数理解析研究所講究録
第94巻 1970年 44-61

High order derivation の体論への応用

阪大 理　小崎 高太郎
阪大 理　石橋 康徳

§1. 序

最近、高階の derivation についていくつかの基本的な結果が得られた。([3]) 我々はそれの体論への応用、とりわけ有限指数純非分離拡大のガロア理論の構成を目指したのであるが未だ十分満足すべき結果を得るまでには至っていない。

本講演では、先づ有限指数純非分離拡大の derivation algebra の構造について触れ、次に derivation algebra $D(K/k)$ に適当な位相を導入して、有限指数純非分離拡大 K/k の中間体と $D(K/k)$ の K を含む closed subrings が1対1に対応することを証明する。最後に高階の derivations の加群の生成元について触れる。([4])

次にここで使われる定義及び記号の説明をしよう。

k, A を1をもつ可換環とし、A を k-algebra とする。F を A-module とするとき、$A/k \to F$ なる n 次の derivation D とは、次の2つの条件を満足するものである。

(1) $D \in \mathrm{Hom}_k(A, F)$

(2) $x_0, x_1, \cdots, x_n$ を A の任意の $n+1$ 個の元とするとき. D は次の条件をみたす。

$$D(x_0 x_1 \cdots x_n) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} \sum_{i_1<\cdots<i_s} x_{i_1} \cdots x_{i_s}\, D(x_0 \cdots \hat{x}_{i_1} \cdots \hat{x}_{i_s} \cdots x_n).$$

$A/k \to F$ なる n 次の derivations 全体の集合を $D_0^{(n)}(A/k, F)$ と表わす。これは left A-module である. F の元 m は $m_R(a) = am\ (a \in A)$ によって $\mathrm{Hom}_k(A, F)$ の元 m_R を与える。 $F \oplus D_0^{(n)}(A/k, F) = \{m_R \oplus D \mid m \in F,\ D \in D_0^{(n)}(A/k, F)\}$ を $D^{(n)}(A/k, F)$ と表わす。 $F = A$ のときには. $D_0^{(n)}(A/k, A)$, $D^{(n)}(A/k, A)$ をそれぞれ $D_0^{(n)}(A/k)$, $D^{(n)}(A/k)$ と表わす. 更に、$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_0^{(n)}(A/k)$, $A \oplus \bigcup_{n=1}^{\infty} D_0^{(n)}(A/k)$ をそれぞれ $D_0(A/k)$, $D(A/k)$ と表わし. A-algebra $D(A/k)$ を A/k の derivation algebra という。

いま次のような完全列を考える。

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \otimes_k A \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0.$$

ここに φ は $\varphi(\sum_i a_i \otimes b_i) = \sum_i a_i b_i$ で定義される準同型である。 I は $A \otimes_k A$ の ideal で $1 \otimes a - a \otimes 1$ の形の元で生成される. 以下特に断らない限り $a(b \otimes c) = ab \otimes c$ によって $A \otimes_k A$ を A-module と見なすことにする。 A から I/I^{n+1} への写像 $\delta^{(n)}$ を

$$\delta^{(n)}(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1 \text{ の class}$$

と定義すると、$\delta^{(n)}$ は n 次の derivation になり. D を $A/k \to F$ なる任意の n 次の derivation とすると. 次の図式を可換にするよ

うな $D^* \in \mathrm{Hom}_A(I/I^{n+1}, F)$ が唯一つ存在することが分る。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "D"] \arrow[dr, "\delta^{(n)}"'] & & F \\ & I/I^{n+1} \arrow[ur, "D^*"'] & \end{tikzcd}$$

このことから．$I/I^{n+1} = \Omega_k^{(n)}(A)$ とおくと．

$$D_0^{(n)}(A/k, F) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega_k^{(n)}(A), F)$$

となる。$\Omega_k^{(n)}(A)$ を n 次の (Kähler) differential module とよぶ。

A, B を k-algebras とし．$h : A \to B$ を k-algebra homomorphism とする。$\delta_{A/k}^{(n)}, \delta_{B/k}^{(n)}$ をそれぞれ A/k, B/k の canonical n-th order derivations とする。このときには．B-homomorphism :

$$B \otimes_A \Omega_k^{(n)}(A) \longrightarrow \Omega_k^{(n)}(B)$$

が存在する。これは．$\sum_i b_i \otimes \delta_{A/k}^{(n)}(a_i) \longrightarrow \sum_i b_i \delta_{B/k}^{(n)}(h(a_i))$ によって与えられる。これの cokernel を $\Omega_k^{(n)}(B/A)$ と表わす。

§ 2. Derivation algebras の構造について．

k, A を可換環とし．A を k-algebra とする。φ を contraction homomorphism $A \otimes_k A \to A$ とし．I を φ の kernel とする。

$\psi : A \ni a \to a \otimes 1 \in A \otimes_k A$ は．A-modules の完全列

$$0 \to I \to A \otimes_k A \xrightarrow{\varphi} A \to 0$$

の splitting を与える。A と $\psi(A)$ を同一視すると

$$A \otimes_k A = A \oplus I.$$

したがって．次のような A-modules の canonical isomorphism が存

在する。

$$A \otimes_k A / I^{n+1} \cong A \oplus I / I^{n+1} \cong A \oplus \Omega_k^{(n)}(A).$$

これから直ちに次の結果を得る。

Proposition 1. M を A-module とすると、次のような left A-modules の canonical isomorphism が存在する。

$$\mathrm{Hom}_A(A \otimes_k A / I^{n+1}, M) \cong M \oplus D_0^{(n)}(A/k, M).$$

Corollary 1.1. A を体 k の有限次純非分離拡大体とすると、

$$D(A/k) \cong \mathrm{Hom}_A(A \otimes_k A, A).$$

証明. $A \otimes_k A$ は artinian local ring で、I はその極大イデアルだから巾零である。したがって十分大きい n に対して、$D_0^{(n)}(A/k) = D_0(A/k)$ となる。このことから分る。

以後 L, K を標数 p の体とし、L ⊃ K とする。

Theorem 2. L を K 上有限指数 e の純非分離拡大とし、$x \in L - K$ とする。このときには、L/K の p^{e-1} 次の derivation D で $D(x) \neq 0$ となるものが存在する。$L - K = \{x \in L \mid x \notin K\}$ である。

証明. 仮定によって、$K \subset L \subset K^{p^{-e}}$ である。$\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $K^{p^{-e}}/K^{p^{-e+1}}$ の p-basis とすると、$K^{p^{-e}} = \bigotimes_{\lambda \in \Lambda} K(x_\lambda)$ となる。f を x の

指数とし．$x_0 = x^{p^{f-e}}$ とおくと．これは指数 e の $K^{p^{-e}}$ の元である．したがって．x_0 を p-basis $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の member とすることができる。特に．$F(x_0) = K^{p^{-e}}$，$[F(x_0) : F] = p^e$ となるような体 F が存在する。$q = p^{e-1}$ とおくと．$\Omega_F^{(q)}(F(x_0))$ において $\delta(x) = \delta(x_0^{p^{e-f}}) \neq 0$ となり．$K^{p^{-e}}/F$ の p^{e-1} 次の derivation $\hat{D}$ で．$\hat{D}(x) \neq 0$ となるものが存在する。$\Delta = \hat{D}|L$ は．$D_0^{(p^{e-1})}(L/K, K^{p^{-e}})$ の元で．$\Delta(x) \neq 0$ をみたす。したがって．$\delta_{L/K}^{(p^{e-1})}(x) \neq 0$ となり．これから容易に．我々の主張を得る。

Remark. もしも指数が有限でなければ．$L - K$ の元 x で．L/K の任意の high order derivation D に対して．$D(x) = 0$ となるものが存在する。例えば．$K = k(x)$ を k の純超越拡大とし．$L = K^{p^{-\infty}}$ とおく。このときには．$x^{p^{-1}} \notin K$ で．D を n 次の derivation とすると．$D(x^{p^{-1}}) = D((x^{p^{-n-1}})^{p^n}) = 0$。

Theorem 3. L, K を Theorem 2 におけるものとすると．$D(L/K)$ の center は K に等しい。

証明. K が $D(L/K)$ の center に含まれることは明らかである。逆に．$a + \Delta$ ($a \in L$, $\Delta \in D_0^{(n)}(L/K)$) を $D(L/K)$ の central element とする。$\Delta x = x \Delta$ ($\forall x \in L$) から．$\Delta(x) = 0$．即ち．$\Delta = 0$。$a \in K$ となることは．Theorem 2 から直ちに分る。

Aを$D(L/K)$の部分環とするとき、Aのcenterを$Z(A)$と表わす。

Theorem 4. L/Kを有限次純非分離拡大とすると、$D(L/K) = \mathrm{Hom}_K(L, L)$となる。

証明. 定義によって、$D(L/K)$は$\mathrm{Hom}_K(L, L)$の部分環である。Corollary 1.1. によって、left L-modulesとして、$D(L/K) \cong \mathrm{Hom}_L(L \otimes_K L, L) \cong \mathrm{Hom}_K(L, L)$となる。したがって、$L$上の次元を比べて我々の主張を得る。

$D(L/K)$のこの性質は、有限次純非分離拡大を特性づける。

Theorem 5. LをKの有限次拡大とするとき、LがKの純非分離拡大であるための必要十分条件は、$[D(L/K) : L] = [L : K]$となることである。

証明. K_sをLにおけるKの分離閉包とする。すると、次のpropositionにおいて見られるように$D(L/K) = D(L/K_s)$となる。Theorem 4によって$[D(L/K_s) : L] = [L : K_s]$だから、$[D(L/K) : L] = [L : K]$ならば、$K = K_s$となって、$L$は$K$の純非分離拡大となる。

Proposition 6. K_sをLにおけるKの分離閉包とすると、$D(L/K_s) = D(L/K)$となる。

証明. $\Omega_K^{(1)}(K_s)=0$となることはよく知られている。これから、任意の$n \geq 1$に対して$\Omega_K^{(n)}(K_s) = 0$となる。したがって、[3], II-12から$\Omega_K^{(n)}(L) \cong \Omega_{K_s}^{(n)}(L)$を得る。このことから明らかである。

§3. 有限指数の純非分離拡大について

この節では、L/Kは有限指数eの純非分離拡大とする。この場合、一般に$D(L/K)$は有限次元のベクトル空間ではない。そこで適当な位相を導入する。$D(L/K)$は$\mathrm{Hom}_K(L, L)$の部分環だから、先ず後者にKrull topologyとよばれる位相を導入しよう。

Definition. EをLとKの中間体で、$[E:K]<\infty$なるものとする。このとき、0の基本近傍系として、$\mathrm{Hom}_E(L, L)$の形の集合から成るものをとる。

いいかえると、$f, g \in \mathrm{Hom}_K(L, L)$が近いとは、Lの有限個の元$x_1, \cdots, x_n$が存在して、$f(x_i)=g(x_i)$ $(1 \leq i \leq n)$となるときをいう。この位相に関して$\mathrm{Hom}_K(L, L)$は位相環になる。

$D(L/K)$の位相は、$\mathrm{Hom}_K(L, L)$のそれから誘導されたものとする。

Theorem 7. A は L を含む $\mathrm{Hom}_K(L,L)$ の部分環で $Z(A)=K$ をみたすものとする。このときには、A は $\mathrm{Hom}_K(L,L)$ の dense subset である。特に、$D(L/K)$ は $\mathrm{Hom}_K(L,L)$ の dense subset である。

証明のためには次のことが必要である。

Density Theorem. A を環とし、M を semi-simple left A-module、b を M の bicommutant B の元とする。このときには、M の有限個の元 $x_1,\cdots,x_n$ に対して、A の元 a で $ax_i=bx_i$ $(1\leq i\leq n)$ をみたすものが存在する。

証明については、[1], Chap. 8, §4, n°2 を見よ。

Theorem 7 の証明. L を left A-module と見なし、その commutant を C、bicommutant を B と表わす。仮定によって、L の元による homothety は A に含まれる。したがって L は simple A-module で、$c\in C$ は L の L-linear endomorphism でなければならない。よって c は L の元と考えられる。$c\in K$ となることを示そう。$c\notin K$ とすると、Theorem 2 によって $Dc\neq cD$ となる L/K の high order derivation が存在する。このときには、$c\notin C$。したがって、$C=K$ となり $B=\mathrm{Hom}_K(L,L)$ を得る。かくして Density Theorem と Theorem 3 から我々の主張を得る。

Remark. L が K 上有限次ならば、上に導入された位相は離散位相で、再び $D(L/K)=\mathrm{Hom}_K(L,L)$ を得る。(cf. Theorem 4) proposition 8. F を L と K の中間体とすると、$Hom_F(L,L)$ は $Hom_K(L,L)$ において closed である。

証明. f を $Hom_F(L,L)$ の閉包の元とする。a, x をそれぞれ F, L の任意の元とする。このときには $g \in Hom_F(L,L)$ で、部分体 $K(x, ax)$ の上では $f=g$ となるものが存在する。このときには、$f(ax) = g(ax) = ag(x) = af(x)$ となり、f は F-linear となる。

次に L/K の中間体と、L を含む $D(L/K)$ の closed subrings の間の対応について調べよう。

Theorem 9. L/K の中間体と、L を含む $D(L/K)$ の closed subrings とは1対1に対応する。中間体 F には subring $D(L/F)$ が対応し、closed subring A には中間体 $Z(A)$ が対応する。

証明. 中間体 F が与えられたとすると、$D(L/F) = D(L/K) \cap Hom_F(L,L)$ で、proposition 8 によって $D(L/F)$ は $D(L/K)$ の closed subring である。逆に A を $D(L/K)$ の closed subring とすると、$Z(A) = F$ が L と K の中間体になることは明らかである。これらの対応が互いに他方の逆対応であることは容易に証明される。

Theorem 10. E_i $(i=1,2)$ を L と K の中間体とする。このときには,

(1) $D(L/E_1 \cap E_2) = D(L/E_1) \cup D(L/E_2)$

(2) $D(L/E_1 \cup E_2) = D(L/E_1) \cap D(L/E_2)$

が成立する。逆に A_i $(i=1,2)$ を L を含む $D(L/K)$ の closed subrings とすると, 次の等式を得る。

(3) $Z(A_1 \cap A_2) = Z(A_1) \cup Z(A_2)$

(4) $Z(A_1 \cup A_2) = Z(A_1) \cap Z(A_2)$.

証明. (2), (4) は明らかである。(1) は (4) から証明される。$A_i = D(L/E_i)$ $(i=1,2)$ とおく。すると (4) によって, $Z(A_1 \cup A_2) = Z(A_1) \cap Z(A_2) = E_1 \cap E_2$ となる。したがって, Theorem 9 によって, $D(L/E_1 \cap E_2) = A_1 \cup A_2$ を得る。(3) は (2) から上と同様にして証明される。

次に Theorem 7 の応用を与える。

Proposition 11. I を contraction homomorphism $L \otimes_K L \to L$ の kernel とする。このときには, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = \{0\}$ となる。

先ず次の lemma を証明する。

Lemma 12. M を $L \otimes_K L^P$ の left L-subspace とする。このときには, $\mathrm{Hom}_L(L \otimes_K L/M, L) = N$ は $\mathrm{Hom}_K(L, L)$ の closed subspaceである。ここに、isomorphism $\varphi : \mathrm{Hom}_L(L\otimes_K L, L) \cong \mathrm{Hom}_K(L, L)$, $\varphi(f)(x) = f(1\otimes x)$ によって、$\mathrm{Hom}_K(L, L)$ を $\mathrm{Hom}_L(L\otimes_K L, L)$ と同一視する。

証明. $f\in \mathrm{Hom}_K(L,L)$ とし、$f^* = \varphi^{-1}(f)$ とおく。$f\in \overline{\varphi(N)}$ と仮定する。このとき $f^*(M) = 0$ となることを証明すればよい。$\sum_i x_i\otimes y_i$ を M の任意の元とする。$f\in\overline{\varphi(N)}$ だから $g\in\varphi(N)$ で $f(y_i) = g(y_i)$ $(1\leq i\leq n)$ をみたすものが存在する。したがって、$f^*(\sum_i x_i\otimes y_i) = \sum_i x_i f(y_i) = \sum_i x_i g(y_i) = g^*(\sum_i x_i\otimes y_i) = 0$.

proposition 11 の証明. $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n$ とおく。上で定義した φ を使って、$D(L/K) \subset \varphi(\mathrm{Hom}_L(L\otimes_K L/M, L)) \subset \mathrm{Hom}_K(L, L)$. $D(L/K)$ は $\mathrm{Hom}_K(L,L)$ で dense だから、$\varphi(\mathrm{Hom}_L(L\otimes_K L/M, L))$ も $\mathrm{Hom}_K(L,L)$ で dense である。一方これは Lemma 12 によって closed であるから、$\mathrm{Hom}_L(L\otimes_K L/M, L) = \mathrm{Hom}_L(L\otimes_K L, L)$ でなければならない。したがって、$M = 0$ となる。

proposition 13. F を L, K の中間体で、$[F:K]<\infty$ とする。M を finite L-module とすると、任意の $D\in D_0^{(n)}(F/K, M)$ は、$L/K \to M$ なる high order derivation に拡張される。

証明. $M = L$ の場合に証明すれば十分である。F は K-vector space として L の直和因子だから、D は $\mathrm{Hom}_K(L, L)$ の元 f に拡張される。$D(L/K)$ は $\mathrm{Hom}_K(L,L)$ で dense で、$[F:K]<\infty$ だから

$D(L/K)$の元Δで、$\Delta|F=f|F=D$となるものが存在する。Δが求めるものである。

Remark. 一般に、拡張された high order derivation の次数はもとの high order derivation の次数より大きい。

§3. $D_0^{(n)}(K/k)$の生成元について.

以後考える体は特に断らない限り標数pであるとする。

Lemma 14, proposition 15, 16 は証明なしに述べる。証明については、[4]を参照されたい。

DをK/kのq次のderivationとし、$\alpha\in kK^{p^i}$とすると、$[D,\alpha]$は$q-p^i$次以下の high derivation である。([3]). したがって特に$q\leqq p^i$ならば、$[D,\alpha]=0$となる。これから直ちに次のことが分る。

Lemma 14. DをK/kのq次のderivationとする。もしも$q<p^i$ならば、DはkK^{p^i}-linearである。

K/kを指数eの有限次純非分離拡大とする。次のようなKの部分体の列を考える。

$$k\subset K_{e-1}\subset K_{e-2}\subset\cdots\subset K_1\subset K,$$

ここに、$K_i=kK^{p^i}\ (1\leqq i\leqq e-1)$である。便宜上$K=K_0$, $k=K_e$とおく。

$A_i(K/k) = \{ D \in D_0^{(p^i)}(K/k) \mid D(K_i) = 0 \}$ $(i=0,1,\cdots,e-1)$ とおく。特に $A_0 = \{0\}$ である。

$G_i(K/k) = D_0^{(p^i)}(K/k) / A_i(K/k)$ $(0 \leq i \leq e-1)$ とおく。

$A_i(K/k)$，したがって $G_i(K/k)$ は K 上の left vector space である。A_i, G_i 等の次元は left K-Vector spaces としての次元を意味するものとする。さらに，$G(K/k) = \sum_{i=0}^{e-1} G_i(K/k)$（直和）とおく。

proposition 15. K-vector space として，$G_i(K/k) \cong D_0^{(1)}(K_i/k, K)$. 特に，$[G_i(K/k) : K] = \log_p [K_i : K_{i+1}]$. よって，$[G(K/k) : K] = \log_p [K : k]$.

$T = \{\Delta_1, \cdots, \Delta_s\}$ を K/k の high order derivations の集合とする。$\Delta_1, \cdots, \Delta_s$ の非可換な単項式の K 上の 1 次結合全体の集合を $K\langle T\rangle$ によって表わす。$D_0(K/k)$ (or $D_0^{(n)}(K/k)$) が，K 上 $T = \{\Delta_1, \cdots, \Delta_s\}$ によって生成されるとは，$D_0(K/k) = K\langle T\rangle$ (or $D_0^{(n)}(K/k) = K\langle T\rangle$) となるときをいう。

proposition 16. K/k を指数 e の有限次純非分離拡大とする。$T^{(i)} = \{\Delta_j^{(p^i)}\}_{1 \leq j \leq s_i}$ を，K/k の high order derivations で，その residue classes $\{\bar{\Delta}_j^{(p^i)}\}_{1 \leq j \leq s_i}$ が，$G_i(K/k)$ の K-basis になるものとする。$(0 \leq i \leq e-1)$. このときには，$D_0(K/k)$ は K 上 $\{T^{(i)}, 0 \leq i \leq e-1\}$ によって生成される。

Remark. proposition 16 と同じ仮定の下に．次のことが容易に証明される．即ち $p^{f-1} \leq n < p^f$ ならば．K/k の n 次の derivation は．$K<T^{(0)}, T^{(1)}, \cdots, T^{(f-1)}>$ に含まれる．

次に我々は K が k の finitely generated separable extension の場合を考える．

Theorem 17. K, F を共に k を含む体とし．K は F 上 separably algebraic とする．M を K-module とする．このときには．$F/k \to M$ なる q 次の derivation はすべて一意的に $K/k \to M$ なる q 次の derivation に拡張される．いいかえると．$K \otimes_F \Omega_k^{(q)}(F) \cong \Omega_k^{(q)}(K)$ である．

証明．まず拡張の一意性を証明しよう．[3] から次の2つの完全列が存在する．

(1) $K \otimes_F \Omega_k^{(q)}(F) \longrightarrow \Omega_k^{(q)}(K) \longrightarrow \Omega_k^{(q)}(K/F) \longrightarrow 0.$

(2) $\Omega_k^{(q-1)}(F) \otimes_F \Omega_k^{(q-1)}(K/F) \longrightarrow \Omega_k^{(q)}(K/F) \longrightarrow \Omega_F^{(q)}(K) \longrightarrow 0.$

K は F 上 separably algebraic だから $\Omega_F^{(q)}(K) = 0$ $(q \geq 1)$ である．このときには (2) を繰返し使って．$\Omega_k^{(q)}(K/F) = 0$ $(q \geq 1)$ を得る．したがって．(1) から全射：

$$K \otimes_F \Omega_k^{(q)}(F) \xrightarrow{\varphi} \Omega_k^{(q)}(K) \longrightarrow 0$$

を得る．この dual を考えて．単射：

$$0 \to D_0^{(q)}(K/k, M) \xrightarrow{\varphi^*} D_0^{(q)}(F/k, M),$$

を得る。これは拡張の一意性を意味する。

次に実際に拡張が可能であることを証明しよう。このためには φ^* が全射、したがって φ が単射であることを証明すればよい。K/F は有限次ガロア拡大として一般性を失わない。このとき次のことを証明すればよい。

x_i, y_i $(1 \leq i \leq n)$ を F の元として、$\sum_i x_i \delta^{(q)}_{K/k}(y_i) = 0$ と仮定する。このときには $\Omega^{(q)}_k(F)$ において $\sum_i x_i \delta^{(q)}_{F/k}(y_i) = 0$ となる。

次の完全列の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & J \arrow[r] \arrow[u] & K \otimes_F K \arrow[r, "\varphi"] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_K \arrow[r] \arrow[u] & K \otimes_k K \arrow[r, "\psi"] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0 \\
 & \hat{I}_F \arrow[r, equal] \arrow[u] & \hat{I}_F \arrow[u] & & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

ここに、φ, ψ は contraction homomorphisms で、$\hat{I}_F$ は $\{1 \otimes y - y \otimes 1, y \in F\}$ の形の元によって生成される $K \otimes_k K$ のイデアルを表わす。

仮定によって、$\sum_i x_i (1 \otimes y_i - y_i \otimes 1) \equiv 0 \ (I_K^{q+1})$ である。
$\hat{I}_F^{q+1} \cap (F \otimes_k F) = I_F^{q+1}$ だから、$\sum_i x_i (1 \otimes y_i - y_i \otimes 1) \equiv 0 \ (\hat{I}_F^{q+1})$

となることを証明すればよい。但し I_F は contraction homomorphism: $F\otimes_k F \to F$ の kernel である。K は F の有限次分離拡大だから $J=J^2$ で、J は finite basis をもつ。したがって J の元 γ で $\gamma\equiv 1\ (J)$, $\gamma J=0$ をみたすものが存在する。c を I_K の元で γ の上に写像されるものとする。このとき $c-1=b$ は $\hat{I}_F$ に含まれ $cI_K\equiv 0\ (\hat{I}_F)$ となる。ところが $\sum_i x_i(1\otimes y_i - y_i\otimes 1)\equiv c$ (I_K^{q+1}) だから、$c^{q+1}(\sum_i x_i(1\otimes y_i - y_i\otimes 1))$ は $\hat{I}_F^{q+1}$ に含まれる。$\sum_i x_i(1\otimes y_i - y_i\otimes 1)\in I_F^q$ とすると、

$$\sum_i x_i(1\otimes y_i - y_i\otimes 1)\equiv (1+b)^{q+1}\left(\sum_i x_i(1\otimes y_i - y_i\otimes 1)\right)$$
$$= c^{q+1}\left(\sum_i x_i(1\otimes y_i - y_i\otimes 1)\right)\equiv 0\ \ (\hat{I}_F^{q+1}).$$

したがって、我々の主張は q に関する帰納法によって証明される。

K/k を finitely generated separable extension とし、$t_1,\cdots,t_n$ を K/k の分離超越基とする。このときには、Theorem 17 から

$$\Omega_k^{(q)}(K)\cong K\otimes_{k(t)}\Omega_k^{(q)}(k(t)).$$

一方 [3], II−10 から、

$$\Omega_k^{(q)}(k(t))\cong k(t)\otimes_{k[t]}\Omega_k^{(q)}(k[t]).$$

したがって、$\Omega_k^{(q)}(K)\cong K\otimes_{k[t]}\Omega_k^{(q)}(k[t])$ となる。

かくして、K/k の q 次の derivations を考えるには、$k[t_1,\cdots,t_n]/k$ の q 次の derivations を考えれば十分である。ところで、$\Omega_k^{(q)}(k[t])$

は $k[t]$ 上の free module で $\delta^{(q)}(M_\lambda)$ ($\delta^{(q)}=\delta^{(q)}_{k[t]/k}$ で. $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は次数が q 以下の単項式全体) がその basis になることが分っている。2つの場合に分けて考える。

(I) Kの標数が0の場合.

∂_i を t_i に関する partial derivation とすると. $D_0^{(q)}(k[t]/k)$ の元は $\partial_1^{a_1}\partial_2^{a_2}\cdots\partial_n^{a_n}$ ($1\leqslant\Sigma a_i\leqslant q$) の形の high order derivations の1次結合として表わされる。

(II) Kの標数が $p>0$ の場合.

f を $p^{f-1}\leqslant q<p^f$ なる整数とすると. 次のように定義される high order derivations $\partial_i^{(s)}$ ($1\leqslant i\leqslant n$, $0\leqslant s<f$) が $D_0^{(q)}(k[t]/k)$ の生成元になる。

$$\partial_i^{(s)}(t_1^{a_1}\cdots t_n^{a_n})=\binom{a_i}{p^s}t_1^{a_1}\cdots t_i^{a_i-p^s}\cdots t_n^{a_n}.$$

これは容易に証明される。上に定義された $\partial_i^{(s)}$ は p^s 次の high order derivations である。

上のことをまとめると.

proposition 18. K を k の finitely generated separable extension とする。Kの標数が0ならば. $D_\circ(K/k)$ は $D_0^{(1)}(K/k)$ によって生成される。Kの標数が $p>0$ ならば. $D_\circ(K/k)$ は $D_0^{(p^i)}(K/k)$ ($i=0,1,2,\cdots$) によって生成される。

参考文献

[1] N. Bourbaki, Algèbre, Hermann, Paris.

[2] N. Jacobson, Lectures in abstract algebra III, Van Nostrand, Princeton New Jersey 1964.

[3] Y. Nakai, High order derivations I, to appear.

[4] Y. Nakai, K. Kosaki and Y. Ishibashi, High order derivations II, to appear.