数理解析研究所講究録
第96巻 1970年 112-121

Non-archimedian Banach algebras

東京電機大　鶴見和之

§1. 序

$\mathbb{C}$上の Banach algebra と non-archimedian Banach algebra X over F の間には差がある。例えば，$x \in X$ の spectrum $\sigma(x)$ が空である様に出来ます。又一般に X の maximal ideal M に対して，$X/M \cong F' \supset F$ である，そして，non-archimedian Banach algebra X の maximal ideal space $\mathfrak{M}$ は 0次元である。又 Function algebra に於ては Kaplansky の定理が或る意味で重要である様に思はれます。ここでは基本的事実を述べます。

§2. 定義

F を field with a real valued non-archimedian valuation $|\cdot|$ とする。

F 上のベクトル空間 X が <u>non-archimedian Banach space</u>

$\Longleftrightarrow$ i) 次の性質を持つ $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在する，

① $\|x\| \geqq 0$ for $x \in X$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

② $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ for $\alpha \in F$, $x \in X$,

③ $\|x + y\| \leqq \max(\|x\|, \|y\|)$ for $x, y \in X$,

この $\|\cdot\|$ を norm とよう。

ii) X は norm $\|\cdot\|$ に関して complete である。

commutative algebra X with identity e over F が

<u>non-archimedian Banach algebra</u>

$\Leftrightarrow$ i) X : non-archimedian Banach space over F,

ii) $\|e\| = 1$, $\|xy\| \leqq \|x\| \cdot \|y\|$.

次の notations を用いることにします。

X : non-archimedian Banach algebra over F,

$\sigma(x) := \{\lambda \in F \mid (\lambda - x)^{-1}$ が存在しない$\}$: x の spectrum,

$r_\sigma(x) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}$: x の spectral radius,

$\mathfrak{M}$: X の maximal ideal space,

$X (\ni e)$, ${}^\forall M \in \mathfrak{M}$ に対して，一般に $X/M \cong F' \supset F$ である

$x(M) := x + M$ for ${}^\forall x \in X$, $M \in \mathfrak{M}$.

$X/M \ni x + M = x(M) \longleftrightarrow \alpha \in F'$, α と $x(M)$ とを同一視する，これにより $\sigma(x) = \{x(M) \mid M \in \mathfrak{M}\} \cap F$ となる。

$\|x + M\|_M := \inf_{z \in M} \|x + z\|$ とおくことにより X/M は

non-archimedian Banach algebra with identity e である。
又, $X/M \cong F$, $M \in \mathfrak{M}$ のとき r_σ について次の事が成り立つ
$$r_\sigma(x+y) \leqq \max(r_\sigma(x), r_\sigma(y)).$$

§ 3.

通常の Banach algebra と同様に次の事が成り立つ.
<u>定理 1.</u> X : division algebra (即ち $x \neq 0 \Rightarrow x^{-1} \in X$)
$\sigma(x) = \phi$ for $\forall x \in X \iff X$ と F とは等距離同型.

<u>例 1.</u> F: field with trivial valuation
K: 多項式環の商体 , y : K 上の超越的元
$X := K[y]$ とし, M を X の maximal ideal とすると
X/M は algebra over F で無限個の元を含む.

$X/M \cong F$ for $M \in \mathfrak{M}$ とする. $\mathfrak{M}$ の topology は Gelfond topology とする, 即ち $\forall M \in \mathfrak{M}$ の近傍基は次の形の集合
$$U(M; x_1, \cdots, x_n; \varepsilon) := \{M' \in \mathfrak{M} \mid |x_i(M') - x_i(M)| < \varepsilon, i = 1, \cdots, n\}.$$
ultrametric inequation により, この topology で $\mathfrak{M}$ は 0-dim. Hausdorff space である。
<u>命題.</u> T : 任意の集合, $F(T)$: algebra of all bdd F-valued fts on T, operation は pointwise

$F(T)$ の任意の maximal ideal M が次のものである，即ち，或る $t_0 \in T$ が存在して $M = \{ f \in F(T) \mid f(t) = 0 \}$.

$\Longrightarrow \quad F(T)/M \cong F \quad$ for $^\forall M \in \mathfrak{M}$.

定理２　T : compact, 0-dim, Hausdorff space

$F(T)$: algebra of all continuous F-valued fts on T.

F : nontrivially valued field

$\Longrightarrow$ T と $F(T)$ の maximal ideals とは１対１に対応する，即ち

$$T \ni t \longleftrightarrow M_t = \{ f \in F(T) \mid f(t) = 0 \}$$

証明．　$t \longrightarrow M_t$ は１対１である，これが onto である事を示す。onto でないとする。次の様な $F(T)$ の maximal ideal M が存在する，即ち $^\forall t \in T$ に対して $^\exists f_t \in M$, $f_t(t) \neq 0$. f_t の連続性により，次の様な open set U_t がとれる，即ち $f_t(x) \neq 0$, $x \in U_t$. そうすると $T = \bigcup_{t \in T} U_t$. T は compact であるから有限個の $t_1, \cdots t_n$ がとれ $T = \bigcup_{i=1}^{n} U_{t_i}$. T は 0-dim であるから U_{t_i} は clopen にとれる．　$W_1 := U_{t_1}$, $W_2 := U_{t_2} \setminus U_{t_1}, \cdots, W_j := U_{t_j} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} U_{t_i}$ とおくと，$W_i \cap W_j = \phi$ $(i \neq j)$ で $T = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$.

$$g_i(t) := \begin{cases} 1 & : t \in W_i \\ 0 & : \text{その他} \end{cases} \qquad \text{とおく}$$

函数 g_i は T 上で連続である，即ち $g_i \in F(T)$

$$g(t) := \sum_{i=1}^{n} g_i(t) f_{t_i}(t) \qquad \text{とおく}$$

明らかに $g(t) \in M_t$. $^\forall t \in T$ に対しては,或る i に対して $t \in W_i$ であるから $g(t) = g_i(t) f_{t_i}(t) = f_{t_i}(t) \neq 0$ よって g の逆函数が存在する. 故に $M = F(T)$.

系. T : compact totally disconnected Hausdorff space
$\Longrightarrow$ T と $F(T)$ の maximal ideals とは 1 対 1 に対応する。

定理 3. (Kaplansky の定理) T : compact totally disconnected Hausdorff space, $F(T)$: normed algebra (sup norm) of continuous fts from T into F,
B : closed subalgebra of $F(T)$ containing constants and separating points.
$\Longrightarrow B = F(T)$.

§ 4.

$V := \{\alpha \in F \mid |\alpha| \leq 1\}$: F の valuation ring

$P := \{\alpha \in F \mid |\alpha| < 1\}$: V の maximal ideal

F の residue class field V/P と類似のものを non-archimedian Banach algebra X (with identity e) においても考える。

$V' := \{x \in X \mid \|x\| \leqq 1\}$

$P' := \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$: V' の ideal

次の事が成りたつ

<u>定理4.</u>

P': maximal ideal in V' $\Longleftrightarrow$ $\|x\|=1$ なら x は invertible

<u>証明.</u> $x \in X$, $\|e-x\|<1$ ならば x は invertible で $x^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(e-x)^n$ である事を用いればよい。

<u>系.</u> $\|X\| = \|F\|$, P': maximal ideal in V'.

$\Longrightarrow$ X は体である。

$W'_M := \{x \in X \mid \|x+M\|_M \leq 1\}$, $W' := \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} W'_M$ とおく

明らかに $V' \subseteq W'$ であるが逆の包含関係は成りたたない

<u>例2.</u> F: algebraically closed field with trivial valuation

$X := F[x]$, ${}^\forall f(x) \in X$ に対して, $f(x)$ の norm を次の様に定義す

$\|f(x)\| = \|\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n\| := \max_i (|\alpha_i| c^i)$ 但し $c > 1$.

とすると, $X/M \cong F$ $(M \in \mathfrak{M})$ で $W' = X$, $V' \subsetneq W'$.

<u>例3.</u> X: finite dim. algebra over F with basis $e_1, \cdots, e_n$,

ここで $e_i e_j = 0$ $(i \neq j)$, $e_i^2 = e_i$. ${}^\forall x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ に対して

$\|x\| := \max_i |\alpha_i|$. X には n 個の maximal ideal, $M_1, \cdots M_n$ が

があり, M_i は $e_1, \cdots e_{i-1}, e_{i+1}, \cdots, e_n$ によって generate された ideal.

$X/M_i \cong F$, で $V' = W'$ である.

定理5. $X/M \cong F$ for $M \in \mathfrak{M}$, $W' = V'$,

$\mathfrak{M}$: compact in Gelfond topology.

$\Longrightarrow$ $\gamma_\sigma(x) = \|x\|$.

証明. 明らかに, $\gamma_\sigma(x) \leqq \|x\|$ であるから, $\gamma_\sigma(x) \geqq \|x\|$ を示せばよい. $\gamma_\sigma(x) \leq 1$ とする, $|x(M)| \leq 1$ for $^\forall M \in \mathfrak{M}$. $W' = V'$ であるから, $x \in W'$ に対して, $\|x\| \leq 1$ 若し $\gamma_\sigma(x) < \|x\|$ なら次の様な $^\exists \lambda \in F$.

(*) $\gamma_\sigma(x) = |\lambda| < \|x\|$

$\mathfrak{M}$ が compact であるから, $\overbrace{\sup}^{\gamma_\sigma(x)\text{の}}$ は, 実際或る $M \in \mathfrak{M}$ でとる.

$y := x/\lambda$ とすると $\|x\| \leq |\lambda|$. これは(*)に反する.

よって $\gamma_\sigma(x) = \|x\|$.

系. $W' = V'$ で, $\gamma_\sigma(x) < \|x\|$ なる $x \in X$ が存在する。

$\Rightarrow$ $\mathfrak{M}$: non-compact in Gelfond topology.

特別なものとして次の事実が成り立つ。

命題. X, F : 例3のもの, 函数族 $\{\hat{x} \mid x \in X\}$ (ここで $\hat{x} : \mathfrak{M} \longrightarrow F$ ($\hat{x} : M \longmapsto x(M)$)) は $\mathfrak{M}$ 上の全ての函数の族である。

証明. $\mathfrak{M}$ は有限集合であるから, $^\forall$函数 f に対して $f(M_i) = \alpha_i$ とする. $x := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ とおくと $\hat{x} = f$.

定理 6. $X \ni e$, $X/M \cong F$ for $^\forall M \in \mathfrak{M}$, $W' = V'$,

$\mathfrak{M}$: compact in Gelfand topology.

$\Longrightarrow \quad \hat{X} = F(\mathfrak{M})$

証明. Kaplansky の定理により $\hat{X}$ は constant fts を含み, 点を分離し, closed である事を示せばよい。

$e(M) = 1$ for $^\forall M \in \mathfrak{M}$ であるから, $^\forall \alpha \in F$ に対して $(\alpha e)(M) = \alpha$ for $^\forall M \in \mathfrak{M}$, 故に $\hat{X}$ は constant fts を含む.

$M_1 \neq M_2$, $\in \mathfrak{M}$ に対して $x \in M_1$, $x \notin M_2$ なる x をとれば, $\hat{x}(M_1) \neq \hat{x}(M_2)$ よって $\hat{X}$ は $\mathfrak{M}$ の点を分離する。

次に $\hat{X}$ は closed である事を示す, 即ち $\hat{X} = \overline{\hat{X}}$. $f \in \overline{\hat{X}}$ とすると, $^\exists \hat{x}_i \in \hat{X}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ $\hat{x}_i \longrightarrow f$. $\{\hat{x}_i\}$ は Cauchy 列で, $W' = V'$ で, $\mathfrak{M}$ は compact であるから, 定理 5 により次の事を得る

$$r_\sigma(x_n) = \|\hat{x}_n\| = \|x_n\| .$$

ここで $\hat{x} \in F(\mathfrak{M})$ の norm は $\|\hat{x}\| := \sup_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)|$.

$x \longmapsto x$ $(\hat{x}(M) = x(M))$ は isometry で $\{x_n\}$ は Cauchy 列で X の完備性により, 次の様な $x \in X$ が存在する, 即ち $\hat{x}_n \longrightarrow \hat{x} = f$ よって $\hat{x} \in \hat{X}$, 故に $\hat{X}$ は closed.

文 献

[1] E. Beckenstein : On regular nonarchimedian Banach algebras, Arch. Math. 19 (1968). 424 — 427.

[2] L. Narici : Nonarchimedian Banach algebras. Arch. Math. 19 (1968). 428 — 435.

[3] N. Shilkert : Non-archimedian Gelfand theory. Pacific J. Math. 32 (1970) 541 — 550.

[4] I. Kaplansky : The Weierstraß theorem in fields with valuations, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950) 356 — 357

[5] D. G. Cantor : On the Stone-Weierstraß approximation theorem for valued fields. Pacific Jour. Math. 21 (1967) 473 — 478.

[6] P. R. Chernoff, R. A. Rasala and W. C. Waterhouse : The Stone-Weierstraß theorem for valuable fields. Pacific Jour. Math. 27 (1968) 233 — 240.

[7] R. Kiehl : Ausgezeichnete Ringe in der nichtarchimedischen analytischen Geometrie. Jour. reine angewandte Math. 234 (1969) 89 — 98.

[8] R. Kiehl : Die analytische Normalität affinoider Ringe, Arch. Math. 18 (1967) 479 — 484.

[9] H. Grauert und R. Remmert : Nichtarchimedische Funktionentheorie, Weierstraßfestband, Opladen 1966.

[10] E. Artin : Algebraic numbers and algebraic functions, Princeton (1950).

[11] G. Bachman : Introduction to p-adic numbers and valuation theory, Academic Press, (1964).

[12] A. Browder : Introduction to function algebras, Benjamin (1969)

[13] T. W. Gamelin : Uniform algebras, Prentice Hall (1969).

[14] 永田雅宜 ; 可換体論 裳華房

[15] R. Staum ; The structure of non-archimedian Banach algebras, Notices A.M.S. 17 (1970) 663 - 664.

[16] A.F. Monna : Over Niet-Archimedische Lineaire Ruimten, Indag. Math. 5 (1943) 308 — 321

[17] —"— : Over Geordende en Lineaire Ruimten, Indag. Math. 6 (1944) 178 — 182.

[18] —"— : Sur les espaces normes, I et II. Indag. Math. 8 (1946) 1045 — 1062.

[19] —"— : Sur les espaces non-archimediens, I et II, Indag. Math. 18 (1956) 475 — 489.

[20] H. Grauert und R. Remmert : über die Methode der diskret bewerteten Ringe in der nicht-archimedischen Analysis, Inventiones math. 2 (1966) 87 — 133.