数理解析研究所講究録
第98巻 1970年 68-87

$m \times n$ 長方形内の対称な桂馬道について

成蹊大 経済学部　松田道雄

§1. $m \times n$ 長方形内の桂馬道

$m \times n$ 長方形内の mn 個の正方形を長方形の目ということにする。これらの目の中心を桂馬飛びでちょうど1度ずつ通る道を"$m \times n$ 長方形内の桂馬道"という。桂馬道がある目を通るというのは，その目の中心を通ることであって，その目のことを"桂馬道の上の点"ということがある。

桂馬道の出発点と終点が別の目であるときそれを"開桂馬道"，全部の目をまわって，次に1度の桂馬飛びでふたたび出発点にもどる回路を"閉桂馬道"という。

長方形内の一部分の目を通ってAからBまでいく桂馬飛びの道を"部分開桂馬道"といい，一部分の目を通ってふたたび出発点にもどる桂馬飛びの道を"部分閉桂馬道"または"部分回路"ということにする。

一般性を失わないから，必要な場合のほかは $m \leqq n$ と

する。

$m=1, 2$ のときは，長方形内の桂馬道が存在しないことと明らかであるから， $3 \leqq m \leqq n$ として考え，"m，n は整数である"ことをいちいち断らないことがある。

§2. $4 \times n$ 長方形内の桂馬道

$4 \times n$ 長方形において

(1) 閉桂馬道は存在しない。[1)]

(2) $n=4$ の場合は開桂馬道も存在しない。

(3) $n>4$ の場合は開桂馬道がつねに存在する。

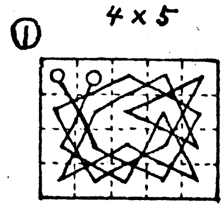
（証明） (1) は M. Kraitchik の定理の一部。

(2) は可能性のある場合を総当たりによって確かめる。

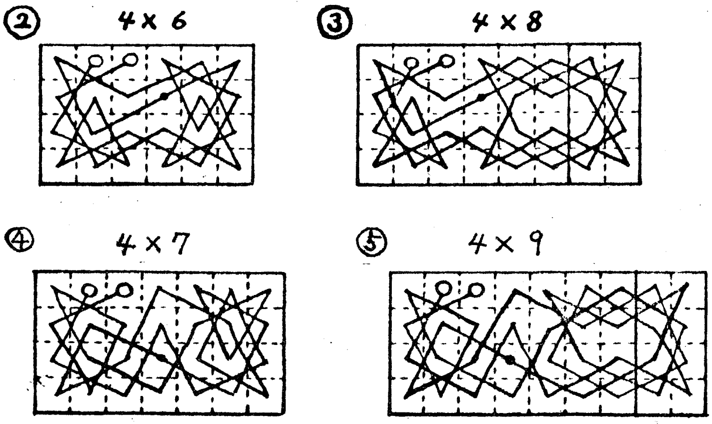
(3) 第1図の ② に第2図の増築を行なって ③ が得られ，この増築を続けて行なうと，一般に，
$4 \times (6+2l)$ 長方形内の開桂馬道が得られる。

同様にして ④ から ⑤ が得られ，一般に，
$4 \times (7+2l)$ 長方形内の開桂馬道が得られる。

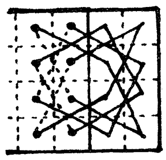
これに，第1図の ① を加えて，$n \geqq 5$ のとき，
$4 \times n$ 長方形内の開桂馬道が存在することを知る。



①は出発点と終点が第1行の左から第1，第2の目になっているが，他はみな第1行の左から第2，第3の目になっている。



第1図



第2図

(注)　4×5長方形では，第1行の第2，第3の目に両端がある桂馬道は存在しない。（総当たり的試行錯誤によって確かめる。）

§3.　$m \times n$ 長方形内の線対称な桂馬道の存在について

“$m \times n$ 長方形において，

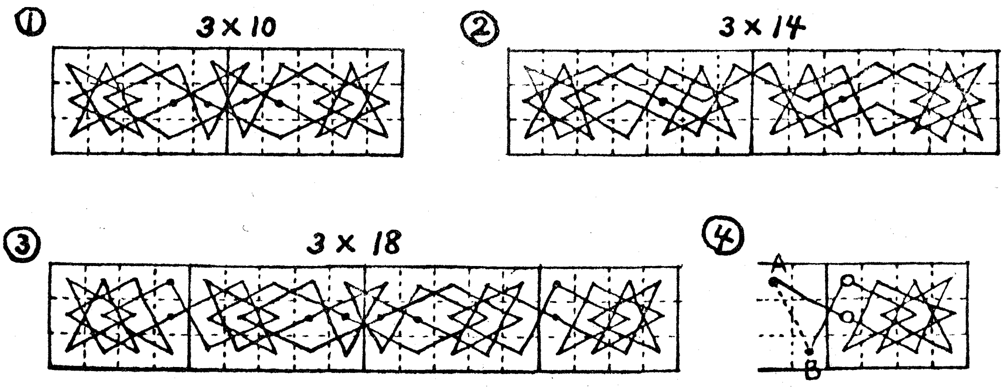
(1)　$m=3$　で，n が4で割り切れない10以上の偶数であるとき

(2)　m，n がともに5以上で，一方が奇数，他方が4で割り切れない偶数であるとき

には，線対称な桂馬道が存在する。

(3)　その他の場合には線対称な桂馬道は存在しない。”

（証明） (1) $m=3$ で，n が 4 で割り切れない 10 以上の偶数であるとき



第３図

第３図の ①，② をもとにして，④ の増築用ブロックを ③ のように左右対称の位置に増築することができる。この増築を続けることによって，

① からは　$3\times(10+8\ell)$ 長方形内の対称な閉桂馬道

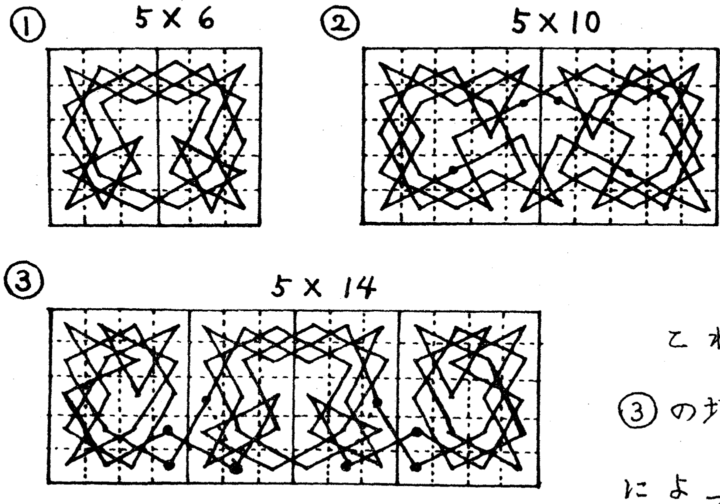
② からは　$3\times(14+8\ell)$ 長方形内の対称な閉桂馬道

が得られる。すなわち，n が 4 で割り切れない 10 以上の偶数であるとき，$3\times n$ 長方形内の線対称な閉桂馬道が存在する。

(2) m を 5 以上の奇数，n を 4 で割り切れない 6 以上の偶数とするとき

（このようにしても (2) の場合の一般性を失わない。ただし，この場合は $m>n$ のときも考えるものとする）

1°　5×n長方形（nは4で割り切れない6以上の偶数）

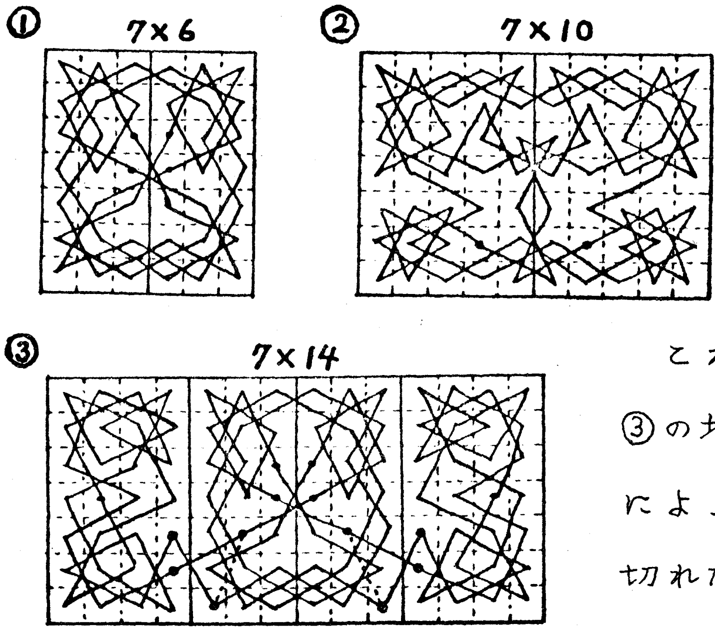


第4図

左の図の①，②は線対称な閉桂馬道である。

これらをもとにして③の増築を続けることによって，“4で割り切れない6以上の偶数nに対して，5×n長方形内の線対称な閉桂馬道が得られる。”増築用のブロックは第1図の①である。

2°　7×n長方形（nは4で割り切れない6以上の偶数）



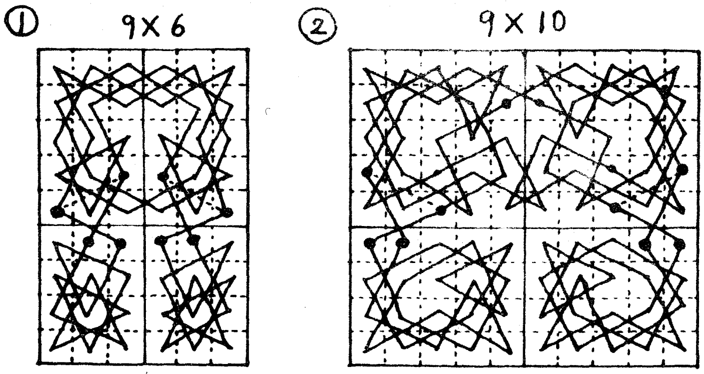
第5図

左の図の①，②は線対称な閉桂馬道である。

これらをもとにして③の増築を続けることによって，“4で割り切れない6以上の偶数nに対して，7×n長

方形内の線対称な閉桂馬道が得られる。”

3°. 9×n長方形（nは4で割り切れない6以上の偶数）

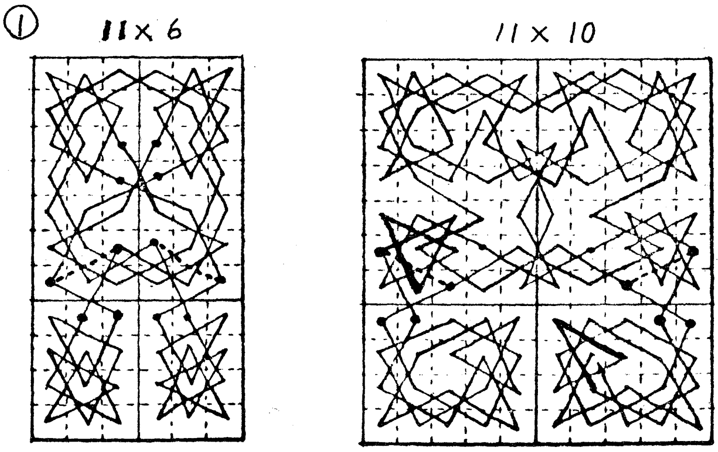


第6図

左の図の①，②は線対称な閉桂馬道である。

これらをもとにして，第1図の⑤を用いて増築すれば，“4で割り切れない6以上の偶数nに対して，9×n長方形内の線対称な閉桂馬道が得られる。”

4°. 11×n長方形（nは4で割り切れない6以上の偶数）



第7図

左の図の①，②は線対称な閉桂馬道である。

これらをもとにして，第1図の方法で第2図を増築して作った4×11長方形をブロックとし，上と同様な増築を行なえば，“4で割り切れない6以上

の偶数 n に対して，$11\times n$ 長方形内の線対称な閉桂馬道が得られる。”

第6図，第7図は，第4図，第5図をもとにして，第1図の長方形をブロックとして増築したものである。これにならって，4で割り切れない6以上の偶数 n に対しての　$5\times n$ 長方形，$7\times n$ 長方形内の線対称な閉桂馬道をもとにして，増築を続ければ，$(5+4l')\times n$ 長方形，$(7+4l')\times n$ 長方形内の線対称な閉桂馬道が得られる。すなわち，

“m が5以上の奇数で，n が4で割り切れない6以上の偶数であるとき，$m\times n$ 長方形内の線対称な桂馬道が存在する。”

(3)　(1)，(2) のどちらでもない場合

詳しくいえば，

“$m\times n$ 長方形において，

(i)　m，n のうちに4以下のものがある場合については，

ⓐ　$m=3$　で，n が10以上の奇数のとき

ⓑ　$m=3$　で，n が10以上の4の倍数のとき

ⓒ　$m=3$　で，n が3から9までの整数のとき

ⓓ　$m=4$　で，n が4以上の整数のとき

(ii) m, nがともに5以上の場合については，

ⓐ m, nがともに奇数のとき

ⓑ m, nがともに偶数のとき

ⓒ 一方が奇数で，他方が4の倍数のとき

に，線対称な閉桂馬道は存在しない。”

ということである。

これらを証明するために，まず次の4つの補助定理を証明する。

補助定理1. 長方形の対称軸が長方形の目を通る場合（m, nのうちに奇数がある場合）には，軸上の目（軸がその中心を通る目）が3個以上あれば，その軸に関して対称な桂馬道は存在しない。

<証明> 長方形の対称軸上の目Aがあるとする。線対称な桂馬道があれば，それはAを通る。このとき，この線対称な桂馬道は，Aから軸の両側に対称の位置にあるように進んでいくと考えられる。いま，Aから出発して軸の両側に進んだ桂馬道の一方の先端がはじめて軸上の目にくれば，他方の先端も同時に軸上の同じ目にくるから，そこで道は閉じてしまう。したがって，長方形内の閉桂馬道が対称図形であれば軸上の目がちょうど2つでなければならない。

両端が別の点となる場合は閉桂馬道となり，軸上の目がただ１つの場合にしか起こらない。

ゆえに，軸上に３個以上の目があれば，線対称な桂馬道は存在しない。

このことから，次のことが成り立つ。

“$m \times n$ 長方形で，m が３以上の奇数ならば，中央の行について対称な桂馬道は存在しない。また，n が３以上の奇数ならば，中央の列について対称な桂馬道は存在しない。”（証明終り）

これで，(i) の ⓐ，(ii) の ⓐ が証明された。

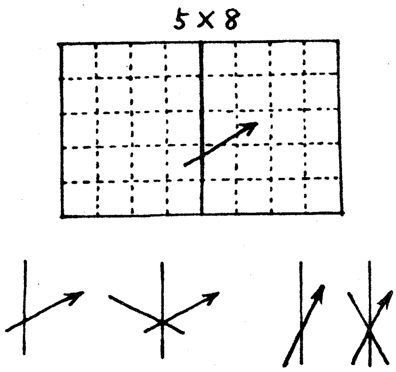
正方形の場合：　正方形は対角線に関して対称であるが，１辺が３以上の場合には対角線上に３個以上の目があるから，正方形ではつねに対角線に関して対称な桂馬道は存在しない。

補助定理２．長方形の対称軸のうちに長方形の目を通らないものがある（m，n のうちに偶数がある）場合に，線対称な桂馬道があれば，それは閉桂馬道である。

〈証明〉　n が偶数であるとしよう。この場合は中央の縦線は長方形の目を通らないから，桂馬道は軸の上で方向を変えることはできない。

したがって，次の図のように軸を通り抜ける道（矢印

の線で示した）がある。（通り抜ける道がなければ全部の目を通ることはできない）



第8図

もし桂馬道が軸に関して対称ならば，矢印の線と対称の位置に他の道が軸を通り抜けているはずであるから，軸を横切る道は必ず偶数個である。したがって，線対称な桂馬道があれば，出発点と終点とが軸について，両側に1つずつあるということは起こらない。

ところが，いま線対称な桂馬道が開桂馬道であると仮定すると，その両端の目は軸に関して対称の位置にあるから，軸の両側に1つずつなければならないこととなり，上のことと矛盾する。

ゆえに，$m \times n$ 長方形で，n が偶数のとき線対称な桂馬道があるとすれば，それは閉桂馬道に限る。（証明終り）

このことは，長方形の目の一部を通る1つの線対称な桂馬道についても成り立つこと明らかである。

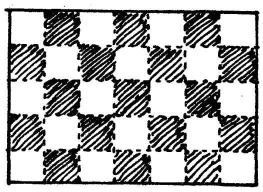
いいかえれば，

“n が偶数である $m \times n$ 長方形では，閉桂馬道でない線対称な桂馬道は存在しない。”

このことは，m が偶数である場合にも同様である。

補助定理3. m, n がともに奇数であるとき，$m\times n$ 長方形内の閉桂馬道は存在しない。

〈証明〉 第9図のように長方形内の目に市松模様を入れると，目の個数が奇数の場合には，白の目の個数と黒の目の個数が1だけちがっている。1回の桂馬飛びでは，白から黒へ，または黒から白へしか行けないから，全部の目を通る桂馬道ができたとすれば，出発点と終点は同じ色の目である。したがって，次の1度の桂馬飛びで出発点にもどることはできない。（証明終り）



第9図

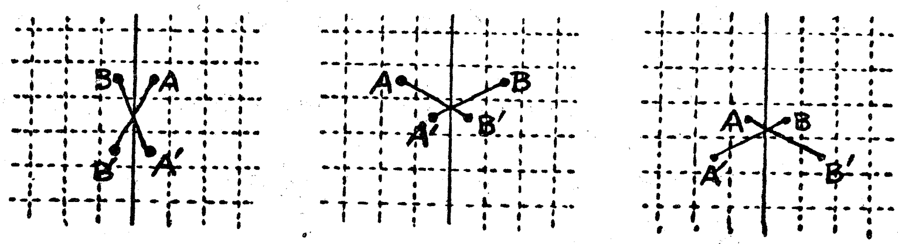
この場合は補助定理1. で証明したように線対称な桂馬道も存在しない。

ゆえに，補助定理2と3により，m, n の偶奇にかかわらず，"$m\times n$ 長方形では，閉桂馬道が存在しなければ，線対称な桂馬道は存在しない。また，線対称な桂馬道はすべて閉桂馬道である。" ということが成り立つ。

補助定理4. $m\times n$ 長方形で，n が偶数であるとき，線対称な桂馬道がかけたとすれば，軸（中央の縦線）を横切る道には線対称の位置にある道がかならずある。

（補助定理2.の証明参照）　その1対をAB′, BA′とし，AとB，A′とB′がそれぞれ対称の位置にあるとすれば，長方形内の市松模様ではAとB，A′とB′は異なる色の目となり，AとA′，BとB′は同じ色の目となる。

このとき，Aから何回かの桂馬飛びを続けてA′に達する桂馬道（同じ目を2度以上通ることはないものとする）で，B′を通らない方をA〰A′，また同様にBからB′に至る桂馬道で，A′を通らない方をB〰B′で表わせば，A〰A′とB〰B′は軸に関して対称の位置にある。[2]



第10図

（注）上のことはいいかえれば，

“$m \times n$長方形で，nが偶数であるとき，A〰A′とB〰B′とが線対称の位置になければ，その閉桂馬道全体が線対称図形にはならない。”

ということである。

以上の補助定理を用いて，(i)のⓑ，(ii)のⓑ，ⓒを証

明しよう。

そこで，いまこれらの場合に，線対称な桂馬道が存在すると仮定すれば，それは閉桂馬道であって，補助定理4により，A〰A′ と B〰B′ が線対称の位置にあるはずである。

A〰A′ と B〰B′ が線対称の位置にあれば，両方の桂馬道の上の目の間に1対1の対応がつくから，目の個数は等しく，

(ii) の ⓑ　m，n がともに偶数のとき

$m=2p$，$n=2q$　とすれば　両端の目を含めて

$$\frac{2p\times 2q}{2}=2pq \quad (\text{偶数})$$

(i) の ⓑ，(ii) の ⓒ　m が奇数で，n が4の倍数

$n=4k$　とすれば　両端の目を含めて

$$\frac{m\times 4k}{2}=2mk \quad (\text{偶数})$$

でなければならない。

ところが A〰A′ は出発点と終点との目の色が同じであるから，両端の目を含めて偶数個ということは起こらない。

ゆえに，A〰A′ と B〰B′ が線対称の位置にあるような閉桂馬道は作れない。

したがって，mが4の倍数のとき，また，m，nがともに偶数のときは，$m \times n$長方形は線対称な桂馬道をもたない。（補助定理4とその注）

(i)の©は総当たり的試行錯誤によって確かめる。

(i)の ⓓ は Kraitchik の定理により閉桂馬道が存在しないことと補助定理2によって証明される。

以上で，線対称な桂馬道が存在しない場合(3)の証明を終わる。

(注1) ここでは長方形内の線対称な桂馬道の存在に関する定理の証明を話題として，パズルの解明にコンピュータの関与する領分ということを考えて見たのである。

(1) 線対称な桂馬道が存在するものについて，その存在することの証明する場合

- ○ 増築に用いるブロックの発見（試行錯誤と推論）
- ○ 増築のもとになる長方形内の桂馬道の発見

  たとえば第3図の①，②；第4図の①，②；第5図の①，② などは試行錯誤により見付ける。
- ○ ブロックを用いて増築する。（数学的帰納法により一般化する）

(2) 線対称な桂馬道が存在しない場合，そのことを証明す

るとき

○　一般的な定理にもとづいて証明する。

たとえば(i)の ⓐ，(ii)の ⓐ が補助定理1.にもとづいて証明され，また(i)の ⓑ，(ii)の ⓑ，ⓒ が補助定理2.〜4. にもとづいて証明される。

○　一般的な定理にもとづいて証明することができず，個々の場合について試行錯誤により総当たりを行なうものがある。

たとえば(i)の ⓒ はそれである。

総当たり的な試行錯誤による部分は，この問題では m，n の値が小さい範囲であるからコンピュータによらないでできたが，コンピュータの関与する領分である。

（注2）　§3のはじめの(1)，(2)の証明の中で，線対称な閉桂馬道と書いたが，上の補助定理2により，線対称な桂馬道といえば当然閉桂馬道である。

$m \times n$ 長方形内の点対称な閉桂馬道・開桂馬道の存在についても調べることができる。その結果といくつかの注を次に示しておく。

§4. $m \times n$ 長方形内の点対称な閉桂馬道の存在について

"$m \times n$ 長方形において，次の各場合に点対称な閉桂馬道が存在する。

(1) $m = 3$ で，n が 10 以上の偶数（12 を除く）であるとき[3)]

(2) m，n がともに 5 以上の整数で，m，n がともに奇数のときと，5×6，6×5 のときを除いたものであるとき

（注）(2) は，$m \leqq n$ として（一般性を失わない）

(2)$_1$ m が 5 以上の奇数，n が 8 以上の偶数であるとき

(2)$_2$ m が 6 以上の偶数，n が 6 以上の整数であるとき

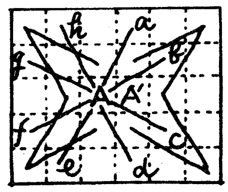
に分けて考えることができる。②$_1$，②$_2$ は点対称な長方形内の閉桂馬道をもとにして，第1図のブロックを，左右・上下に点対称の位置に増築していく方法によって存在することが示される。

m，n がともに奇数のとき，また $m = 3$ で $n = 4$，6，8 のときは閉桂馬道が存在しない。（前者は補助定理3，後者は総当たり的な試行錯誤によって確かめられる）

5 × 6 長方形では線対称な閉桂馬道は存在する（第4図①）が点対称な閉桂馬道は存在しない。（総当たり的な試行錯誤により確かめる。下の注1参照）

また，$m=4$ のときは n が何であっても閉桂馬道は存在しない。[1]

(注1) 長方形の4つの隅は二方路の目であるから，閉桂馬道はこれらの二方路をすべて通る。それをまずかき入れる。



第11図

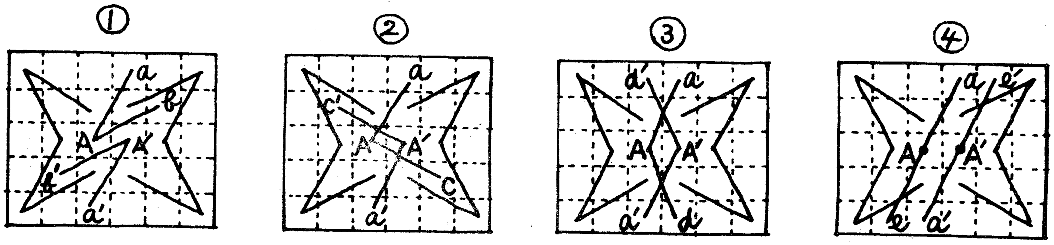
第11図は 5 × 6 長方形についてそれを示したものである。A印の目から出る八方の桂馬飛びの道を a，b，c，d，e，f，g，h と名づける。Aの目を通過する道のとり方は，この8個の道から2個を選ぶ仕方，すなわち ${}_8C_2 = 28$ 通りである。それは，

① a, b ② a, c ③ a, d ④ a, e ･･････

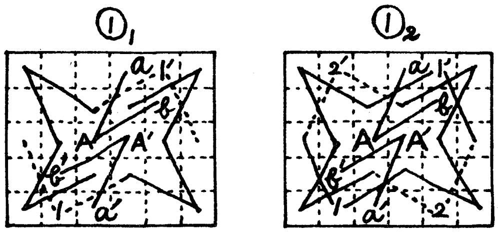
㉗ f, h ㉘ g, h

である。そのおのおのの桂馬飛びの道に対して，長方形の中心に関して，点対称の位置にある道をつける。

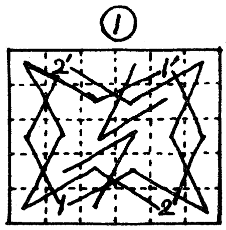
たとえば，第12図①の a'，b' はそれである。第12図はこのようにして作った①〜㉘の場合のうちから①〜④を示したものである。



第12図



第13図



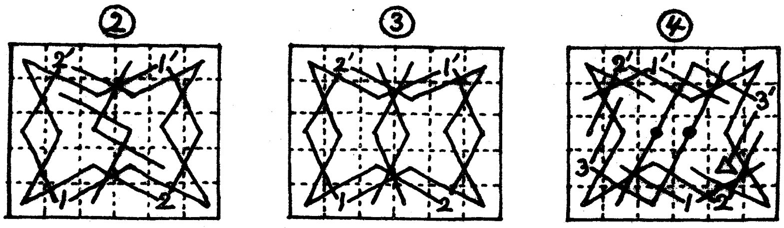
第14図

第13図①$_1$ のように，1，1′が二方路の目となるから，その目から出る道をつける。次に，①$_2$ の 2，2′の目についても同様にする。このように二方路の目をさがして道をつけていく。番号は，その点からの道をつけた順番を示したものである。①の場合は①$_2$に至って，一部の目を通って閉じる部分回路ができてしまう。これは，①の場合からは点対称な閉桂馬道ができないことを示すものである。これらの図①，② をまとめて，第14図のように表わす。

第12図の ②，③ からも同様にして第15図の ②，③ が得られる。また，第12図の ④ について試みると，第15図の ④ となり，△印の目からはもはやどの目へも行

くことができない。

これも④の場合



第15図

から所要の桂馬道が得られないことを示すのである。

なお，⑤～㉘のおのおのについて同じように試みた結果，どれも途中で，部分回路ができたり，△印のところのように，これ以上進むことのできない目ができたりして，点対称な閉桂馬道が存在しないことがわかった。

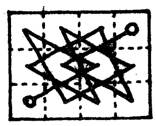
（注２）　$m \times n$ 長方形で，$m=3$ に対して $n \geqq 10$ のとき，m, n がともに５以上で，mn が偶数のときは，その長方形内の閉桂馬道が存在することがわかっている。このことと§３，§４の事実から，次のことがわかる。

“閉桂馬道が存在する長方形のうちで，線対称な桂馬道も点対称な桂馬道もともに存在しないのは３×12長方形だけである。”

§5. $m \times n$ 長方形内の点対称な閉桂馬道の存在について

“$m \times n$ 長方形（$m \leqq n$ とする）において，次の各場合に点対称な閉桂馬道が存在する。

(1)　３×４長方形（第16図）



第16図

(2)　$m=3$　で，n が７以上の整数のとき

(3) $m=4$ で，nが5以上の奇数のとき

(4) m，nがともに5以上であって，

m，nがともに奇数のとき

m，nの一方が奇数で，他方が偶数のとき（ただし 5×6長方形を除く）”

(2)～(4)の場合はいくつかのもとになる桂馬道（点対称な開桂馬道）からの増築の方法によって存在が証明される。

（注） 3×3，3×5，3×6長方形では全部の目を通る桂馬道ができない。（総当たり的な試行錯誤で確かめる）

$m \times n$長方形でm，nがともに偶数の場合は目の総数は偶数である。この場合開桂馬道があれば，桂馬飛びの回数は奇数個である。したがって，さらに点対称であれば，中央に位する桂馬飛びの道が1つあって，それ自身が点対称になっていなければならない。したがって，その道は点対称の中心を通る。ところが中心は，中央の縦・横の線の交点になるから，桂馬道が中心を通ることはできない。ゆえに点対称な開桂馬道は存在しない。

5×6長方形では点対称な開桂馬道も存在しない。

1) M. Kraitchik: *Mathematical Recreations.* (1942) pp. 260～261

2) 松田道雄：“3×n長方形内の桂馬道について”成蹊大学一般研究報告 Vol. 5, No. 3, pp. 34～36

3) 同上 ：同上 pp. 32～42