数理解析研究所講究録
第94巻 1970年 76-92

Hopf algebra の構造について

東京教育大・理　遠藤静男

序.　最近 M.E.Sweedler, R.G.Larson 等により，Hopf algebra の構造，性質について深い考察がなされ，多くの興味ある結果が得られた。この小論の主たる目的は，その中の一つである Larson-Sweedler [3] で得られた有限次元 Hopf algebra の Frobenius 性，対称性に関する結果の紹介とその一般化および精密化である。特に [3] における対称性，分離性の特徴づけが不完全であることを指摘し，完全な結果を与える。

体の上の cocommutative Hopf algebra の構造は，Kostant の定理 ([8])，Sweedler の定理 ([7]) により，ある意味で完全に決定されている。しかし一般の可換環上ではそれらに対応するものは知られていない。Dedekind domain 上の cocommutative Hopf algebra の構造を決定する試みとして，[4] の結果を補うことにより，有限群の group algebra が自明でない Hopf order をもたないための条件を完全に決定する。

§1. 準備

この小論を通して、Rを単位元をもつ可換環とする。

R-module A に対して、R-homomorphisms $M_A : A\otimes_R A \longrightarrow A$, $\delta_A : R \longrightarrow A$ で、図形

$$
\begin{tikzcd}
A\otimes_R A\otimes_R A \arrow[r, "M_A\otimes I"] \arrow[d, "I\otimes M_A"'] & A\otimes_R A \arrow[d, "M_A"] \\
A\otimes_R A \arrow[r, "M_A"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R\otimes_R A \arrow[r, "\delta_A\otimes I"] \arrow[dr] & A\otimes_R A \arrow[d, "M_A"] & A\otimes_R R \arrow[l, "I\otimes\delta_A"'] \arrow[dl] \\
 & A &
\end{tikzcd}
$$

を可換にするものがあるとき、(A, M_A, δ_A) を R-algebra といい、M_A を A の multiplication, δ_A を A の unit という。以下において、$M_A(a\otimes a') = aa'$, $a, a' \in A$ で表わすことにする。これは通常の単位元をもつ associative R-algebra の定義に外ならない。このことの dual として、R-coalgebra の定義を与えよう。

R-module C に対して、R-homomorphisms $\Delta_C : C \longrightarrow C\otimes_R C$, $\eta_C : C \longrightarrow R$ で、図形

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta_C"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & C\otimes_R C \arrow[d, "I\otimes\Delta_C"] \\
C\otimes_R C \arrow[r, "\Delta_C\otimes I"] & C\otimes_R C\otimes_R C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl] \arrow[d, "\Delta_C"] \arrow[dr] & \\
R\otimes_R C & C\otimes_R C \arrow[l, "\eta_C\otimes I"'] \arrow[r, "I\otimes\eta_C"] & C\otimes_R R
\end{tikzcd}
$$

を可換にするものがあるとき、(C, Δ_C, η_C) を R-coalgebra といい、Δ_C を C の comultiplication, η_C を C の counit という。C の元 c について $\Delta_C(c) = \sum c_{(1)}\otimes c_{(2)}$ というような

記法を用いることにする。 R-algebra の場合の dual として、R-coalgebras の homomorphism, R-coalgebras の Tensor products, R-coalgebra 上の comodule, comodules の間の準同型等が定義される。

R-module B が (μ_B, δ_B) により R-algebra であり、また (Δ_B, η_B) により R-coalgebra となっていて、しかも μ_B, δ_B がともに R-coalgebra homomorphism となっているとき、$(B, \mu_B, \delta_B, \Delta_B, \eta_B)$ は R-bialgebra であるという。 R-bialgebra B が algebra として commutative のとき、単に commutative といい、$b \in B$ についてつねに $\Delta_B(b) = \sum b_{(1)} \otimes b_{(2)} = \sum b_{(2)} \otimes b_{(1)}$ となるとき、cocommutative であるということにする。

R-bialgebra B の R-endomorphism ring $Hom_R(B, B)$ に

$$f * g = \mu_B(f \otimes g)\delta_B, \quad f, g \in Hom_R(B, B)$$

により新しく multiplication $*$ を定めると、$*$ についても、$Hom_R(B, B)$ は R-algebra となる。明らかにその単位元は $\delta_B \eta_B$ である。 R-algebra B について B の恒等写像 1_B が $*$ について逆元 γ_B をもつとき、B を Hopf R-algebra といい、γ_B をその antipode ということにする。

B を R-bialgebra とするとき、$J_B = Ker\, \eta_B$ は B の two-sided ideal となる。 J_B の right annihilator を $I_B^{(r)}$, left annihilator を $I_B^{(r)}$ であらわし、$I_B^{(l)}$, $I_B^{(r)}$ の元をそれぞれ、B の left integral, right integral ということにする。

§ 2. Hopf algebra の integral, Frobenius 性

B を R-bialgebra とし、R-module M が

$$\varphi_M : M\underset{R}{\otimes} B \longrightarrow M, \qquad \psi_M : M \longrightarrow M\underset{R}{\otimes} B$$

により right B-module かつ right B-comodule になっているとする。いま図形

$$\begin{tikzcd}
M\underset{R}{\otimes} B \arrow[r, "\varphi_M"] \arrow[d, "\psi_M\otimes\Delta_B"] & M \arrow[r, "\psi_M"] & M\underset{R}{\otimes} B \\
M\underset{R}{\otimes} B\underset{R}{\otimes} B\underset{R}{\otimes} B \arrow[rr, "1\otimes t\otimes 1"] & & M\underset{R}{\otimes} B\underset{R}{\otimes} B\underset{R}{\otimes} B \arrow[u, "\varphi_M\otimes M_B"']
\end{tikzcd}$$

(t は transpose)

が可換のとき、M を right B-bimodule ということにする。

V を R-module とし、$V\underset{R}{\otimes} B$ を $\varphi(v\otimes b'\otimes b) = v\otimes b'b$, $b, b'\in B$, $v\in V$ により right B-module とし、$\psi(v\otimes b) = v\otimes\Delta b$ により right B-comodule とすると、$V\underset{R}{\otimes} B$ は right B-bimodule となる。ところが Hopf R-algebra に対しては bimodule はこのような型のものしかないことがわかる。すなわち、

<u>定理 1</u> ([3], [8]). <u>H を Hopf R-algebra とする。right H-bimodule M に対して $M^H = \{u\in M \mid \psi(u) = u\}$ とおくとき H-bimodules として $M^H\underset{R}{\otimes} B \cong M$ となる。この</u>

同型は $u\otimes h \longrightarrow u\cdot h$, $u\in M^H$, $h\in H$ で与えられる。

実際 $\rho = \varphi_M(1\otimes\gamma_H)\Psi_M$ とおくと、$\rho(M)\subseteq M^H$ であり、更に $\alpha=(\rho\otimes 1)\Psi_M$ とおくと、α が定理中の map の逆 map となることが示されて、証明が終る。

これから後は R-module として有限生成射影的 (R-f.g. projective) であるような R-bialgebra B について考える。このとき、$B^* = \mathrm{Hom}_R(B, R)$ も R-bialgebra になる。実際

$$M_{B^*} = (\Delta_B)^* : B^*\otimes_R B^* \cong (B\otimes_R B)^* \longrightarrow B^*, \quad \varepsilon_{B^*} = (\eta_B)^* : R \longrightarrow B^*,$$

$$\Delta_{B^*} = (M_B)^* : B^* \longrightarrow B^*\otimes_R B^* \cong (B\otimes B)^*, \quad \eta_{B^*} = (\varepsilon_B)^* : B^* \longrightarrow R$$

とおけばよい。そして B, B^{**} は bialgebra として isomorphic である。また B が Hopf R-algebra なら、B^* も Hopf R-algebra になる。

B^* の元 f, B の元 b について $(f\circ b)(b') = f(bb')$, $b'\in B$ とおくことにより、B^* は right B-module となる。また $(\Delta_B)^* : B^*\otimes_R B^* \longrightarrow B^*$ により B^* は left B^*-module となるが、これより、$\tilde{\Psi} : B^* \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(B^*, B^*)$ を $\tilde{\Psi}(f)(g) = g\cdot f$ により定め、これと $\rho^{-1}(f\otimes b)(g) = g(b)f$ によって定まる isomorphism $\rho : \mathrm{Hom}_R(B^*, B^*) \xrightarrow{\sim} B^*\otimes_R B$ を合成したものを Ψ とすると、B^* は right B-comodule となる。このとき、B^* が right B-bimodule になることも容易にわかる。ここで $B^{*B} \ni f \Longleftrightarrow \tilde{\Psi}(f) = \rho^{-1}(f\otimes 1)$

$\Longleftrightarrow$ 任意の $g \in B^*$ で $g \cdot f = \eta_{B^*}(g) f = g(1) f$

$\Longleftrightarrow$ $f \in I^{(l)}_{B^*}$

よって $B^{*B} = I^{(l)}_{B^*}$ となる。

これより、つぎの基本定理が示される。

定理2（[3]）. R-f.g. projective な R-bialgebra B に対して、つぎの条件は同値である。

(1) B は antipode をもつ。

(2) R の各極大イデアル $\mathfrak{m}$ について、$B_{\mathfrak{m}}$ は antipode をもつ。

(3) $I^{(l)}_{B^*}$ は rank 1 の R-projective で、$B^* = I^{(l)}_{B^*} B$。

(4) right B-bimodule M についてつねに $M^B \otimes_R B \cong M$。

(1) $\Longrightarrow$ (4) は定理1、(4) $\Longrightarrow$ (3) は上述の考察でよい。また、(3) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (1) は (3) $\Longrightarrow$ (1) を $\mathrm{Pic}\, R = \{1\}$ のときに示せば、それから容易に示せる。そこで $\mathrm{Pic}\, R = \{1\}$ と仮定する。このとき $I^{(l)}_{B^*} = R f_0$, $B^* = f_0 B = B f_0$ である。よってある $b_0 \in B$ で $b_0 \cdot f_0 = 1_{B^*} = \eta_B$ となるものがある。そこで $\gamma_{B^*}(g)(b) = f_0(b \cdot (b_0 \leftarrow g))$ とおくと、γ_{B^*} は B^* の antipode となる。ここで $b_0 \leftarrow g$ は $(b_0 \leftarrow g)(f) = (g \cdot f)(b_0)$, $f \in B^*$ なる B の元を意味する。$\gamma_B = (\gamma_{B^*})^*$ とおくと γ_B は B の antipode となり証明は終る。

定理2より、R-f.g. projective な Hopf R-algebra は local には Frobenius (1. Frobenius) であることがわかる。

A を Frobenius R-algebra とするとき $A^* = A\lambda^*$ となる A^* の元 λ^* を A^* の non-singular form といい，特に A が Hopf R-algebra で $R\lambda^* = I^{(\ell)}_{A^*}$ $(= I^{(r)}_{A^*})$ のとき，A^* の non-singular left (right) integral ということにする。

§3. Hopf algebra が symmetric となるための条件

A を R-f.g. projective な R-algebra とする。いま A^* の元 λ^* で $\lambda^*(a_1 a_2) = \lambda^*(a_2 a_1)$, $a_1, a_2 \in A$ となるものを A^* の symmetric form といい，A^* に non-singular symmetric form があるとき，A を symmetric R-algebra ということにする。R の各極大イデアル m について A_m が symmetric R_m-algebra となるとき，A を l. symmetric R-algebra ということにする。

H を R-f.g. projective な Hopf R-algebra とし，$h^* \in H^*$, $h \in H$ とするとき，$h^*_r(h_1)(h_2) = h^*(h_2 h_1)$ により $h^*_r : H \longrightarrow H^*$ を，$h_\ell(h_1^*)(h_2^*) = (h \leftarrow h_1^*)(h_2^*) = h_1^* \cdot h_2^*(h)$ により，$h_\ell : H^* \longrightarrow H^{**} \cong H$ を定める。いま $I^{(\ell)}_{H^*} \cong R$ なら，H^* に non-singular left integral λ^* があり，これに対して $\lambda \cdot \lambda^* = \eta_H$ となるような H の元 λ が定まる。この λ は H の non-singular left integral となることが容易にわかり，更に

$$\lambda^*(h_1 h_2) = [\lambda_{\ell}^{-1}(h_1) \bullet \gamma \lambda_{\ell}^{-1}(h_2)](\lambda), \quad h_1, h_2 \in H$$

なる関係式を得る。

<u>定理3</u> ([3]). <u>R-f.g. projective な Hopf R-algebra H について，つぎの条件は同値である。</u>

(1) $\underline{I_H^{(\ell)} = I_H^{(r)}}$

(2) <u>$I_{H^*}^{(\ell)}$ の元 λ^* に対してつねに</u>

$$\underline{\lambda^*(h_1 h_2) = \lambda^*(h_2 \gamma^2(h_1)), \quad h_1, h_2 \in H}$$

<u>特に $I_{H^*}^{(\ell)}$ の元がすべて symmetric となるための必要十分条件は $I_H^{(\ell)} = I_H^{(r)}$ かつ $\gamma^2 = 1_H$ のことである。</u>

(1)を仮定すると，R が local の場合に，non-singular な λ^* に対して $\lambda \cdot \lambda^* = \eta_H$ となる λ は right integral でもある。このとき $\gamma(\lambda)$ は left integral となること，および，上述の関係式を用いて (2) が示される。(2) $\Longrightarrow$ (1) は比較的に容易である。

もし $I_{H^*}^{(\ell)} \cong R$ なら (2) は γ^2 が H^* の left non-singular integral λ^* に属する Nakayama automorphism のことを意味している。このことに注意すると，つぎの定理が容易に導びかれる。

<u>定理4</u>. <u>R-f.g. projective な Hopf R-algebra H に対して，つぎの条件は同値である。</u>

(1) <u>$I_H^{(\ell)} = I_H^{(r)}$ であり，かつ γ^2 が local に inner</u>

automorphism である。

(2) H が 1. symmetric である。

これと R が local ring のとき示せばよい。(1) ⟹ (2) は定理3と上の注意から容易にわかる。いま (2) を仮定すると，H^* に non-singular symmetric form μ^* がある。$I_H^{(\ell)}$ の元 λ に対して，$\mu^*(\lambda h_1h_2) = \mu^*(h_1h_2\lambda) = \mu^*(\mu_H(h_1)\mu_H(h_2)\lambda) = \mu^*(\mu_H(h_1)\lambda h_2)$ より $\lambda h_1 = \mu_H(h_1)\lambda$，よって $\lambda \in I_H^{(r)}$。すると定理3より，H^* の non-singular left integral に対応する automorphism は γ^2 であり，H が symmetric より γ^2 は inner でなくてはならない。これで (2) ⟹ (1) が示された。

H が commutative または cocommutative のときには，$\gamma_H^2 = 1_H$ となることが知られている（[8]）。しかし一般には，γ_H はどのような order でも持ちうることもわかっている（[5]）。上の証明に関連して antipode について，つぎの結果が示せることを注意しておく。$I_H^{(\ell)} = I_H^{(r)}$ かつ $I_{H^*}^{(\ell)} = I_{H^*}^{(r)}$ なら，$\gamma_H^4 = 1_H$。

§4. Semi-simple Hopf algebras

R-algebra A について，A-modules の monomorphism で，R-split するものが，つねに A-split するとき，A を semi-simple R-algebra という。semi-simple R-algebra A で，

任意の commutative R-algebra S について $S \otimes_R A$ が S 上 semi-simple となるものを，separable R-algebra という。A を separable R-algebra，C をその center とするとき，$Tr_{A/C}(1)$ が C の unit となるなら，A を strongly separable R-algebra ということにする。

定理 5（[3]）．R-f.g. projective Hopf R-algebra H について，つぎの条件は同値である．

(1) R が left H-module として projective.

(2) $\eta_H(I_H^{(\ell)}) = R$.

(3) H が semi-simple.

(4) H が separable.

(2) ⟹ (3) のみ示そう。(2) を仮定すると，H の left integral λ で $\eta_H(\lambda) = 1$ となるものがある。いま $i: N \longrightarrow M$ を H-modules の monomorphism で R-split するものとすると，R-homomorphism $p: M \longrightarrow N$ で $p \cdot i = 1_N$ となるものがある。ここで

$$E(p)(m) = \sum p(m\lambda_{(1)})\gamma(\lambda_{(2)}), \quad m \in M$$

とおくと，$E(p)$ は H-homomorphism で $E(p) \cdot i = 1_N$ となり i が H-split することがわかる。

Frobenius R-algebra の左，右正則表現は同値であるため，それらの trace は一致する。したがって 1. Frobenius R-algebra でも一致し，それを $Tr_{A/R}$ のように表わすことにする。

H を R-f.g. projective な Hopf R-algebra で，$\gamma^2 = 1_H$ なるものとすると，$Tr_{H/R}$ が H^* の two-sided integral のことが示される（[3]）。

定理 6. R-f.g. projective Hopf R-algebra H について，つぎの条件は同値である。

(1) $Tr_{H/R}$ が H^* の non-singular left integral.

(2) $Tr_{H/R}(H) = R$，かつ $\gamma_H^2 = 1_H$.

(3) H が strongly separable，かつ $\gamma_H^2 = 1_H$.

特に $\gamma_H^2 = 1_H$ のとき，つぎの条件は同値である。

(1)′ $\mathrm{rank}_R H$ が R の unit。

(2)′ H，H^* がともに strongly separable.

H が strongly separable であるのは $H^* = H\,Tr$ のときに限ることが知られている。Tr は symmetric form であるため，(1) ⟹ (3) は定理 3 から直接示される。(3) ⟹ (2) はほとんど自明。また (2) ⟹ (1) は定理の前に述べたことから示される。

§ 5. 体の上の Hopf algebra が symmetric となるための条件

ここではまず Kostant の定理，Sweedler の定理を紹介しよう。

体 k 上の Hopf algebra H で，simple subcoalgebra がすべて一次元のものを pointed といい，二つの non-zero subcoalgebra がつねに non-zero intersection をもつようなものを irreducible ということにする。H の元 g で $\Delta(g) = g \otimes g$ となるものを grouplike element といい，H の元 h で $\Delta(h) = h \otimes 1 + 1 \otimes h$ となるものを primitive element という。H の grouplike element 全体，primitive element 全体の集合をそれぞれ $G(H)$，$P(H)$ で表わすことにする。$G(H)$ は明らかに H の muitiplication によって group になる。

以下 H を cocommutative Hopf k-algebra とする。H の Hopf subalgebra で irreducible なものの中に最大のものがある。それを H' で表わすことにする。このとき $g \in G(H)$ を $g \cdot h' = gh'g^{-1}$，$h' \in H'$ により，H' に作用させることができる。ところで $kG(H) \# H'$ により，$kG(H) \underset{k}{\otimes} H'$ の algebra structure を

$$M(g_1 \otimes h_1 \otimes g_2 \otimes h_2) = g_1 g_2 \otimes (g_2 \cdot h_1) h_2, \quad g_1, g_2 \in G(H),\ h_1, h_2 \in H'$$

に変えてできた Hopf k-algebra とする。

<u>定理 7</u> (Kostant, [8]). <u>H を cocommutative, pointed Hopf k-algebra とするとき，$g \otimes h \longrightarrow gh$，$g \in G(H)$，$h \in H'$ により，Hopf algebra として $kG(H) \# H' \cong H$.</u>

これより，irreducible Hopf subalgebra H' の構造が決定できれば H の構造が定まることになる。

pointed, irreducible Hopf k-algebra H の元の列 ${}^0h, {}^1h, \ldots$ $\ldots, {}^th$ (t は無限でもよい) で, 各 $0 \leq n \leq t$ について $\Delta({}^nh) = \sum_{i=0}^{n} {}^ih \otimes {}^{n-i}h$ となるものを, 長さ t の divided powers の列という。明らかに ${}^0h = 1$, ${}^1h \in P(H)$ であり, $i \geq 1$ のとき $\eta_H({}^ih) = 0$ である。 restricted Lie algebra L の restricted universal enveloping を $V(L)$ で表わすことにする ([2]).

このとき有限次元の場合の Sweedler の構造定理はつぎのように与えられる。

定理 8 ([7]). k を標数 $p > 0$ の完全体, H を k 上有限次元の cocommutative, pointed, irreducible Hopf algebra とし, $d = \dim_k P(H)$ とおく。このとき H に divided powers の列

$$\{{}^0h_j, {}^1h_j, \ldots, {}^{p^{s_j}-1}h_j\}, \quad 1 \leq j \leq d$$

で $\{{}^{k_1}h_1 {}^{k_2}h_2 \cdots {}^{k_d}h_d\}$, $0 \leq k_j \leq p^{s_j}-1$ が H の k-basis となるものが存在する。特に $H \cong V(P(H))$ となるのは H が algebra として $P(H)$ で生成されているときに限る。

ここで対称性の問題に戻る。体 k 上有限次元の cocommutative Hopf algebra H について symmetric かどうかを調べるには, k の代数的閉包 $\bar{k}$ をとり, $\bar{k} \otimes_k H$ について調べればよい。$\bar{k}$ 上の cocommutative Hopf algebra はつねに pointed であるので, 定理 7 を利用できる。定理 7 の状態では, H が symmetric

であるための必要十分条件は H' が symmetric であり，かつ H'^{*} の non-singular symmetric form λ^{*} について $\lambda^{*}(h') = \lambda^{*}(gh'g^{-1})$, $h' \in H'$, $g \in G(H)$ となることである。また H を定理8にあるようなものとすると，定理8から $I_{H^{*}}$ を具体的に求めることが可能である。実際

$$\lambda^{*}({}^{k_1}h_1{}^{k_2}h_2 \cdots {}^{k_d}h_d) = \begin{cases} 1 & : k_1 = p^{s_1}-1, \ \ldots\ldots, \ k_d = p^{s_d}-1 \\ 0 & : \text{それ以外} \end{cases}$$

とおくと $I_{H^{*}} = k\lambda^{*}$ となる。[6] において restricted Lie algebra L について $V(L)$ が symmetric となるのは L の各元 l について $Tr_L([l, \ ]) = 0$ のときに限ることが示されている。このことと上述の考察をあわせると，つぎの定理が示される。

<u>定理 9. k を標数 $p > 0$ の代数的閉体，H を k 上有限次元の cocommutative Hopf algebra で $[J(H^{*})]^{p} = 0$ なるものとするとき，つぎの条件は同値である。</u>

(1) <u>H が symmetric.</u>

(2) <u>$G(H)$ の $P(H)$ 上の表現を $R(g)$ とすると，$|R(g)|^{p-1} = 1$, $g \in G(H)$ であり，かつ $Tr_{P(H)}([h', \ ]) = 0$, $h' \in H'$.</u>

一般の場合には，以下に述べるような十分条件しかわかっていない。

H を代数的閉体 k 上有限次元の cocommutative, irreducible

Hopf algebra とする。いま $J_H = J(H)$ なら J_H は H の unique maximal left かつ right ideal であり、H の Frobenius 性より $I_H^{(l)} = I_H^{(r)}$ のことがわかる。すると定理3より H は symmetric となる。$J_H = J(H)$ となるのは $P(H)$ が restricted nilpotent のときに限ることが知られている([3], [7]).

§6. Dedekind domain 上の Hopf algebra

この節では R を Dedekind domain, K をその商体とする。まず group algebra についてよく知られている結果の拡張として、つぎの定理がある。

定理 10. R-f.g. projective Hopf R-algebra H についてつぎの条件は同値である。

(1) H が hereditary ring である。

(2) H が separable R-algebra である。

H が hereditary とすると、$K \otimes_R H$ も hereditary。しかも $K \otimes_R H$ は Frobenius であるので、$K \otimes_R H$ は K-separable となる。このとき R が H-projective のことがわかり、定理5から、H は R-separable となる。(2) $\Longrightarrow$ (1) は自明。

R 上の cocommutative Hopf algebra の構造を決定することは困難な問題であるが、かなり重要な問題に思われる。Larson は[4]において、この方向への試みとして、有限群 G の

group algebra KG に RG 以外には Hopf order が存在しないための十分条件を与えた。ところが，実は，それは必要条件でもあり，標数 $p>0$ の場合にも一般化できることがわかった（[1]）.

<u>定理 11.</u>　<u>Dedekind domain R, 有限群 G について，つぎの条件は同値である。</u>

(1)　<u>KG には Hopf R-order は RG だけしかない。</u>

(2) (i) <u>R の標数 0 のとき，R における分岐指数 $\geqq q-1$ であるような各有理素数 q について G は non-trivial normal q-subgroup をもたない。</u>　(ii) <u>R の標数 $p>0$ のとき，G は non-trivial normal p-subgroup をもたない。</u>

(1) ⇒ (2) は (2) でないと仮定して実際 RG と一致しない Hopf order を構成することによって示す。(2) ⇒ (1) とともに，大ざっぱにいって cyclic group の場合に帰着できるところが重要な point である。証明はここでは省略する。

なお (1) ⇒ (2) の証明中に l. symmetric であるが symmetric でない Hopf R-algebra の具体例が与えられることに注意しておく。

この定理の特別の場合として，G が non-abelian simple group のときには，どんな Dedekind domain R についても KG には RG 以外には Hopf R-order は存在しないことが

わかるし，また $R = \mathbb{Z}$ のときには G が normal 2-subgroup をもたないときにかぎって，同様のことが起ることがわかる。

最後にこの小論中のいくつかの結果は，光道隆君（東教大大学院）の協力のもとに得られたことを記しておく。

References.

[1] S. Endo, On Hopf orders in group algebras, In preparation.

[2] N.Jacobson, Lie algebras, Interscience, New York, 1962.

[3] R.G. Larson and M. E. Sweedler, An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras, Amer. J. Math., 91(1969), 75-94.

[4] R. G. Larson, Group rings over Dedekind domains, I, J. Algebra 5 (1967), 358-361, II, Ibid. 7(1967),278-279.

[5] ___________, The order of the antipode of a Hopf algebra, Proc. Amer. Math. Soc., 21(1969), 167-170.

[6] J. R. Schue, Symmetry for the enveloping algebra of a restricted Lie algebra, Proc. Amer. Math. Soc., 16(1965), 1123-1124.

[7] M. E. Sweedler, Hopf algebras with one grouplibe element, Trans. A. M. S., 127(1967), 515-526.

[8] _________, Hopf algebras, Benjamin, New York, 1969.