

弾性管内の流れの安定性

農工大教養 高木隆司

§ 1. 序

血管内の血液の流れを物理的に究明しようとする動きが最近盛んになっている。⁽¹⁾ この問題については、物理的に簡単なモデルについて動力学的性質を考察することが興味ある方法である。そこで次のようなモデルを考える。軸方向に一様な変形しうる円筒状の管内を完全流体が流れていて、その変形には、流体の動圧、管の性質である弾性、粘性、慣性が関与している。もちろん実際の血液は（非ニュートン）粘性を持ち、実際の血管の内径は心臓から遠くなるにつれて細くなり枝別れをしているので、このモデルが現実とはかなり遠いことは覚悟しなければならない。しかし、循環系のいくつかの性質がこのモデルで説明できるかということを検討することは意義がある。また大動脈での流出時のレイノルズ数が約 10,000 にも達するので、完全流体の仮定はそれほどはず

れではないであろう。

管内の流れを起すものは管の両端の圧力差である。しかし、軸方向の一様な圧力勾配は半径の軸方向の一様な減少を作り、取り扱いは複雑になる。ここでは、前述の簡単なモデルを成り立たせるために、主流は与えられたものとし平均圧力は軸方向に一様と仮定する。実際の動脈では、細動脈に達するまで圧力降下はほとんどないし、心臓の出力インピーダンスが毛細管の抵抗と同じオーダーであり心臓が圧力ポンプではなく流量ポンプの性格を帯びるという指摘がある。⁽²⁾ あるいは、流体に対して軸方向に仮想の体積力が働くと考えてよいであろう。

§2. 動力学方程式

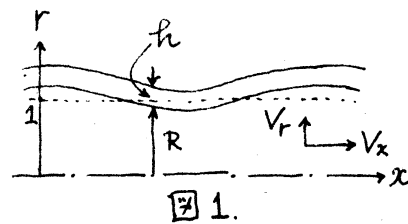
すべての物理量を、応力がないときの半径 R_0 、代表的な流速 U_0 、流体の密度 ρ によって無次元化する。図のように座標系を選び、管の変形や流速を軸対称と仮定し、半径、流速、管内圧を次のように表わす。

$$(2.1) \quad R = 1 + \eta(x, t),$$

$$(2.2) \quad V_x = U(t) + u(x, r, t),$$

$$(2.3) \quad V_r = v(x, r, t),$$

$$(2.4) \quad P = P_0(t) + p(x, r, t).$$



流れは無渦なしと仮定し、流速を次のように速度ポテンシャルを使って表わす。

$$(2.5) \quad V_x = \partial_x \Phi = U + \partial_x \phi,$$

$$(2.6) \quad V_r = \partial_r \Phi = \partial_r \phi.$$

流体については、連続の式とベルヌーイの定理が成り立ち、

$$(2.7) \quad \partial_x u + \partial_r v + \frac{v}{r} = \partial_x^2 \phi + \partial_r^2 \phi + \frac{1}{r} \partial_r \phi = 0,$$

$$(2.8) \quad \dot{\Phi} + P_0 + \rho + \frac{1}{2} \{ (U+u)^2 + v^2 \} = f(t) + gx.$$

ただし、 g は軸方向の仮想的な体積力を表わす。

軸および壁での境界条件は、

$$(2.9) \quad v = 0 \quad (r=0),$$

$$(2.10) \quad v = \dot{\eta} + (U+u)\partial_x \eta, \quad (r=1+\eta),$$

$$(2.11) \quad \rho = \kappa \eta + 2\lambda \dot{\eta} + \mu \ddot{\eta} \quad (r=1+\eta).$$

(2.11)の右辺の比例係数は、たとえば管の外側を $r=R'$ まで粘性率 η' 、密度 ρ' の縮まない流体が覆っているばあいには、

$h \ll 1$, $\eta \ll 1$ のとき

$$\kappa = \frac{h}{\rho U_0^2 R_0} \cdot \frac{E}{1-\sigma^2},$$

$$\lambda = \frac{\mu'}{\rho U_0 R_0},$$

$$\mu = \frac{\rho'}{\rho} \log R',$$

となる。ただし、 E , σ は管のヤング率、ポアソン比である。

§3. 線型理論

変動量 u, v, ρ, η が微小量として線型化すると、ベルヌーイ方程式の変動部分、境界条件 (2.10) は

$$(3.1) \quad \dot{\phi} + \rho + Uu = 0,$$

$$(3.2) \quad v = \dot{\eta} + U_{2x}\eta \quad (r=1),$$

となる。

変動量を ^(x について) フーリエ変換しひとつの成分だけ考えると, (2.7) は簡単に解けて, (2.9) を満たす解は

$$(3.3) \quad \phi = A(t) I_0(\alpha r) e^{i\alpha x}, \quad I_0 \text{ は変形ベッセル関数,}$$

となる。さらに

$$(3.4) \quad \eta = a(t) e^{i\alpha x},$$

として (3.3) とともに (2.11), (3.1), (3.2) に代入し, A と ρ を消去すると, a についての次の常微分方程式に帰着する。

$$(3.4) \quad (\beta + \rho) \ddot{a} + 2(i\alpha\beta U + \lambda) \dot{a} + (-\alpha^2\beta U^2 + i\alpha\beta\dot{U} + \kappa) a = 0.$$

ただし,

$$(3.5) \quad \beta = \frac{I_0(\alpha)}{\alpha I_0'(\alpha)} \sim \begin{cases} 2\alpha^{-2} & (\alpha \rightarrow 0), \\ \alpha^{-1} & (\alpha \rightarrow \infty). \end{cases}$$

問題は, $U(t)$ を与えて適当な条件のもとに a を求め, 安定性などの議論をすることによって帰着した。

§4. $U = \text{一定} = 1$ のばあい

まず, $\lambda = 0$ のばあいを考える. (3.4) は

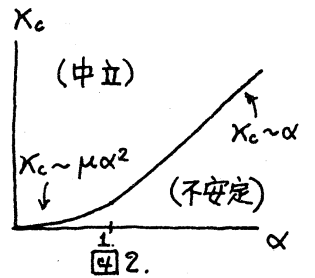
$$(4.1) \quad (\beta + \mu) \ddot{a} + 2i\alpha\beta \dot{a} + (-\beta\alpha^2 + \kappa) a = 0,$$

となり, $a = e^{-i\omega t}$ とおくと,

$$(4.2) \quad \omega_{\pm} = \frac{\alpha\beta \pm \sqrt{(\beta + \mu)\kappa - \alpha^2\beta\mu}}{\beta + \mu},$$

を得る. $\text{Im } \omega_+ > 0$, すなわち,

$$(4.3) \quad \kappa < \frac{\alpha^2\beta\mu}{\beta + \mu} \equiv \kappa_c$$



のとき系は不安定となり, $\kappa_c \leq \kappa$ では系は ~~不安定~~ 中立である. $\mu = 0$ ならば $\kappa_c = 0$ となるので, 系はつねに中立である. κ_c と α の関係を図2に示す.

次に $\lambda \neq 0$ のばあい, (3.4) は

$$(4.4) \quad (\beta + \mu) \ddot{a} + 2(i\alpha\beta + \lambda) \dot{a} + (-\beta\alpha^2 + \kappa) a = 0,$$

となり, 同様にして

$$(4.5) \quad \omega_{\pm} = \frac{\alpha\beta - i\lambda \pm \sqrt{-2i\alpha\beta\lambda - \lambda^2 + \beta(\kappa - \mu\alpha^2) + \mu\kappa}}{\beta + \mu},$$

を得る. ただし, 平方根は実数部が正とする. 公式,

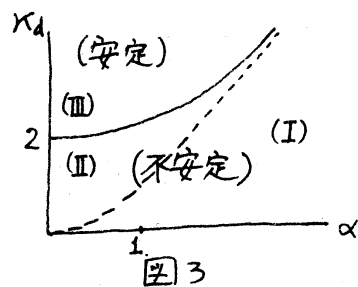
$$(4.6) \quad \sqrt{A + iB} = \sqrt{\frac{1}{2}(A + \sqrt{A^2 + B^2})} \pm i\sqrt{\frac{1}{2}(-A + \sqrt{A^2 + B^2})},$$

(ただし, 複号 \pm は $B \geq 0$ に対応する) を使い, $\text{Im } \omega_- > 0$,

すなわち、より大きい虚数部分を持つ波が不安定になる条件から

$$(4.7) \quad K < \alpha^2 \beta \equiv K_d,$$

を得る。 $K = K_d$ のとき、 $\text{Re } \omega_r = \omega_d = 0$ となり定常波が生じている。 K_d と α の関係を図3に示す。点線は図2の曲線と同じものである。



管の粘性が、あるばあいには (領域 II) 不安定化の作用を持ち、あるばあいには (領域 III) 安定化の作用を持つことは興味

深い。また、 $\lambda = 0$ と $\lambda \neq 0$ の両方のばあいに α が大きいほど不安定になることは、完全流体のヘルムホルツの不安定性と似た性質である。

5.5. $U = 1 + 2\varepsilon \cos \Omega t$ のばあい。

まず $\lambda = 0$ のばあいを考える。 $\varepsilon \ll 1$ と仮定し、中立と不安定の境界の状態 (臨界状態) に対し、

$$(5.1) \quad \omega_c = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots,$$

$$(5.2) \quad K_c = K_0 + \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_2 + \dots,$$

$$(5.3) \quad a = a^{(0)} e^{-i\omega_c t} + a^{(1)} e^{i(\Omega - \omega_c)t} + a^{(1)} e^{i(-\Omega - \omega_c)t} + \dots,$$

とおく。 a については、 $a^{(0)} = 1$ と規格化して、

$$(5.4) \quad a^{(k)} = a_0^{(k)} + \varepsilon a_1^{(k)} + \varepsilon^2 a_2^{(k)} + \dots,$$

とする。(3.4) に (5.3) を代入して, $e^{-i\omega_0 t}$, $e^{i(\Omega - \omega_0)t}$, $e^{i(-\Omega - \omega_0)t}$ に比例する項を取り出すと, それぞれ,

$$(5.5) \quad (\beta + \mu)(-i\omega_0)^2 + 2i\alpha\beta(-i\omega_0) + 2i\alpha\beta\varepsilon \{ i(-\omega_0 + \Omega) a^{(0)} + i(-\omega_0 - \Omega) a^{(-1)} \} \\ + (-\alpha^2\beta + \kappa) - \alpha^2\beta \{ 2\varepsilon(a^{(1)} + a^{(-1)}) + 2\varepsilon^2 + \varepsilon^2(a^{(2)} + a^{(-2)}) \} \\ + i\alpha\beta\varepsilon \{ -i\Omega a^{(1)} + i\Omega a^{(-1)} \} = 0,$$

$$(5.6) \quad \{ (\beta + \mu)(-i\omega_0 + i\Omega)^2 + 2i\alpha\beta(-i\omega_0 + i\Omega) + (-\alpha^2\beta + \kappa - 2\alpha^2\beta\varepsilon) \} a^{(0)} \\ + 2i\alpha\beta\varepsilon \{ -i\omega_0 + (-i\omega_0 + 2i\Omega) a^{(2)} \} - \alpha^2\beta 2\varepsilon(1 + a^{(2)}) \\ - \alpha^2\beta\varepsilon^2(a^{(1)} + a^{(3)}) + i\alpha\beta\varepsilon \{ -i\Omega a^{(3)} + i\Omega \} = 0,$$

$$(5.7) \quad \{ \text{同上, ただし } \Omega \rightarrow -\Omega, a^{(0)} \rightarrow a^{(-1)}, a^{(2)} \rightarrow a^{(-2)}, \text{ etc.} \}.$$

(5.5) の $O(\varepsilon^0)$ 項から得られる式を使って臨界の条件を求めると,

$$(5.8) \quad \kappa_0 = \frac{\alpha^2\beta\mu}{\beta + \mu}, \quad \omega_0 = \frac{\alpha\beta}{\beta + \mu},$$

を得る。また, (5.5) の $O(\varepsilon^1)$ 項および $O(\varepsilon^2)$ 項より,

$$(5.9) \quad \kappa_1 = 0, \quad \omega_1 = \text{不確定},$$

および

$$(5.10) \quad \kappa_2 = (\beta + \mu)\omega_1^2 + 2\alpha^2\beta + a_1^{(0)}\alpha\beta\{-2\omega_0 + \Omega + 2\alpha\} \\ + a_1^{(-1)}\alpha\beta\{-2\omega_0 - \Omega + 2\alpha\},$$

を得る. (5.6), (5.7) から $a^{(\pm 1)} \sim O(\varepsilon)$ がわかり, それらの $O(\varepsilon)$ 項より得られた

$$(5.11) \quad a_1^{(\pm 1)} = \frac{\alpha\beta \{2\alpha\beta \pm \Omega(\beta+\mu)\}}{-(\beta+\mu)^2 \Omega^2}$$

を (5.10) に代入して, ω_1 についての臨界条件 $\omega_1^2 = 0$ ($\omega_1^2 < 0$ ならば振動数に虚数部が生じる) を使うと,

$$(5.12) \quad \kappa_2 = \frac{2\alpha^2\beta\mu}{\beta+\mu} + \frac{8\alpha^4\beta^2\mu^2}{\Omega^2(\beta+\mu)^2}$$

を得る. κ_2 と Ω の関係を図4に示す. 主流の脈動は不安定性を増加させることがわかる. それは, $\omega \lesssim \alpha\sqrt{\beta\mu}/(\beta+\mu)$ のとき特に著しい.

次に $\lambda \neq 0$ のばあいを考えよう. 前と同様に, 中立安定で

$$(5.13) \quad \kappa_0 = \alpha^2\beta, \quad \kappa_1 = 0, \quad \omega_0 = \omega_1 = 0,$$

$$(5.14) \quad \kappa_2 = 2\alpha^2\beta - \frac{\alpha^2\beta^2}{\Omega} \left[\frac{(2\alpha+\Omega)^2 \{3\alpha\beta + (\beta+\mu)\Omega\}}{\{(\beta+\mu)\Omega + 2\alpha\beta\}^2 + \lambda^2} - \{\Omega \rightarrow -\Omega\} \right],$$

$$(5.15) \quad \omega_2 = \frac{\alpha^2\beta^2}{2\Omega} \left[\frac{(2\alpha+\Omega)^2}{\{(\beta+\mu)\Omega + 2\alpha\beta\}^2 + \lambda^2} - \{\Omega \rightarrow -\Omega\} \right],$$

を得る. 図4に以上の結果を示す. $\lambda = 0$ のばあいと $\lambda \neq 0$ のばあいとは, 本質的に異なっていることがわかる.

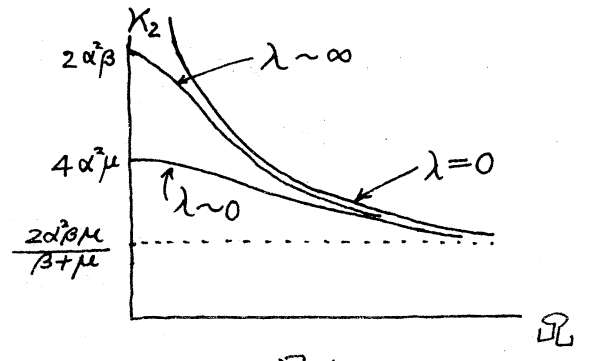


図 4.

§ 6. パルス流のばあい

主流 U が, 図 5 のような周期的なパルスになっているばあいを考えよう. (3.4) は次のふたつの方程式に分れる.

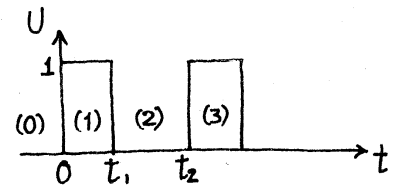


図 5

$$(6.1) \quad (\beta + \mu) \ddot{a} + 2(i\alpha\beta + \lambda) \dot{a} + \kappa a = 0, \\ (-t_2 + t_1 < t < 0, \quad t_1 < t < t_2, \text{ etc}),$$

$$(6.2) \quad (\beta + \mu) \ddot{a} + 2(i\alpha\beta + \lambda) \dot{a} + (-\alpha^2\beta + \kappa) a = 0, \\ (0 < t < t_1, \quad t_2 < t < t_2 + t_1, \text{ etc}).$$

$t = 0, t_1, t_2, \text{ etc}$ での条件は, (3.4) をそれぞれ $(-\delta, \delta), (t_1 - \delta, t_1 + \delta), \text{ etc}, (\delta \rightarrow 0)$ の区間で積分することによって得られるものと, a が連続につながるものとのふた通りである. すなわち,

$$(6.3) \quad \begin{cases} (\beta + \mu) \{ \dot{a}(t_0) - \dot{a}(t_0 - 0) \} + i\alpha\beta a(t_0) = 0, \\ a(t_0) = a(t_0 - 0), \quad (t = t_0), \end{cases}$$

$$(6.4) \quad \begin{cases} (\beta + \mu) \{ \dot{a}(t_1 + 0) - \dot{a}(t_1 - 0) \} + i\alpha\beta a(t_1) = 0, \\ a(t_1 + 0) = a(t_1 - 0), \quad (t = t_1), \end{cases}$$

etc.

である。図5の時間間隔(t)で $a = e^{-i\omega_k t}$ とおくと,

$$(6.5) \quad \omega_{0\pm} = \omega_{2\pm} = \dots = \frac{-i\lambda \pm \sqrt{-\lambda^2 + (\beta + \mu)\kappa}}{\beta + \mu},$$

$$(6.6) \quad \omega_{1\pm} = \omega_{3\pm} = \dots = \frac{\alpha\beta - i\lambda \pm \sqrt{-2i\alpha\beta\lambda - \lambda^2 + (\beta + \mu)\kappa - \alpha^2\beta\mu}}{\beta + \mu},$$

したがって,

$$(6.7) \quad a = \begin{cases} A_0 e^{-i\omega_{0+}t} + B_0 e^{-i\omega_{0-}t} & \dots (0), \\ A_1 e^{-i\omega_{1+}t} + B_1 e^{-i\omega_{1-}t} & \dots (1), \\ A_2 e^{-i\omega_{2+}t} + B_2 e^{-i\omega_{2-}t} & \dots (2), \\ \text{etc.} \end{cases}$$

(A_0, B_0)の組を与えると, (6.3), (6.4), etc より (A_1, B_1), (A_2, B_2), etc が次々に求まる。これから安定性の議論が可能であろうが, それは少し複雑になるので, ここでは適当な仮定のもとに別の議論を試みよう。

まず, 波が一方向にだけ進むと仮定する。すなわち,

$$(6.8) \quad B_0 = B_1 = \dots = 0.$$

(6.3), (6.4) から

$$(6.9) \quad \omega_{0+} - \omega_{1+} = -\frac{\alpha\beta}{\beta + \mu},$$

$$(6.10) \quad A_1 = A_0, \quad A_2 e^{-i\omega_{2+}t} = A_1 e^{-i\omega_{1+}t}, \quad \text{etc.}$$

これらに (6.5), (6.6) を代入すると, (6.9) が成り立つのは

$\lambda = \mu = 0$ のときに限ることがわかり、またそのときは、振幅 $|A_0|, |A_1|, \dots$ は皆等しい。

λ, μ についての上の制限が取り立たないばあい、主流の流出時に波が一方方向にだけ進むと仮定する。実際の血管の脈動では、流出時の圧力のピークが軸の方向にほぼ同じ形で伝播しているので、この仮定は実際面から見るともっともらしい。そこで、 $B_1 = B_3 = \dots = 0$ として、やはり (6.3), (6.4) から

$$(6.11) \quad e^{i\omega_0(t_2-t_1)} = e^{i\omega_0(t_2-t_1)}$$

を得る。これから、(6.5), (6.6) を使い、

$$(6.12) \quad (t_2 - t_1) \frac{2\sqrt{-\lambda^2 + (\beta + \mu)K}}{\beta + \mu} = 2n\pi, \quad (n \text{ は 整数}),$$

を得る。

一周期後の波の増幅率を求めよう。多少の計算の後、

$$(6.13) \quad \frac{a(t_2+0)}{a(+0)} = \sigma = e^{-i\omega_0(t_2-t_1) - i\omega_1 t_1},$$

を得る。

$\alpha \ll 1$ のとき (6.12) は

$$(6.14) \quad (t_2 - t_1) \alpha \cdot \sqrt{\frac{K}{2}} \cong n\pi,$$

また (6.13) より

$$(6.15) \quad \log \sigma \cong -i \left\{ \alpha \left(1 + \sqrt{\frac{K}{2}}\right) t_1 + \alpha \sqrt{\frac{K}{2}} (t_2 - t_1) \right\} \\ - \lambda \alpha^2 \left\{ \frac{1}{2} (t_2 - t_1) + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2K}}\right) t_1 \right\},$$

となる。

ここでさらに、波が近似的に周期的と仮定する。すると、

$$(6.16) \quad \alpha \left(1 + \sqrt{\frac{K}{2}}\right) t_1 + \alpha \sqrt{\frac{K}{2}} (t_2 - t_1) \\ = \alpha \left(1 + \sqrt{\frac{K}{2}}\right) t_1 + n\pi = 2m\pi, \quad (m \text{ は整数}).$$

(6.14), (6.16) から α を消去して次式を得る。

$$(6.17) \quad \frac{t_2 - t_1}{t_1} = \left(1 + \sqrt{\frac{2}{K}}\right) \cdot \frac{n}{2m - n}.$$

流出時だけを見て、波が二周期に一回振動しているばあいには、 $n=1$ となり (6.17) より必然的に $n=1$ となる。すなわち、

$$(6.18) \quad t_2 - t_1 \cong \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{K}}, \quad t_1 \cong \frac{\pi}{\alpha} \left(1 + \sqrt{\frac{K}{2}}\right)^{-1}.$$

§ 7. 議論

実際の人間の血管および血流について、いくつかのパラメータの値を評価してみる。(星印は次元を持つことを表す)

$$\left(E \approx 4 \times 10^6 \text{ (dyn/cm}^2\text{)}, \right.$$

$$(7.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma \approx 0.5, \\ U_0 \approx 100 \text{ (cm/sec)}, \quad R_0 \approx 0.5 \sim 0.1 \text{ (cm)}, \\ t_1^*/R_0 \approx 0.1 \text{ (犬について)}, \quad C^* \approx 4 \sim 10^{\times 10^2} \text{ (cm/sec)}, \\ t_1^* \approx 0.3 \text{ (sec)}, \quad t_2^* - t_1^* \approx 0.5 \text{ (sec)}, \end{array} \right.$$

以上より, $\Omega^* \approx 2\pi/0.8 \approx 8 \text{ (sec}^{-1}\text{)},$

$$\alpha^* = \Omega^*/C^* \approx 2 \sim 0.8 \times 10^{-2} \text{ (cm}^{-1}\text{)},$$

ここで行われた規格化により,

$$(7.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \alpha^* R_0 \approx 1 \sim 0.1 \times 10^{-2} \ll 1, \\ \Omega = \Omega^* R_0 / U_0 \approx 4 \sim 0.8 \times 10^{-2} \ll 1, \\ t_2 = t_2^* U_0 / R_0 \approx 1.6 \sim 8 \times 10^2, \\ t_1 \approx 0.6 \sim 3 \times 10^2, \\ \kappa \approx 50, \quad \lambda \approx 0.05 \pi, \quad \mu \approx \log R' \sim O(1) \end{array} \right.$$

以上より, 実際に対応する系は, 図2, 3において明らかに中立あるいは安定な領域に入っていることがわかる. また, $\alpha \sqrt{\beta \mu} / (\beta + \mu) \sim 10^4 \ll \Omega$ であるから, 主流の脈動による不安定性の増加は著しくないはずである. (6.18)の両辺を評価してみると,

$$(7.3) \quad t_2 - t_1 \approx 1 \sim 4 \times 10^2, \quad \frac{\pi \sqrt{2}}{\alpha \sqrt{\kappa}} \approx 0.6 \sim 6 \times 10^2,$$

となる, $m=n=1$ のばあいの (6.17) の両辺は,

$$(7.4) \quad \frac{t_2 - t_1}{t_1} \approx 1.7, \quad 1 + \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \approx 1.2,$$

となる。このモデルで採用された仮定を考えると、これらの両辺のだいたいの一致は、満足すべきものと言えるだろう。

参考文献

(1), 単行本では "Pulsatile Blood Flow", ed E. Attinger,
Mc.Graw-Hill, New York, 1964.

解説では "血液のレオロジー", 岡小天, 高分子 16,
No 180 ~ 185, 1967.

"血液の流体物理", 岡小天, 日本物理学会誌
23, No.11, P 837, 1968.

"Review of Current Mathematical Methods for
the Analysis of Blood Flow," G. Rudinger,
Proc. Biomed. Fluid Mechs. Symp. ASME, N.Y. 1966.

(2), "Hydrodynamics of Blood Flow", E. Attinger,
in Advances in Hydrosience Vol.3, P 139,
Acad. Press N.Y. & London, 1966.