられて居るよ

うであるが、これは誤りである。）

この§では、主に、このような位相を考えた$\Omega^{(q)}_{A/k}$に関して次が成立するかどうかを考える。

“Aがk上にformally smoothであるとき、$\Omega^{(q)}_{A/k}$がformally projectiveであるか？”

$\Omega^{(1)}_{A/k}$に関しては、この主張は常に正しい。それは、次の様に容易に証明される。

$\mathfrak{a}$, P, Q, u, v を（定義2）におけるものとする。ただし $v : \Omega^{(1)}_{A/k} \longrightarrow Q$. $\bar{A} = A/\mathfrak{a}$ として、Nagata ringfications $D_{\bar{A}}(P)$, $D_{\bar{A}}(Q)$ を考えると、uは、$u' : D_{\bar{A}}(P) \longrightarrow D_{\bar{A}}(Q)$ と、k-algebra homomorphismに自然に拡張されるが、u'のkernel Jは、Pに含まれ、従ってnilpotentイデアルである。v'は、$a \in A$に対し、$v'(a) = (\bar{a}, v \circ d^{1}_{A/k}\, a)$として、連続なk-algebra homomorphism $v' : A \longrightarrow D_{\bar{A}}(Q)$と拡張出来る。ただし、$\bar{a}$はaのmod. $\mathfrak{a}$ class, $d^{1}_{A/k}$はcanonical derivation : $A \longrightarrow \Omega^{(1)}_{A/k}$とする。したがって、formal smoothnessより連続なk-algebra homomorphism $W' : A \longrightarrow D_{\bar{A}}(P)$で、

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "w'"'] \arrow[dr, "v'"] & \\ D_{\bar{A}}(P) \arrow[rr, "u'"] & & D_{\bar{A}}(Q) \end{tikzcd}$$

が可換図になるように出来る。

$w'(a) = (\bar{a}, \bar{w}(a))$ とすると、$P^2 = (0)$ より、容易に、$\bar{w}$ が、$A \longrightarrow P$ の連続な derivation であることが判る。$\bar{w} = w \circ d^1_{A/k}$ と分解する。但し $w : \Omega^{(1)}_{A/k} \longrightarrow P$ は A-module homomorphism。W が連続なること、可換図

$$\begin{tikzcd} & \Omega^{(1)}_{A/k} \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "v"] & \\ P \arrow[rr, "u"] & & Q \end{tikzcd}$$

の成立することは容易に判る。

$\Omega^{(q)}_{A/k}$ に関しても我々の主張が、$q = 1$ のときのように無条件に成立することが望ましいのであるが、今の所旨く証明出来ない。そして、(定理2)のように、位相に関して、制限された形で証明する。ただし、このままでも可成り一般性を持ったものであり、応用上は余り差支えが無いであろう。我々の困難の起る原因の一つは、Grothendieck (2) における次の結果を仮定することにある。

(Proposition 1) k を位相環, A を位相的 k-algebra とする。I を A の ideal として、$C = A/I$ とおく。C が formally smooth k-algebra であると仮定する。若し、A が formally smooth k-algebra で、~~pr~~admissible であれば次が成立する。

canonical surjections $\varphi_n : S_C^n(I/I^2) \longrightarrow gr_I^n(A)$ ($n=0,1,2,\cdots$) は formally bimorphic である。

(証明は、自然なことの組合せであるが、位相的な議論が甚だわづらわしい。)

他の一つの困難は、種々な場合に加群が、induced topology を持たないと、議論のし難い点である。

(Proposition 2) Aを位相環、Mを位相的 A-module とする。このとき、Mが formally projective A-module であるための必要十分条件は、$S^{\cdot}_A(M)$が、formally smooth A-algebra であることである。証明は、定義及び$S^{\cdot}_A(M)$の位相の取り方から、容易に従う。

discrete な位相の場合には、

(Lemma 1) Mが projective A-module なら、$S_A^n(M)$ は projective A-module である。

(証明) Mの projectivity より、ある free A-module F, $\varphi : F \to M$, $\phi : M \to F$, $\varphi \circ \phi = id_M$ なる

A-homomorphisms がある。これは、grade を保つ、

$$S_A^{\cdot}(M) \xrightarrow{S_A^{\cdot}(\psi)} S_A^{\cdot}(F) \xrightarrow{S_A^{\cdot}(\varphi)} S_A^{\cdot}(N)$$

と拡張される．但し，$S_A^{\cdot}(\varphi)\circ S_A^{\cdot}(\psi) = id_{S_A^{\cdot}(M)}$ である。従って我々の主張は．$S_A^{\cdot}(F)$ が多項式環であることから従う。

従って，

(Proposition 3) Aを位相が discete な環，MをA-moduleとする．このとき次の3つの主張は互に同値である。

(1) $S_A^{\cdot}(M)$ は formally smooth A-algebraである．

(2) Mがprojective A-moduleである。

(3) $S_A^n(M)$ はprojective A-modules である（$n=0,1,2$ ---）．

(Lemma 2) Aを環，MをA-moduleとする。$\mathfrak{a}$をAのidealとする。$\bar{A}=A/\mathfrak{a}$，$\bar{M}=M/\mathfrak{a}M$とおく．このとき，$S_A^{\cdot}(\bar{M}) \simeq S_A^{\cdot}(M)/\mathfrak{a}S_A^{\cdot}(M)$ が成立する．

従って

(Proposition 4) Aを位相環，Mを A-moduleでAから導かれた位相を持つものとする。このとき，次は同値で

ある。

(1) $S_A(M)$ は formally smooth A-algebra である。

(2) M は formally projective A-algebra である。

(3) $S_A^n(M)$ は formally projective A-module である ($n=0,1,2,\cdots\cdots$)。

次は定義から容易に従う。

(Lemma 3) A を位相環、M, N を位相的 A-modules で、$\varphi: M \longrightarrow N$ を連続な A-homomorphism とする。このとき φ が、formally monomorphic である必要十分条件は、

(1) φ は M から N の部分加群 $\varphi(M)$ への open map であり、

(2) $\ker(\varphi)$ は M の任意の (0) の開近傍に含まれる。

(Lemma 4) A を位相環、$\varphi: M \longrightarrow N$ を formally bimorphic な A-modules の homomorphism とする。このとき次が成立する。

(1) M が formally projective な A-module である必要十分条件は、N がそうであることである。

(2) 若し φ が surjective で、M が induced topology を持つなら、N も induced topology を持つ。

Grothendieck (2) の (20. 4. 5) の拡張として次が得られる。

(Proposition 5) k を位相環、A を位相的 k-algebra とする。$\Omega^{(q)}_{A|k}$ の (canonical な) 位相は A-module として A から induce される位相より粗い。若し A の開イデアルの $q+1$ 乗が常に開イデアルであれば、両位相は一致する。

(証明) 最初の主張は明らか。この§の初めの記号を用いて、仮定により、次を証明すればよい。"任意の A の開イデアル $\mathfrak{a}$ に対して、$(\mathfrak{a}^{q+1}\otimes A + A\otimes \mathfrak{a}^{q+1})\cap I \subset \mathfrak{a}I + I^{q+1}$"。ところで、$q$ に関する帰納法で、"$z_i \in \mathfrak{a}$ ($i=1,2,\cdots,q+1$), $w\in A$ に対して、$z_1\cdots z_{q+1}\otimes w - w\otimes z_1\cdots z_{q+1} \in \mathfrak{a}I + I^{q+1}$" が証明出来る。いま、$\mathfrak{a}^{q+1}\otimes A + A\otimes \mathfrak{a}^{q+1} = \{\sum a_i\otimes w_i + \sum w_j'\otimes a_j' \mid a_i, a_j' \in \mathfrak{a},\ w_i, w_j' \in A,\ \sum a_i w_i + \sum w_j' a_j' = 0\}$ である。この元は、$\sum a_i\otimes w_i + \sum w_j'\otimes a_j' = \sum a_i\otimes 1\cdot(1\otimes w_i - w_i\otimes 1) + \sum a_j'\otimes 1\cdot(1\otimes w_j' - w_j'\otimes 1) + \sum(w_j'\otimes a_j' - a_j'\otimes w_j')$ と表わされるが、上の注意よりこれが、$\mathfrak{a}I + I^{q+1}$ にふくまれることが判る。

次は例えば局所環と、その完備化の間に成り立つ関係である。

(定理1) k を位相環、A, A' を位相的 k-algebras $\varphi: A\to A'$ を formally bimorphic な k-homomorphism とする

と、φはformally bimorphicなA-module homomorphism
$\lambda:\Omega^{(q)}_{A|k} \longrightarrow \Omega^{(q)}_{A'|k}$ を導く。
証明は、定義及び自然なことの組合せで出来る。

（定理2） kを位相環，Aをformally smoothなk-algebraとする。Aがpreadmissible、Aの任意の開イデアルの$q+1$乗は、開イデアルであるとする。この時 $\Omega^{(q)}_{A|k}$ はformally projective A-module となる。

（証明） Aがpreadmissibleなることから、$B=A\otimes_k A$ がpreadmissibleなることは容易に従う。また$A\otimes_k A$が、formally smooth A-algebraであることも容易に判る。従って（Proposition 1）に於ける、k、A、Iとして、A，B，Iを取れば、$\varphi_n : S^n_A(I/I^2) \longrightarrow gr^n_I(B)$ がformally bimorphicなことが判る。そこで、今迄述べたことから、I/I^{n+1}，I^n/I^{n+1}（$n=0, 1, \cdots, q$）がinduced topologyを持ち，I^n/I^{n+1}がformally projective A-moduleであることが判る。discrete topologyのときには、exact sequence

$$0 \longrightarrow I^\ell/I^{\ell+1} \longrightarrow I/I^{\ell+1} \longrightarrow I/I^\ell \longrightarrow 0$$

を用いれば、I/I^{q+1}のformally projectivityは帰納法で示される訳であるが、我々の場合には、この各項がinduced topologyを持つことから、これを少し modify して証明する訳である。一般に、位相環Aの上のinduced topology を持つ位相的Amodule M が formally projective であるのは、任意の A の開イデアル $\mathfrak{a}$ に対して、$M/\mathfrak{a}M$ が、projective $A/\mathfrak{a}$-module であることを注意して置く。

そこで、$\mathfrak{a}$ を A の開イデアルとするとき、

$$0 \longrightarrow I^l/\mathfrak{a}I^l + I^{l+1} \longrightarrow I/\mathfrak{a}I + I^{l+1} \longrightarrow I/\mathfrak{a}I + I^l \longrightarrow 0$$

が exact であることが示されればよい訳であるが、すぐには従わない。$\mathfrak{a}$、I^l/I^{l+1} が開集合であり、I^l/I^{l+1} が、I/I^{l+1} の subspace であることから、A の開イデアル $\mathfrak{b}$ で、$\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ かつ、$\mathfrak{b}I \cap I^l \subset \mathfrak{a}I^l + I^{l+1}$ なるものがある。このとき、exact sequence，

$$0 \to I^l + \mathfrak{b}I/I^{l+1} + \mathfrak{b}I \longrightarrow I/I^{l+1} + \mathfrak{b}I \longrightarrow I/I^l + \mathfrak{b}I \longrightarrow 0$$

が成立するが、I/I^l の formal projectivity より、これは $A/\mathfrak{b}$-modules の split exact sequence である。従って、modulo $\mathfrak{a}$ でも exactness が保たれる。つまり、exact sequence

$$0 \to I^l + \mathfrak{b}I/I^{l+1} + \mathfrak{a}I^l + \mathfrak{b}I \longrightarrow I/I^{l+1} + \mathfrak{a}I \longrightarrow I/I^l + \mathfrak{a}I \to 0$$

を得る。第2項は $I^l/(I^{l+1} + \mathfrak{a}I^l + \mathfrak{b}I) \cap I^l = I^l/I^{l+1} + \mathfrak{a}I^l + (\mathfrak{b}I \cap I^l) = I^l/I^{l+1} + \mathfrak{a}I^l$ であり、所要の exact sequence が得られたことになる。

§3. 完備離散賦値環の微分加群

この節では、位相環の簡単な場合として、完備離散賦値環

の微分加群の構造を調べ、この様な環の derivations に関する N. Heerema, J. Neggers の結果その他についての考察を行う。

先ず、次の事柄は良く知られている。(例えば、Grothendieck (2))。

(Propsition 6) k を位相環、R を local ring, m をその maximal ideal, R は k-algebra であるとする。

(1) 次の exact sequence が成立する。ただし、d は、canonical derivation $d^{(1)}_{R|k}$ から導かれる写像である。

$$m/m^2 \xrightarrow{d} (R/m)\otimes_R \Omega^{(1)}_{R|k} \longrightarrow \Omega^{(1)}_{(R/m)|k} \longrightarrow 0$$

(2) k が体で、R/m が k 上に separable extension であれば、

$$0 \longrightarrow m/m^2 \xrightarrow{d} (R/m)\otimes_R \Omega^{(1)}_{R/k} \longrightarrow \Omega^{(1)}_{(R/m)|k} \longrightarrow 0$$

は exact である。

(3) k が離散賦値環で、u を k の素元とする。R/m が k/uk 上に separable であれば、

$$0 \longrightarrow m/m^2 + uR \longrightarrow (R/m)\otimes_R \Omega^{(1)}_{R/k} \longrightarrow \Omega^{(1)}_{(R/m)/k} \longrightarrow 0$$

は exact である．

（Lemma 5） Rを環，mをRの ideal，Mを R-module とする。ある正の整数 l に関して，$m^l M = (0)$ であるとする。このとき，次の3条件は同値である。

(1) Mは free R-module である。

(2) M/mM は free R/m-module で $\mathrm{Tor}_1^R(M, R/m) = 0$ である。

(3) M/mM は free R/m-module で canonical homomorphism：$gr_m^0(M) \otimes_{(R/m)} gr_m(R) \longrightarrow gr_m(M)$ が bijective である。

さらに，この条件が成立するとき，$\{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をMの元の組で，その modulo mM での classes が，M/mM の R/m 上の free base であるとすれば，$\{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は Mの free base である。

（略証） $L = \sum_{\lambda \in \Lambda} RX_\lambda$ を free module として，exact sequence：

$0 \longrightarrow S \longrightarrow L \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$，$\varphi(X_\lambda) = u_\lambda$，を考える。これより，

$$\longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M, R/m) \longrightarrow S/mS \longrightarrow L/mL \longrightarrow M/mM \longrightarrow 0$$

なる exact sequence, あるいは、可換図

$$\begin{array}{ccc}
L/mL \otimes_{(R/m)} m^n/m^{n+1} & \longrightarrow & m^n L/m^{n+1}L \\
\downarrow & & \downarrow \\
M/mM \otimes_{(R/m)} m^n/m^{n+1} & \longrightarrow & m^n M/m^{n+1}M
\end{array}$$

等が考えられる。これらより容易に証明を得る。

いま、Pを素数として、pを素元とする完備離散賦値環とすれば、Pは素環上に formally smooth で、従って $\Omega_P^{(1)}$ は formally projective であるが、Pは局所環であるから、$\Omega_P^{(1)}/p^n\Omega_P^{(1)}$ は free P/pP-module である $(n=1,2,\cdots)$。Pの元の組 $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を、その modulo pP での classes $\{\bar{a}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が P/pP の $(P/pP)^p$ 上の p-independent base であるように取れば、$\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の微分が $\Omega_{P/pP}^{(1)}$ の free base となり、Proposition 6 の (2) および Lemma 5 より、各 $n=1,2,\cdots$. に対して、$\Omega_P^{(1)}/p^n\Omega_P^{(1)}$ は $\{d_P^{(1)}(a_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 達の modulo $p^n\Omega_P^{(1)}$ classes を free base とする。従って、$\Omega_P^{(1)}$ は、その完備化 $\hat{\Omega}_P^{(1)}$ が、$\{d_P^{(1)}(a_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を free base とする、free P-module の完備化と、同型であるような加群である。$\hat{\Omega}_P^{(1)} =$

$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\, d_P^{(1)}(a_{\lambda_i}) \mid \alpha_i\in P,\ \lim_{i\to\infty}\alpha_i=0,\ \lambda_i\in\Lambda\right\}$ と表わされることを注意する。

いま、Rを *ramified* な剰余体の標数がpの完備離散賦値環とし、Pをその係数環とする。そのとき、あるEisenstein多項式 $f(x)$ が存在して、$R\simeq P[X]/(f(x))$ で、Xの *modulo* $(f(x))$ *class* を u とすれば、u は R の素元となる。$\Omega_R^{(1)}$ は、$(R\otimes_P\Omega_P^{(1)}\oplus R\,dX)/R((d_Pf)(u)+f'(u)\,dx)$ と表わされる。ただし、dx は R 上の自由な元と考え、$(d_Pf)(u)$ は、$f(x)$ の係数の各々を、$d_P^{(1)}$ による値で置き変え、x を u で置き変えて得る $R\otimes_P\Omega_P^{(1)}$ の元とする。従って次を得る。P に対して、上述の様に $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を取り、

(*) $(d_Pf)(u)=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i(1\otimes d_P^1(a_{\lambda_i}))$, $\lambda_i\in\Lambda$. $\beta_i\in R$, と表わす。

(*Proposition* 7) $Der^{(1)}(R,R)\simeq Hom_R(\Omega_R^{(1)},R)$ は、$\prod_{\lambda\in\Lambda}R_\lambda\times R$ $(R_\lambda=R)$ の *subset* と考えられ、

$$Der^{(1)}(R,R)\simeq\left\{(c_\lambda;t)_{\lambda\in\Lambda}\mid c_\lambda\in R,\ t\in R,\ \sum_{i=1}^{\infty}\beta_i c_{\lambda_i}+f'(u)t=0\right\}$$

と表現される。ただし、$\partial\in Der^{(1)}(R,R)$ は、$\partial a_\lambda=c_\lambda$, $\partial u=t$ のとき、$(c_\lambda;t)_{\lambda\in\Lambda}$ で表わされる。

また明らかに

(Proposition 8) $\mathrm{Der}^{(1)}(R/m, R/m) \simeq \mathrm{Hom}_{(R/m)}(\Omega^{(1)}_{(R/m)}, R/m)$ $\simeq \prod_{\lambda\in\Lambda}(R/m)_\lambda$ $((R/m)_\lambda = R/m)$ と表わされる。

更に, Proposition 6, (3) を用いて,

(Proposition 9) $(R/m)\otimes_R \Omega^{(1)}_R$ は $\{1\otimes d^{(1)}_R(\alpha_\lambda),$ $1\otimes d^{(1)}_R(u)\}_{i\in\Lambda}$ を base とする R/m-vector space。

従って,

$$\mathrm{Hom}_R(\Omega^{(1)}_R, R/m) \simeq \prod_{\lambda\in\Lambda}(R/m)_\lambda \times R/m$$

と表わされる。

先の Eisenstein 多項式により導かれる関係(*)より, 次の数を定義する。これは元々(4)で J. Neggers により導かれたものと同値である。

(定義 5) $\Delta_{R/p}(u) = \min v(\beta_i) - v(f'(u))$

ここに、 v は R の賦値, $v(\beta_i) = \infty$ も許すこととする。

R から R への derivation ∂ が、 R/m から R/m への derivation を導くとき、つまり $\partial(m) \subset m$

なるとき、derivation ∂ は inducing であると云う。このようにして導かれた R/m から R/m への derivation $\bar{\partial}$ を induced であると云うことにする。$q: R \longrightarrow R/m$, $r: \Omega_R^{(1)} \longrightarrow \Omega_{(R/m)}^{(1)}$ を canonical な maps とすれば、可換図

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{d_R^{(1)}} & \Omega_R^{(1)} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ R/m & \xrightarrow{d_{(R/m)}^{(1)}} & \Omega_{(R/m)}^{(1)} \end{array}$$

が成立する。上で $\partial = f \circ d_R^{(1)}$, $\bar{\partial} = \bar{f} \circ d_{(R/m)}^{(1)}$ と書く。ただし、$f: \Omega_R^{(1)} \longrightarrow R$ は R-homomorphism, $\bar{f}: \Omega_{(R/m)}^{(1)} \longrightarrow R/m$ は, R/m-homomorphism である。このとき、可換図

$$\begin{array}{ccc} \Omega_R^{(1)} & \xrightarrow{f} & R \\ {\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \Omega_{(R/m)}^{(1)} & \xrightarrow{\bar{f}} & R/m \end{array}$$

が成立する。q, r は次の maps を導く。

$$F: \mathrm{Hom}_R(\Omega_R^{(1)}, R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\Omega_R^{(1)}, R/m)$$

$$G: \mathrm{Hom}_{(R/m)}(\Omega_{(R/m)}^{(1)}, R/m) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\Omega_R^{(1)}, R/m) 。$$

これらのことから明らかに、

(Propsition 10)　R から R への derivation $\partial = f \circ d_R^{(1)}$ が inducing である条件は、$F(f) \in \mathrm{Image}(G)$ なることであり、R/m から R/m への derivation $\bar{\partial} = \bar{f} \circ d_{(R/m)}^{(1)}$ が induced である条件は、$G(\bar{f}) \in \mathrm{Image}(F)$ なることである。

(定理3)　R を unequal characteristic な完備離散賦値環とし、m をその極大イデアルとするとき、次の2条件は同値である。

(1)　$\mathrm{Der}(R, R)$ の derivations はすべて inducing である。

(2)　$\mathrm{Der}(R/m, R/m)$ の derivations はすべて induced である。

(証明)　Proposition 10より、次を証明することに帰着される。"$\mathrm{Image}(F) = \mathrm{Image}(G)$ でなければ、$\mathrm{Image}(F)$ と $\mathrm{Image}(G)$ の間に包含関係はない。" 実際に $\Delta_{R/P}(u) \geq 1$ のときは、$\mathrm{Image}(F) = \mathrm{Image}(G)$ となり $\Delta_{R/P}(u) \leq 0$ のときには、後の事情が起ることを示す。$\mathrm{Hom}_R(\Omega_R^{(1)}, R/m)$ は Proposition 9 により $\prod_{\lambda \in \Lambda} (R/m)_\lambda \times R/m$, $((R/m)_\lambda = R/m)$ と同一視されるが、Proposition 8 により

$$\mathrm{Image}(G)=\{(\bar{c}_\lambda\,;\,0)_{\lambda\in\Lambda}\mid \bar{c}_\lambda\in R/m\}。$$

また、Proposition 7 により

$$\mathrm{Image}(F)=\{(\bar{c}_\lambda\,;\,\bar{t})_{\lambda\in\Lambda}\mid \bar{c}_\lambda,\ \bar{t}\ \text{は}\ \sum_{i=1}^{\infty}\beta_i c_{\lambda_i}+f'(u)t=0$$

$$\text{を満す}\ R\ \text{の元の mod. } m \text{ classes}\}。$$

$\Delta_{R/P}(u)\geq 1$ なら $c_\lambda\ (\lambda\in\Lambda)$ に任意の R の値を与えても，$\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i c_{\lambda_i}+f'(u)t=0$ を満す t の値が得られるが，この時 $t\in m$ となる。つまり $\bar{t}=0$。したがって $\mathrm{Image}(F)=\mathrm{Image}(G)$。 $\Delta_{R/P}(u)\leq 0$ のとき，$t=1$ とおいて，この式を満す c_λ の存在が示されるから，$\mathrm{Image}(F)\not\subset\mathrm{Image}(G)$。また $\bar{i}$ を，$v(\beta_{\bar{i}})=\min_{1\leq i<\infty} v(\beta_i)$ なる整数とし，$\lambda\neq\lambda(\bar{i})$ なら，$c_\lambda\equiv 0$ mod. m，また $c_{\lambda_{\bar{i}}}\equiv 1$ mod. m とおけば，上の式は解けない。従って $\mathrm{Image}(F)\not\supset\mathrm{Image}(G)$。よって定理は証明された。

（系） 定理3の同値な叙述の成立する必要十分條件は $\Delta_{R/P}(u)\geq 1$ なることである。 したがつて、$\Delta_{R/P}(u)\geq 1$ なる性質は係数環 P，素元 u の取り方には無関係である。

$\Delta_{R/P}(u)$ に関しては更に、次のことが成立するが、証明

は省略する。

(Proposition 11)　(1)　$\Delta_{R/P}(u) \leq 0$　なら、$\Delta_{R/P}(u)$ の値は素元　u　の取り方には無関係である。(2)　$\Delta_{R/P}(u) \geq 1$　なら、ある素元　w　が、存在して、$\Delta_{R/P}(w) = 1$ となる。

いずれの場合も　P　を取り変えれば、$\Delta_{R/P}(u)$　の値が変り得ることは、実例で示される。$\Delta_{R/P}(u) \geq 1$　なる特殊な場合として、Rが不分岐な時があるが、更に一般に、

(定理4)　R　を完備不分岐局所環、m　をその極大イデアルとすれば、$\mathrm{Der}(R/m, R/m)$　の derivations　はすべて induced である。

(証明)　R　は素環上に formally smooth、したがつて、$\Omega_R^{(1)}$　が　formally projective であるから、$\Omega_R^{(1)} \longrightarrow R/m$　の homomorphism　が、順次 $\Omega_R^{(1)} \longrightarrow R/m^2, \cdots,$ $\Omega_R^{(1)} \longrightarrow R/m^n, \cdots$.　と持ち上げられて、その極限として、$\Omega_R^{(1)} \longrightarrow R$　の homomorphism を得る。

さらに、次の定理が成立するが、証明は、省略する。

（定理5） R を定理4で述べられた條件を満足する完備離散賦値環とし、P を係数環とするとき、$\Omega^{(1)}_{R/P}$ は、Pの取り方に無関係である。実際これは、$\Omega^{(1)}_{R}$ の完備化における *torsion elements* の全体の作る *submodule* と同型である。

参 考 文 献

(1) A. Grothendieck, "Éléments de géometrie algébrique I", Inst. Hantes Études Sci. Publ. Math. 4 (1960).

(2) A. Grothendieck, "Élements de géometrie algébrique IV", Inst. Hantes Études Sci. Publ. Math. 20 (1964).

(3) N. Heerema, "Derivations on p-adic fields", Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962), 346-351.

(4) J. Neggers, "Dervations on $\mathfrak{z}$-adic fields", Trans. Amer. Math. Soc. 115 (1965), 496-504.

(5) S. Suzuki, "Differential modules and derivations of complete discrete valuation rings", J. Math. Kyoto U., Vol. 9, no. 3 (1969), 425-437.

(6) S. Suzuki, "Modules of high order differentials of topological rings", J. Math. Kyoto U., Vol. 10, no. 2 (1970), 印刷中。