

## 非線形安定性の一つの計算法

東大 工学部 桑原 真二

### §1. 乱流の発生

縮まない粘性流体の運動は連続の方程式と Navier-Stokes の方程式によって記述される。実際の運動では、層流と乱流というけん著な違いがある。数学的には、乱流の発生は層流の解の不安定性によると考えられている。粘性流体ではエネルギーの粘性散逸があるから、常に系外よりエネルギーを供給してないと静止又は一様な流れになってしまう。円管内の流れでは圧力勾配により、平板が静止流体中を動くばあいには、抵抗に抗して平板をひく力により、エネルギーが供給されている。層流のばあいには、層流の粘性散逸によりこのエネルギーは熱エネルギーに直接うつりかわる。エネルギー供給率をふやして行くと、層流による粘性散逸だけではまかないきれなくなり、乱雑な運動に一旦エネルギーの一部がうけわたされ、この乱雑な運動の粘性散逸によって熱エネルギーへの変換を助けているものと考えられる。このような遷移の現象は、他の多くの物理現象、相変化、弾性

破壊、絶縁破壊等と類似している。

われわれは乱流を平均流と乱れに分けて記述する。乱れが小さいという仮定のもとに平均流を層流平行流とおくことによりよくしられた Orr - Sommerfeld の方程式がえられる。O-S 方程式は線形であるから、かさねあわせの原理が成立ち、Fourier の一成分だけ論ずれば安定性の問題はとける（線形安定理論）。

O-S 方程式は §2 でのべるように、時間項、対流項、エネルギー供給項、粘性項からできている。時間項は解の時間的消長をあらわすいわば本力で、これによって安定性を判定する。対流項は乱れを平均流にのせて運ぶだけで、解の消長には寄与しない。粘性項は安定化の傾向をもつと考えられる。そこで、エネルギー供給項が、不安定性の鍵をにぎるものと考えられる。平面 Couette 流、Hagen-Poiseuille 流について、エネルギー供給項は 0 になってしまう。線形安定理論では、上の 2 つの流れが安定であるという結論がでてくるのは、そのためと考えられる。

安定性の非線形理論に立入るばあい次の 2 つの要素が考えられる：

- i) Fourier 成分の間の相互作用
- ii) 乱れによる平均流の変形

前者は  $N-S$  方程式の非線形項により、 $k$  と  $k'$  (波数) の波から  $k \pm k'$  の波が生ずることである。後者は、 $N-S$  方程式の時間平均をとると、非線形項からいわゆる Reynolds 応力の項がのこる。そこで平均流は乱れから feedback をうけて層流と異った速度分布に変形する。この論文では後者について特に論ずることにする。

## § 2. 基礎方程式

粘性流体の方程式は圧力を消去した形で

$$\operatorname{div} v = 0 \quad (2.1)$$

$$\omega = \operatorname{rot} v \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \operatorname{rot}(v \times \omega) = -\bar{v} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \omega \quad (2.3)$$

とかかれる。  $x_\alpha, t, v_\alpha, \omega_\alpha$ , ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) はそれぞれ代表的長さ  $L$ , 速度  $V$ , 時間  $L/V$ ,  $L/V$  で規格化された座標, 時間, 速度, 温度である。  $\bar{v} = 1/R$ ,  $R = VL/\nu$  ( $\nu$ : 動粘性率) は Reynolds 数である。

座標およびベクトル成分を

	デカルト座標	円柱座標
座標	$(x, y, z)$	$(x, r, \phi) = (x_1, x_2, x_3)$
速度ベクトル	$(v_1, v_2, v_3)$	$(v_1, v_2, v_3)$
温度ベクトル	$(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$	$(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

のようにとる。速度と温度を平均流（ $\bar{\quad}$ つき）と乱れ成分（ $\tilde{\quad}$ つき）とに分ける。

$$\left. \begin{aligned} v_\alpha(x, t) &= \bar{v}_1(x_2) \delta\alpha_1 + \tilde{v}_\alpha(x, t) \\ \omega_\alpha(x, t) &= \bar{\omega}_3(x_2) \delta\alpha_3 + \tilde{\omega}_\alpha(x, t) \end{aligned} \right\} (2.4)$$

ただし

$$\langle \tilde{v}_\alpha \rangle = 0, \quad \langle \tilde{\omega}_\alpha \rangle = 0. \quad (2.5)$$

ここで  $\langle \quad \rangle$  は時間平均をあらわす。

(2.1) ~ (2.3) を座標成分に分け、時間平均をとったもの:

$$\bar{\omega}_3 = -\partial \bar{v}_1 / \partial x_2 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{x_2^5} \frac{\partial}{\partial x_2} x_2^5 \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} - R \langle \tilde{v}_1 \tilde{v}_2 \rangle \right) = 0 \quad (2.7)$$

とそれらをさしひいた乱れの部分:

$$\frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2^5} \frac{\partial}{\partial x_2} x_2^5 \tilde{v}_2 + \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x_3} = 0 \quad (2.8)$$

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{1}{x_2^5} \frac{\partial}{\partial x_2} x_2^5 \tilde{v}_2 - \frac{1}{x_2^5} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x_3} \quad (2.9a)$$

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{1}{x_2^5} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x_1} \quad (2.9b)$$

$$\tilde{\omega}_3 = \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x_2} \quad (2.9c)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \tilde{\omega}_1 + \frac{1}{x_2^5} \frac{d\bar{v}_1}{dx_2} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x_3} - \bar{v} \nabla^2 \tilde{\omega}_1 = -\tilde{v} \cdot \nabla \tilde{\omega}_1 + \omega \cdot \nabla \tilde{v}_1 \quad (2.10a)$$

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \tilde{\omega}_2 + \frac{1}{x_2^5} \frac{d\bar{v}_1}{dx_2} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x_3} - \bar{v} \left\{ \nabla^2 - \frac{5}{x_2^2} \right\} \tilde{\omega}_2 - \frac{25}{x_2} \frac{\partial \tilde{\omega}_3}{\partial x_3} \end{aligned} \right\} \\ = -\tilde{v} \cdot \nabla \tilde{\omega}_2 + \omega \cdot \nabla \tilde{v}_2 \quad (2.10b)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \tilde{\omega}_3 + \left( \frac{1}{\chi_2^s} \frac{d\bar{v}_1}{d\chi_2} \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial \chi_3} - \chi_2^s \frac{d}{d\chi_2} \left( \frac{1}{\chi_2^s} \frac{d\bar{v}_1}{d\chi_2} \right) \cdot \tilde{v}_2 \right) \\
& - \bar{v} \left\{ (\nabla^2 - \frac{s}{\chi_2^2}) \tilde{\omega}_3 + \frac{2s}{\chi_2} \frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial \chi_3} \right\} = -\tilde{v} \cdot \nabla \tilde{\omega}_3 + \tilde{\omega} \cdot \nabla \tilde{v}_3 \\
& + \frac{s}{\chi_2} (\tilde{v}_2 \tilde{\omega}_3 - \tilde{v}_3 \tilde{\omega}_2) \quad (2.10c)
\end{aligned}$$

に分けることができる。こゝで

$$\begin{aligned}
\tilde{v} \cdot \nabla &= \tilde{v}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \tilde{v}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \tilde{v}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \text{ etc.} \\
\nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\chi_2^s} \frac{\partial}{\partial \chi_2} \chi_2^s \frac{\partial}{\partial \chi_2} + \frac{1}{\chi_2^{2s}} \frac{\partial^2}{\partial \chi_3^2} \quad (2.11)
\end{aligned}$$

$s = 0, 1$  は各々デカルト座標、円柱座標に対応する。(2.10)の左辺は  $\tilde{v}, \tilde{\omega}$  について一次、右辺は二次である。左辺の初項は時間項 ( $\partial/\partial t$ ) と対流項 ( $\bar{v}_1 \partial/\partial x_1$ )、才2項は平均流に依存する係数をもつ“エネルギー供給項”、才3項は粘性散逸項である。右辺は乱れの間の相互作用をあらわし、Fourier変換すると、もっとその性格がはっきりする。

こゝで Fourier 変換：

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_\alpha(x, t) &= \iint \tilde{v}_\alpha(k_1, \chi_2, k_3, t) e^{i(k_1 x_1 + k_3 x_3)} dk_1 dk_3 \equiv \int \tilde{v}_\alpha(k) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dk \\
\tilde{v}_\alpha(k, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \tilde{v}_\alpha(x, t) e^{-i(k_1 x_1 + k_3 x_3)} dx_1 dx_3 \equiv \tilde{v}_\alpha(k) \quad (2.12)
\end{aligned}$$

を導入すれば、(2.8) ~ (2.10) は

$$ik_1 \tilde{v}_1(k) + \frac{1}{\chi_2^s} \frac{d}{d\chi_2} \chi_2^s \tilde{v}_2(k) + \frac{1}{\chi_2^s} ik_3 \tilde{v}_3(k) = 0 \quad (2.13)$$

$$\tilde{\omega}_1(k) = \frac{1}{\chi_2^s} \frac{d}{d\chi_2} \chi_2^s \tilde{v}_3(k) - \frac{ik_3}{\chi_2^s} \tilde{v}_2(k) \quad (2.14a)$$

$$\tilde{\omega}_2(k) = \frac{ik_3}{\chi_2^5} \tilde{v}_1(k) - ik_1 \tilde{v}_3(k) \quad (2.14b)$$

$$\tilde{\omega}_3(k) = ik_1 \tilde{v}_2(k) - \frac{d}{d\chi_2} \tilde{v}_1(k) \quad (2.14c)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + ik_1 \bar{v}_1 \right) \tilde{\omega}_1(k) + \frac{ik_3}{\chi_2^5} \frac{d\bar{v}_1}{d\chi_2} \tilde{v}_1(k) - \bar{\nu} \left( \chi_2^{-5} \mathcal{D} \chi_2^5 - k_1^2 - \frac{k_3^2}{\chi_2^{25}} \right) \tilde{\omega}_1(k) \\ &= -\iint \tilde{v}(k-k') \cdot \nabla' \tilde{\omega}_1(k') dk' + \iint \tilde{\omega}(k-k') \cdot \nabla' \tilde{v}_1(k') dk' \quad (2.15a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + ik_1 \bar{v}_1 \right) \tilde{\omega}_2(k) + \frac{ik_3}{\chi_2^5} \frac{d\bar{v}_1}{d\chi_2} \tilde{v}_2(k) - \bar{\nu} \left\{ \mathcal{D} - k_1^2 - \frac{k_3^2}{\chi_2^{25}} \right\} \tilde{\omega}_2(k) \\ & - \frac{2isk_3}{\chi_2^2} \tilde{\omega}_3(k) \Big\} = -\iint \tilde{v}(k-k') \cdot \nabla' \tilde{\omega}_2(k') dk' \\ & + \iint \tilde{\omega}(k-k') \cdot \nabla' \tilde{v}_2(k') dk' \quad (2.15b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + ik_1 \bar{v}_1 \right) \tilde{\omega}_3(k) + \frac{ik_3}{\chi_2^5} \frac{d\bar{v}_1}{d\chi_2} \tilde{v}_3(k) - (\mathcal{D} \bar{v}_1) \tilde{v}_2(k) \\ & - \bar{\nu} \left\{ (\mathcal{D} - k_1^2 - \frac{k_3^2}{\chi_2^{25}}) \tilde{\omega}_3(k) + \frac{2isk_3}{\chi_2^5} \tilde{\omega}_2(k) \right\} \\ &= -\iint \tilde{v}(k-k') \cdot \nabla' \tilde{\omega}_3(k') dk' + \iint \tilde{\omega}(k-k') \cdot \nabla' \tilde{v}_3(k') dk' \\ & + \frac{1}{\chi_2^5} \iint \left\{ \tilde{v}_2(k') \tilde{\omega}_3(k-k') - \tilde{v}_3(k') \tilde{\omega}_2(k-k') \right\} dk' \quad (2.15c) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \chi_2^5 \frac{d}{d\chi_2} \frac{1}{\chi_2^5} \frac{d}{d\chi_2} \\ \tilde{v}(k-k') \cdot \nabla' &= ik'_1 \tilde{v}_1(k-k') + v_2(k-k') \frac{d}{d\chi_2} \Big\} \quad (2.16) \\ & + \frac{1}{\chi_2^{25}} ik'_3 \tilde{v}_3(k-k') \end{aligned}$$

である。(2.15)の右辺は Fourier 成分の合成積であり、物理的には波と波との間の相互作用をあらわす。

ここで乱れが二次元的あるいは軸対称のばあいには、 $v, \omega$  の成分は

$$V = (v_1, v_2, 0), \quad \omega = (0, 0, \omega), \quad k = (k, 0, 0) \quad (2.17)$$

とおくことができる。この場合には流れの関数が存在する。  
 各れに対応する流れの関数  $\tilde{\phi}(k, x_2, t)$  は

$$\tilde{v}_1(k) = \frac{1}{x_2^5} \frac{d}{dx_2} \tilde{\phi}, \quad \tilde{v}_2(k) = -\frac{ik}{x_2^5} \tilde{\phi} \quad (2.18)$$

で定義され、(2.14), (2.15) は

$$\tilde{\omega}(k) = -\frac{1}{x_2^5} (\mathcal{D} - k^2) \tilde{\phi} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} & (\frac{\partial}{\partial t} + ik\tilde{v}_1)(\mathcal{D} - k^2)\tilde{\phi} - ik\mathcal{D}\tilde{v}_1 \cdot \tilde{\phi} - \bar{v}(\mathcal{D} - k^2)\tilde{\phi} \\ &= \frac{1}{x_2^5} \int \left\{ k' \frac{d}{dx_2} \tilde{\phi}(k-k') - (k-k')\tilde{\phi}(k-k') \frac{d}{dx_2} \right\} (\mathcal{D} - k^2) \\ & \quad \tilde{\phi}(k-k') dk' + \frac{i}{x_2^3} \int k' \tilde{\phi}(k') (\mathcal{D} - k^2) \tilde{\phi}(k-k') dk' \quad (2.20) \end{aligned}$$

と簡単化される。

さらに *Meksyn-Stuart* にしたがって

$$\tilde{\phi}(k, x_2, t) = \sum_{l \neq 0} \phi_l(x_2) \delta(k - k_0 l) e^{-ik_0 l c t} \quad (2.21)$$

とおけば (2.20) は

$$\begin{aligned} & il(\bar{v}_1 - c)(\mathcal{D} - k_0^2 l^2) \phi_l - il\mathcal{D}\tilde{v}_1 \cdot \phi_l - \bar{v}(\mathcal{D} - l^2 k_0^2) \phi_l \\ &= -\frac{1}{x_2^5} \sum_m \left\{ m \frac{d}{dx_2} \phi_{l-m} - (l-m) \phi_{l-m} \frac{d}{dx_2} \right\} (\mathcal{D} - m^2 k_0^2) \phi_m \\ & \quad + \frac{i}{x_2^5} \sum_m m \phi_m (\mathcal{D} - (l-m)^2 k_0^2) \phi_{l-m} \quad (2.22) \end{aligned}$$

又、(2.7) は

$$\bar{v}_1 = A_1 x_2^2 + A_2 \left\{ \begin{array}{l} x_2 \cdot \delta_{50} \\ \log x_2 \cdot \delta_{51} \end{array} \right\} + A_3$$

$$+ \frac{ik_0 R}{2} \sum_l l \int_{x_2} \frac{1}{x_2^{2s}} \{ \phi_l \phi_l'^* - \phi_l^* \phi_l' \} dx_2 \quad (2.23)$$

と積分される。

一番簡単に、基本波 ( $l=1$ ) のみをのこすと (2.23)・(2.22) は

$$\bar{v}_1 = A_1 x_2 + A_2 \left\{ \begin{array}{l} x_2 \\ \log x_2 \end{array} \right\} + A_3 - ikR \int_{x_2} \frac{1}{x_2^{2s}} (\phi \phi'^* - \phi^* \phi') dx_2 \quad (2.24)$$

$$(\bar{v}_1 - c)(\partial^2 - k^2)\phi - \partial^2 \bar{v}_1 \cdot \phi = \frac{1}{ikR} (\partial^2 - k^2)^2 \phi \quad (2.25)$$

となる。ここで

$$\phi = \phi_1(x_2), \quad k = k_0 \quad (2.26)$$

である。

### §3. 直交関数展開による解法

われわれは前節の考察で、平均流の変形をとり入れる非線形安定理論は (2.24) (2.25) の固有値問題に帰着されることがわかった。

H.-P. 流では  $R_{cr}$  が大きく ( $10^3$  程度)、一見粘性項はきかないように思える。しかし、流体混合がはげしければ、 $k \gg 1$  の波が顕著になると考えられる。そこで  $\delta$  よりも  $k^2$  の項が大きいとして、粘性項を評価し、常にエネルギー供給項とバランスしていると考えると

$$k \sim R^{1/3}$$

$R = R_{cr} \equiv O(10^3)$  を入れれば、 $k \sim 10$  となる。



以上の議論が成立つとすると、粘性項は場の中で常に有効にきいていて、鋭い臨界面層はあらわれず、(2.25)の解は十分なめらかであると考えられる。一般に、解を境界条件に合った適当な直交関数系で展開することができる。境界条件は

Couette 流について

$$\begin{array}{l}
 C1) \quad \bar{v}(\pm 1) = \pm 1 \quad x_2 = \pm 1 \text{ の壁は右左に動いている} \\
 \quad \phi(\pm 1) = 0 \quad \tilde{v}_2(\pm) = 0 \\
 \quad \phi'(\pm 1) = 0 \quad \tilde{v}_1(\pm) = 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} C1) \\ \phi(\pm 1) = 0 \\ \phi'(\pm 1) = 0 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{粘着条件} \\ (3.1) \end{array}$$

$$C2) \quad \int_{-1}^1 \bar{v}_1(x_2) dx_2 = 0 \quad \text{全流量} = 0 \quad (3.2)$$

H-P 流について

$$\begin{array}{l}
 H1) \quad \bar{v}_1(1) = 0 \quad \text{管壁で平均流} = 0 \\
 \quad \phi(1) = 0 \quad \tilde{v}_2(1) = 0 \\
 \quad \phi'(1) = 0 \quad \tilde{v}_1(1) = 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} H1) \\ \phi(1) = 0 \\ \phi'(1) = 0 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{粘着条件} \\ (3.3) \end{array}$$

$$H2) \quad \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{1}{x_2} \phi(x_2) = 0 \quad \tilde{v}_2(c) = 0 \quad (3.4)$$

$$H3) \quad \int_0^1 \bar{v}_1(x_2) x_2 dx_2 = 1 \quad \text{全流量を規定} \quad (3.5)$$

(3.1) ~ (3.5) を満足する直交関数系  $\varphi_n(x_2)$  がえらべたでしょう。そこで

$$\phi = \sum a_n \varphi_n(x_2) \quad (3.6)$$

(3.6)を(2.24)に代入し $\bar{\psi}$ を求め(境界条件から $A_1, \dots, A_3$ はきまる), さらにその $\bar{\psi}$ と(3.6)を(2.25)に代入すると, 未知数 $a_n$ をふくんだ関数方程式をうる。次はこの関数方程式を $x_2$ のいかににかかわらず満足するように $a_n$ をきめることに帰着される。

$a_n$ をきめるには Galerkin の方法がもっとも適している。(2.25)に $\varphi_n$ をかけスカラー積をとると,  $a_n$ についての代数方程式(3次)に帰着される。これを有限個の $a_n$ , 同じ数の連立方程式で近似すると $a_n$ をとくことができる。

#### §4. 平面 Couette 流の安定性

$[-1, 1]$ で完備な直交関数系の中で境界条件, 対称性の観点から $P_n^m(x_2)$ がもっとも適している。しかし境界条件だけからでは $m$ まで決定することはできない。

固定境界において, 乱れに対応する変動応力は一般に有限の値をもちうる。そのためには

$$\phi''(\pm 1) \neq 0 \quad (4.1)$$

が必要である。境界条件まで考えると,  $x_2 = \pm 1$ 附近のふるまいは

$$\phi \sim (x_2 \mp 1)^2 \quad (4.2)$$

と考えるべきである。この条件を満足するのは  $P_{l+4}(x_2)$  である。実際の計算では最初の2項までとって行った。すなわち

$$\varphi = a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 \quad \varphi = \sqrt{\alpha R} \phi \quad (4.3)$$

まず  $\bar{v}_1$  を出すと

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_1 &= \bar{x}_2 + a f(x_2) \quad a = i(a_0 a_1^* - a_0^* a_1) \\ f(x_2) &= - \left[ \frac{987}{5 \cdot 7 \cdot 9} - \frac{4}{3} x_2^2 + \frac{6}{5} x_2^4 - \frac{4}{7} x_2^6 + \frac{1}{9} x_2^8 \right] x_2 \end{aligned} \right\} (4.4)$$

をうる。一方 (4.3) を (2.25) に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}\varphi &\equiv a_0 \mathcal{D}\varphi_0 + a_1 \mathcal{D}\varphi_1 \\ \mathcal{D} &\equiv (\bar{v}_1 - c)(\mathcal{D} - k^2) - a \mathcal{D}f - \frac{1}{ikR} (\mathcal{D} - k^2)^2 \end{aligned} \right\} (4.5)$$

となる。

Galerkinの方法を適用すれば

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_0, \mathcal{D}\varphi_0) a_0 + (\varphi_0, \mathcal{D}\varphi_1) a_1 &= 0 \\ (\varphi_1, \mathcal{D}\varphi_0) a_0 + (\varphi_1, \mathcal{D}\varphi_1) a_1 &= 0 \end{aligned} \right\} (4.6)$$

ここで  $(\varphi_0, \mathcal{D}\varphi_0)$  等はスカラー積である。(4.6)から  $a_0, a_1$  を消去すると

$$\begin{vmatrix} (\varphi_0, \mathcal{D}\varphi_0) & (\varphi_0, \mathcal{D}\varphi_1) \\ (\varphi_1, \mathcal{D}\varphi_0) & (\varphi_1, \mathcal{D}\varphi_1) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.7)$$

をうる。(4.7)は  $a, c, k, R$  の間の関係を与えている。

$a$  は乱れの振巾の2乗で乱れのエネルギー :

$$E = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2) dx_2 \quad (4.8)$$

と関係づけられる。(4.7)は

$$F(k, R, c, E) = 0 \quad (4.9)$$

の形になる。平衡攪乱のばあいには  $c = \text{実数}$  である。

(4.9)の実部・虚部から各々  $c$  を消去すると、

$$G(k, R, E) = 0 \quad (4.10)$$

をうる。これは“平衡曲面”をあたえる (Fig. 1)。この曲面を  $(k, R)$  面に投影すると“平衡曲線”がえられる (Fig. 2)。

臨界状態は

$$\left. \begin{aligned} R_{cr} &= 45.212 \\ k_{cr} &= 13.565 \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

である。

### §5. Hagen-Poiseuille 流の安定性

このばあいにも、§4 と全く同様に解析を行うことができる。固定境界において、変動応力が有限な値をもつという条件の外に、中心で、軸方向の変動速度が有限であるという条件：

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \psi' e'(\chi_2) \neq 0 \quad (5.1)$$

を課す必要がある。結局

$$\left. \begin{aligned} \phi &\sim x_2^2 & x_2 &\doteq 0 \\ \phi &\sim (x_2 - 1)^2 & x_2 &\doteq 1 \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

のようなふるまいを仮定する。これらの条件を直交関数系として Jacob の多項式  $G_n(7, 3; x_2^2)$  をうる。

最初の2項をとった計算では

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= 1 - x_2^2 + af(x_2) \\ f(x_2) &= \frac{4}{3 \cdot 5 \cdot 7} [4 - 7(6 - 5(1 - x_2^2))](1 - x_2^2)^4 (1 - x_2^2) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \bar{v}_1 &= 1 - x_2^2 + af(x_2) \\ f(x_2) &= \frac{4}{3 \cdot 5 \cdot 7} [4 - 7(6 - 5(1 - x_2^2))](1 - x_2^2)^4 (1 - x_2^2) \end{aligned}} \right\} (5.3)$$

をうる。乱れのエネルギー  $E$  は

$$E = \pi \int_0^1 (\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2) x_2 dx_2 \quad (5.4)$$

で定義される。臨界条件は

$$\begin{aligned} R_{cr} &= 656.7 \\ k_{cr} &= 5.776 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} R_{cr} &= 656.7 \\ k_{cr} &= 5.776 \end{aligned}} \right\} (5.5)$$

となる。層流 H.P. 流があったとしてこれに攪乱を入れる。どのような攪乱も、減衰するならば、その流れは安定である。その攪乱が増中するならば、不安定である。われわれの考えた平衡曲面上の状態は、乱れが十分に発達して、乱れと平均流とのエネルギーのやりとりが平衡に達している状態に対応している。そのばあい、圧力勾配が同じとすると、層流の状態と乱流の状態では、全流が異なる (Fig 5)。

小さい方から序々に  $R$  を上げて、不安定な状態に達したとすれば、われわれは臨界  $R$  数として層流に対応する値をえらぶであろう。上の  $R_{cr}$  の代表的速さに層流の値を入れれば

$$R_{cr}^{lam} = 1219.9 \quad (5.6)$$

がえられる。

### 文 献

- 1) Kuwabara, S.: Phys. of Fluids, Suppl. 10 (1967) S115.
- 2) 桑原 真二: 数理解析研講究録 24 (1967) 59.
- 3) " : " 80 (1970) 71.
- 4) Meksyn, D. & J. T. Stuart: Proc. Roy. Soc. A208 (1951) 517.
- 5) Stuart, J. T.: Applied Mechanics, Proc. 10th Congr. of Appl. Mech. (1960, Stresa) ed. by Rolla, F. & W. T. Koitor, 63.

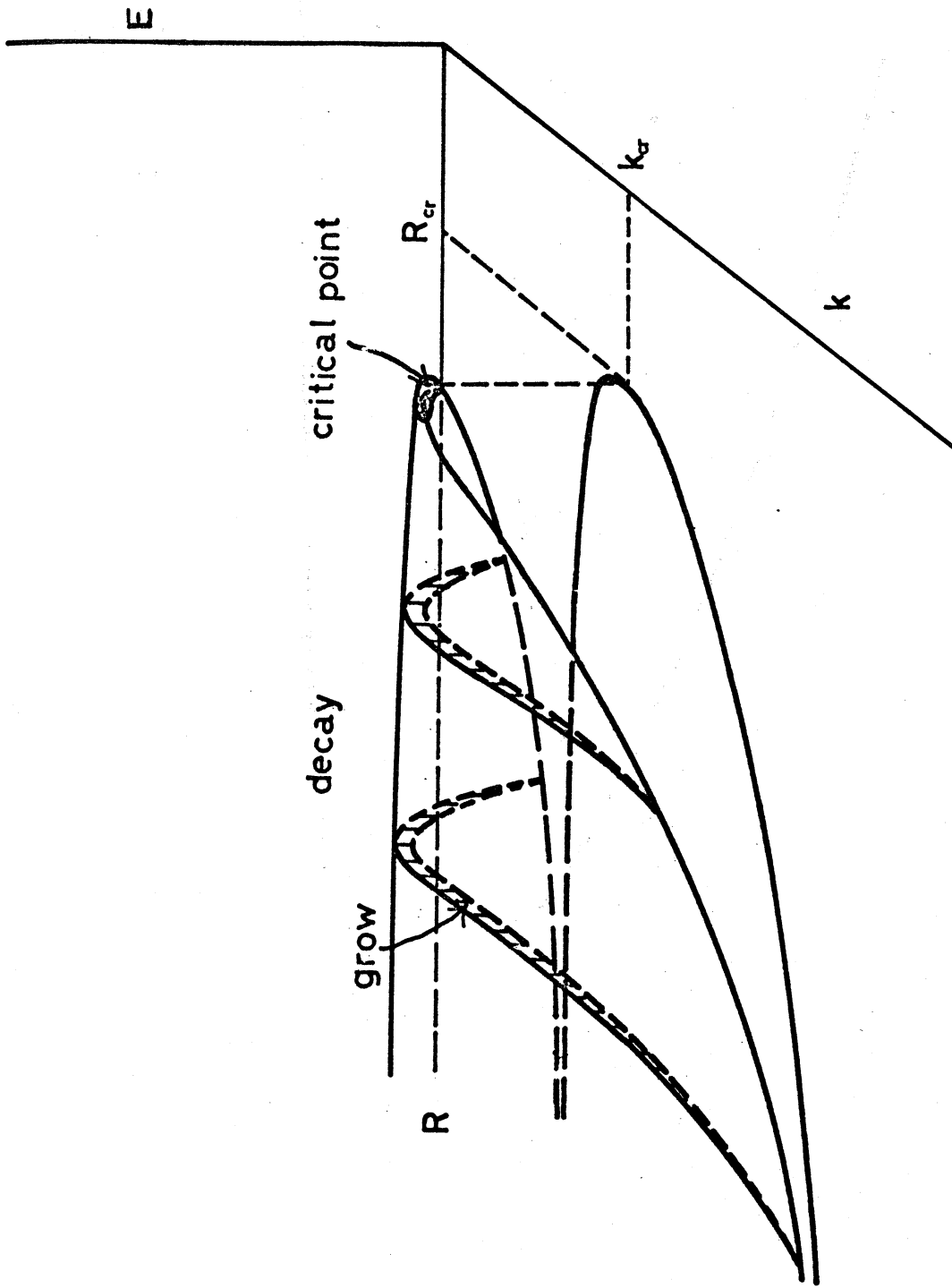


Fig. 1. Equilibrium surface for plane Couette flow.

Fig. 2. Equilibrium curve for plane Couette flow.

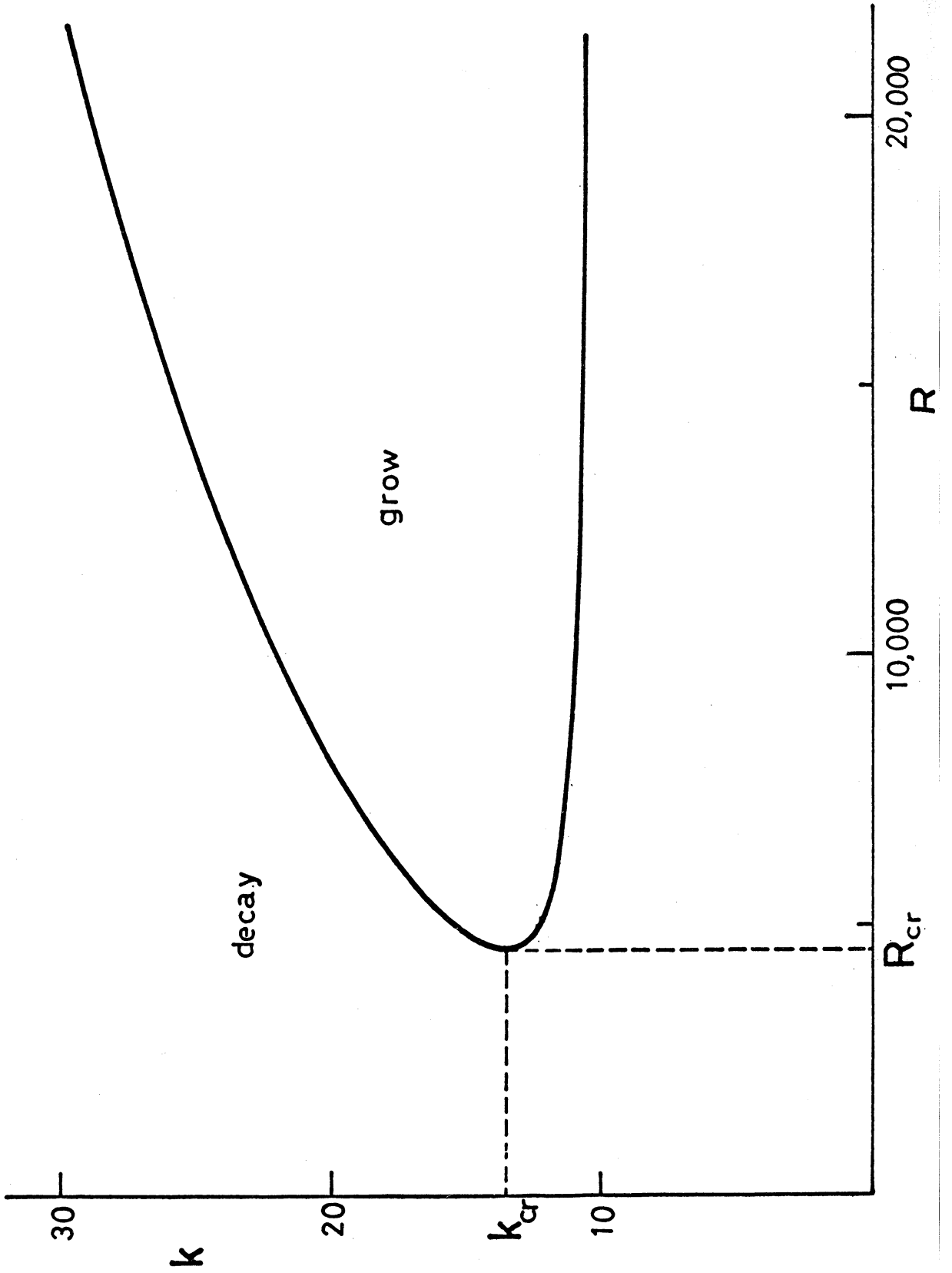




Fig. 3. Equilibrium surface for Hagen-Poiseuille flow.

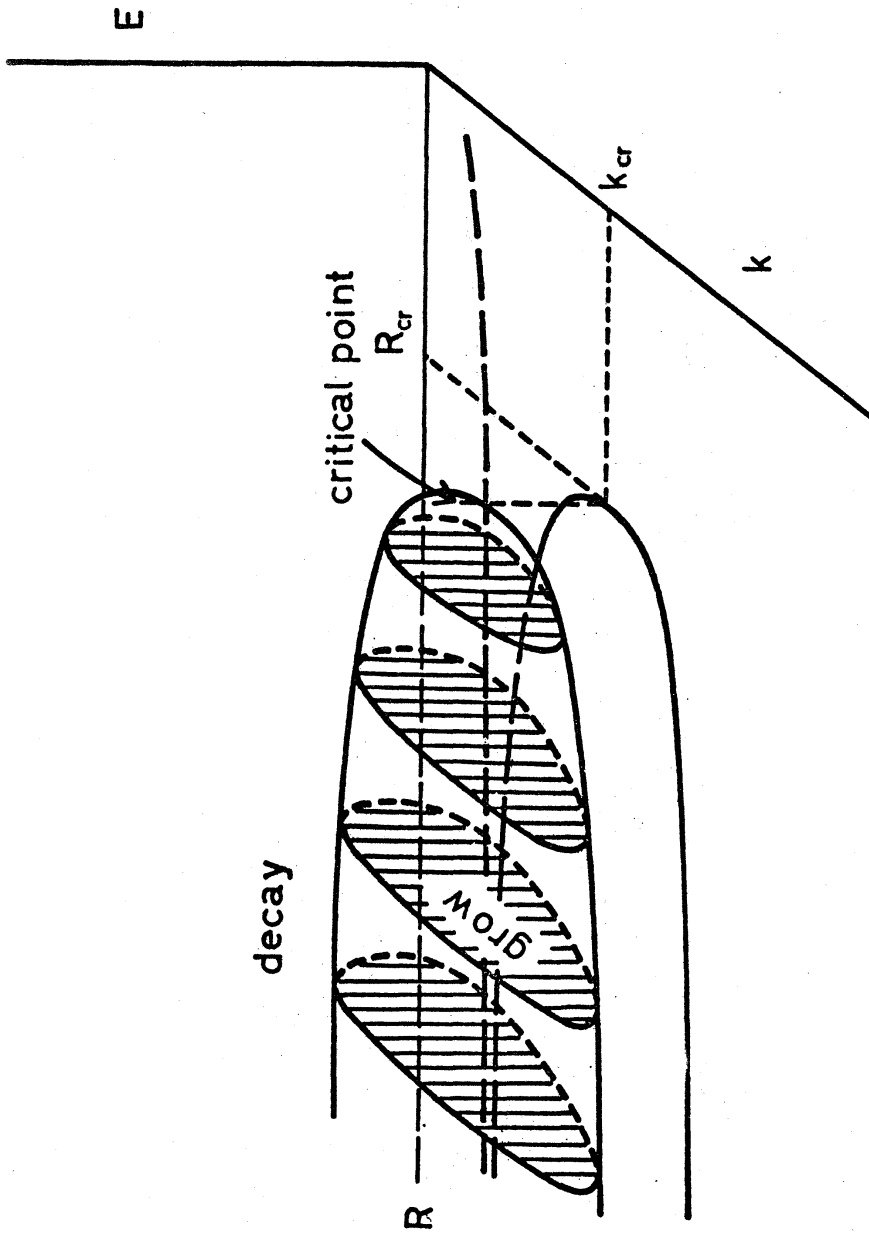


Fig. 4. Equilibrium Curve for Hagen-Poiseuille flow.

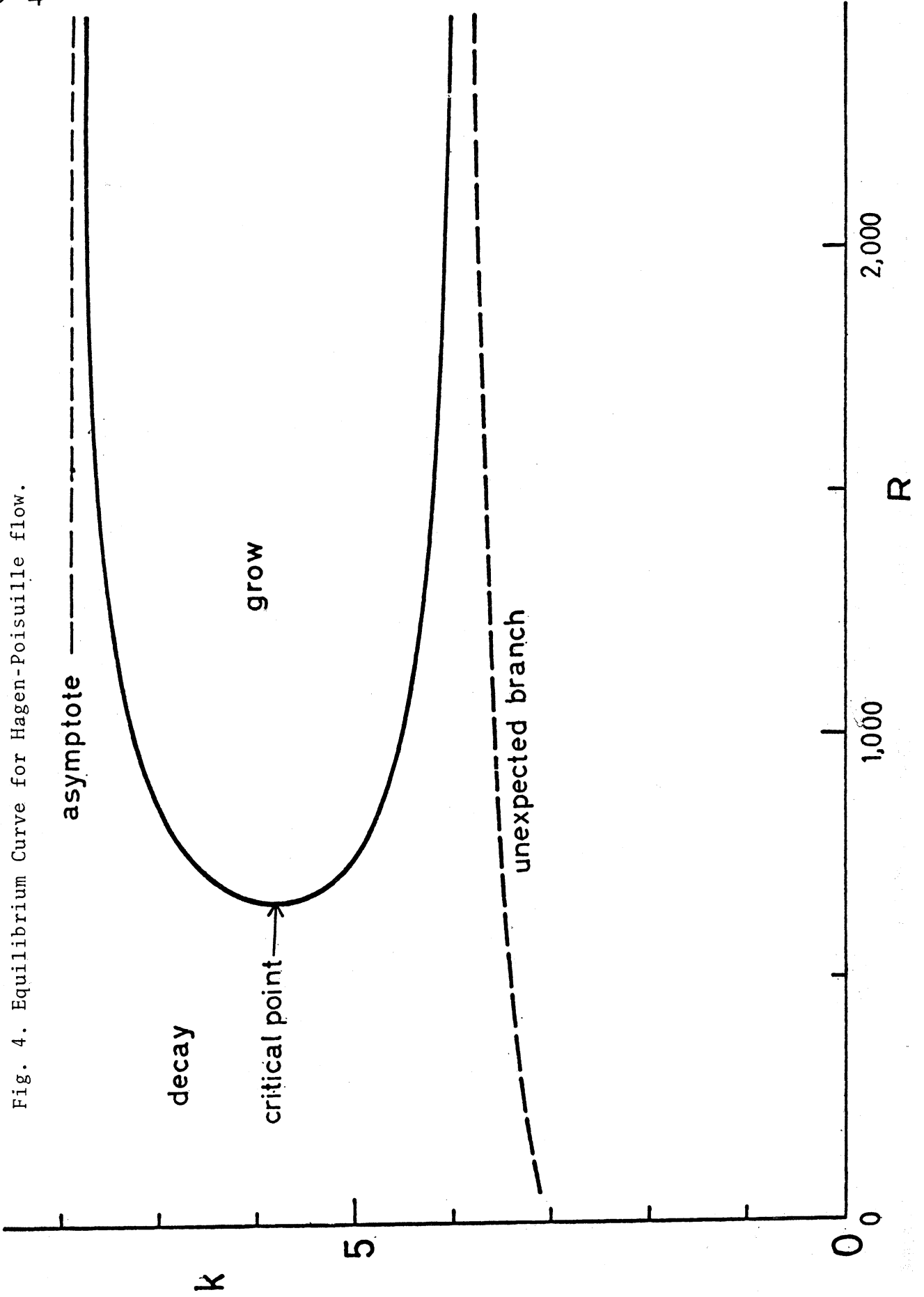
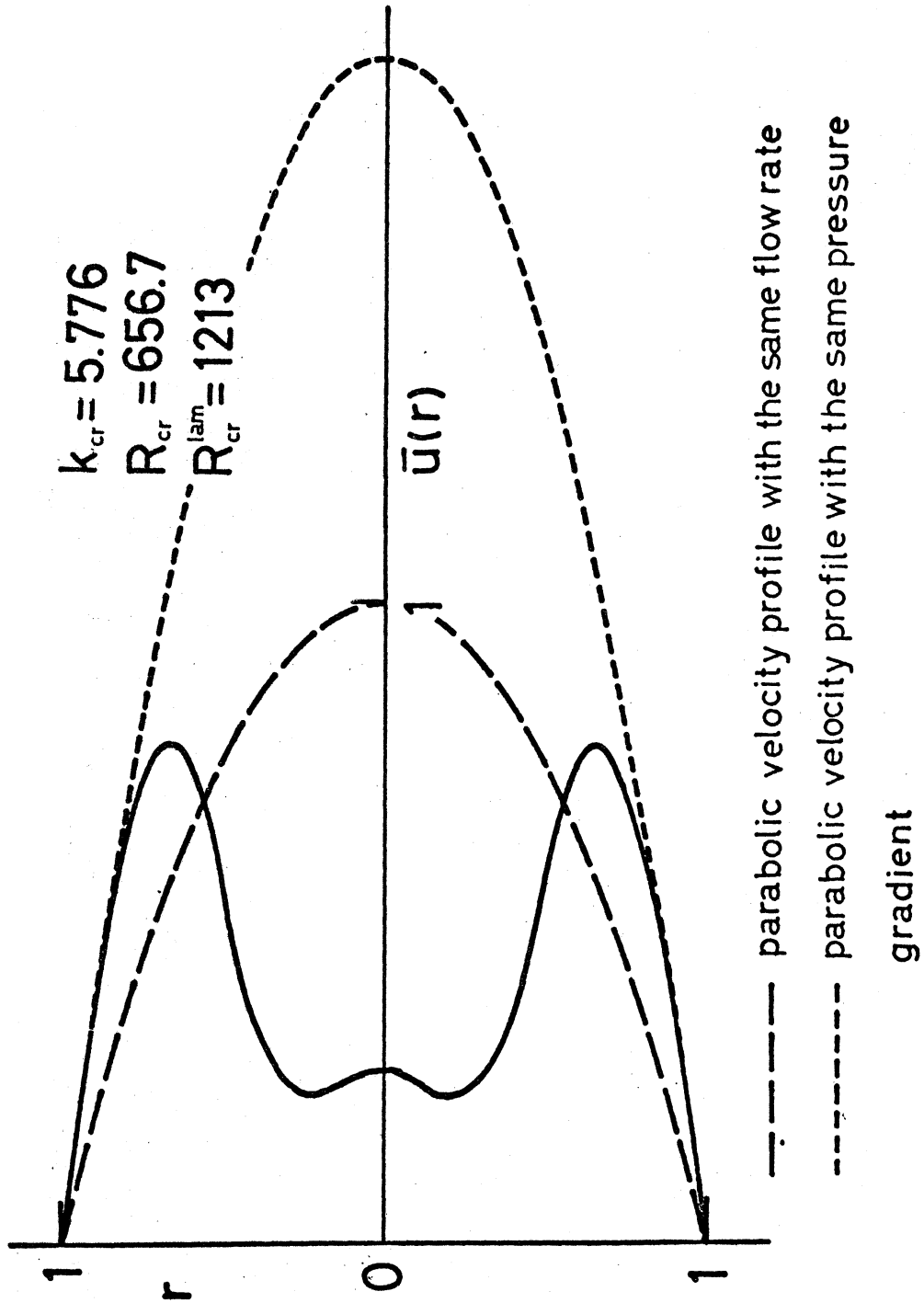


Fig. 5. Velocity profiles at critical condition.



62-6