数理解析研究所講究録
第98巻1970年105-135

マヤ・ゲームの数学的理論
（佐藤幹夫氏講演）

京大 理 榎本彦衛

佐藤先生は、Maya game について今までにも何度か講演されていますが、良形判定条件の完全な証明はまだ一度も発表されていません。今回のシンポジウムにおいても、簡単な解説をされただけでしたが、シンポジウム終了後に、詳しい証明を初めて聞かせて頂くことができました。§2から後はその時の記録です。ただ、定理(3.7)には証明の方針しか与えてありません。詳細は[3]を参照して下さい。§1に書いてあることが、ほぼシンポジウムにおいて話された内容に相当しています。

（文献）

[1] 佐藤幹夫：あるゲームについて（代数幾何学シンポジウム報告，1968，東大数学教室）

[2] 一松信：石とりゲームの数理（森北出版）

[3] 榎本彦衛：Maya game について（数学の歩み（近刊））（佐藤特集号）

§1. Maya game の解説

次のような game（Maya game[1)] と呼ぶことにする）を考えることにする。

白と黒の碁石が一列に並べられている状態から game を開始する。ただし、ある所から左はすべて黒石，ある所から右はすべて白石になっているとする．

例 1. ・・・ ● ● ● ○ ● ● ● ● ○ ○ ○ ● ○ ○ ○ ○ ・・・

-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

例 2. ・・・ ● ● ● ○ ● ○ ● ● ○ ○ ○ ● ○ ● ○ ○ ・・・

許される‘手’というのは，白石と黒石を交換することであるが、交換することにより、黒石は前の位置より左側に行かなければならない。交互に許された手を実行していき、許された手がなくなった時、すなわち，ある所から左はすべて黒石、右側はすべて白石となり、従ってどの黒石もどの白石より左側にきた時に game は終了し、手のなくなった方が負けである。

碁石は数直線上に並んでいて、その座標が 0, ±1, ±2, ±3, ・・・・ となっていると考えることができる。座標の原点はどこにとってもいいが、ここでは一番左側にある白石の座

標を0とする。そうすると、黒石のある場所は、

$$\cdots\cdot -3,\ -2,\ -1,\ \ell_0,\ \ell_1,\ \cdots\cdot\ \ell_{n-1}$$

と書ける。例1では

$$\ell_0 = 1,\ \ell_1 = 2,\ \ell_2 = 3,\ \ell_3 = 4,\ \ell_4 = 8,$$

例2では

$$\ell_0 = 1,\ \ell_1 = 3,\ \ell_2 = 4,\ \ell_3 = 8,\ \ell_4 = 10$$

となっている。ℓ_i 達は

(1.1) $0 < \ell_0 < \ell_1 < \cdots\cdot < \ell_{n-1}$

という関係を満たしているから、

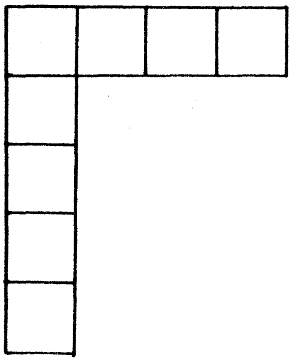
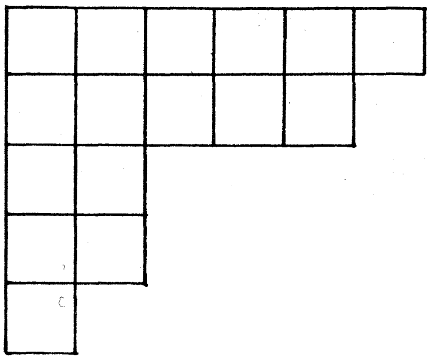
$$f_i = \ell_i - i \quad (i = 0, 1, \cdots\cdot, n-1)$$

とおくと f_i 達は、

(1.2) $0 < f_0 \leqq f_1 \leqq \cdots\cdot \leqq f_{n-1}$

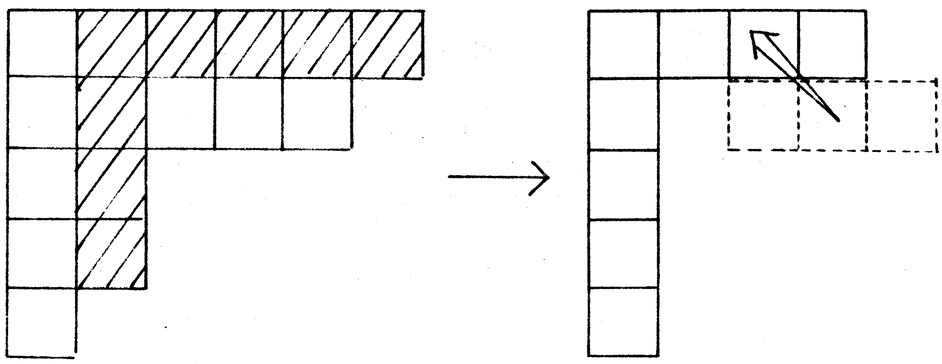
という関係を満たす。

一般に、(1.2) を満たす整数の組 $\Delta = (f_0, f_1, \cdots, f_{n-1})$ は Young diagram と呼ばれ，これは第1行目に f_{n-1} 個のマス目，第2行目に f_{n-2} 個のマス目，$\cdots\cdot$，第 n 行目に f_0 個のマス目を左端をそろえて並べた diagram により具体的に実現される。[2)] 明らかに、Maya game の局面と Young diagram とが1対1に対応している。最初にあげた例を Young diagram を使って書くと、次頁のようになる。

例1.  例2. 

しかし、Maya game との関係では、(f_i) より (l_i) の方が重要であり、(1.1) を満たす (l_i) と、(1.2) を満たす (f_i) とは1対1に対応しているので、ここでは $D=(l_0, l_1, \cdots\cdots, l_{n-1})$ という組のことを Young diagram と呼ぶことにする。

Young diagram の i 行 j 列目にあるマス目と、その右側および下側にあるマス目を全部合わせたものを hook (i, j) と呼ぶことにする。容易にわかるように、Maya game において、右から i 番目の黒石と左から j 番目の白石とを交換することは、対応する Young diagram において、hook (i, j) を取り除き、残りを左上につめるという操作に対応する。例えば、例2において、2の位置にある白石と10の位置にある黒石を交換すると、例1の状態になるが、これは、例2の Young diagram から hook (1, 2) を取り去ることに対応している。



許される手というのを Young diagram $D=(l_0, l_1, \cdots, l_{n-1})$ の言葉でいうと、ある l_i を

$$l_i > l_i' \geqq 0, \quad l_i' \neq l_j \ (0 \leqq j \leqq n-1)$$

を満たす l_i' に変えることである。

（注） (1.1) を Young diagram の定義に使っていると、$l_i' < l_{i-1}$ となった時には、大きさの順に並べなおさなくてはならないし、$l_i'=0$ となった時には、座標の原点をずらせて、$(0, l_0, l_1, \cdots, l_{n-1})=(l_0-1, l_1-1, \cdots, l_{n-1}-1)$ という同一視を行なう必要がある。そこで $D=(l_0, l_1, \cdots, l_{n-1})$ が Young diagram であることの定義として

(1.1)′ $\quad l_i \geqq 0, \quad l_i \neq l_j \ (i \neq j)$

を使い，l_i 達の順序は無視することにしよう。

Maya game の良形（後手必勝形）の判定条件として同値なものがいくつか知られている。この節では、以下、それらの解説を証明抜きで与えることにする。

Young diagram D の hook Γ に含まれるマス目の数を Γ の size と呼ぶ。D の hook の中で、その size が丁度 2^i で割り切れる（i.e. 2^i で割り切れ、2^{i+1} では割り切れない）ものの数を $\alpha_i(D)$ と書くことにする。（$i=0, 1, 2, \cdots\cdots$）

判定条件Ⅰ. D が良形 $\Longleftrightarrow$ $\alpha_i(D)$（$i=0, 1, 2, \cdots\cdots$）がすべて偶数

最初にあげた例について、Young diagram のマス目に hook の長さを書き込むと、下のようになる。

例 1.

8	3	2	1
4			
3			
2			
1			

例 2.

10	8	5	4	3	1
8	6	3	2	1	
4	2				
3	1				
1					

例 1 では、$\alpha_0=4$, $\alpha_1=2$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=1$, $\alpha_i=0$ $(i \geqq 4)$ となっているから、これは良形ではない（実際、0 の位置の白石と 8 の位置の黒石とを交換すれば、game が終了する）。

例 2 では、$\alpha_0=8$, $\alpha_1=4$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=2$, $\alpha_i=0$ $(i \geqq 4)$ となっているから、これは良形である。

次に Young diagram D の hook の中で、size が 2^i で割り切れるものの数を $\beta_i(D)$ と書くことにする。すなわち、

$$\beta_i(D)=\sum_{j\geq i}\alpha_j(D) \qquad (i=0,1,2,\cdots\cdot)$$

とおく。

判定条件I′．Dが良形 $\Longleftrightarrow$ $\beta_i(D)$ $(i=0,1,2,\cdots)$ がすべて偶数

$\gamma_i(D)$ を、0または1で、$\gamma_i(D)\equiv\beta_i(D)\pmod 2$ となるように決め、第 i 桁目が $\gamma_i(D)$ となる2進数を、Young diagram D の F-number と呼び、$F(D)$ と書くことにする。

判定条件I″．Dが良形 $\Longleftrightarrow$ $F(D)=0$．

次に別の形の判定条件を与えることにしよう。

整数の全体 $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への写像 f で、

(1.3) $f(x+2^k)\equiv f(x)+2^k \pmod{2^{k+2}}$

$(k=0,1,2,\cdots\cdot)$

(1.4) ある非負整数 k が存在し、

$$f(x+2^k)=f(x)+2^k$$

となるものを考える。このような f の全体は、写像の合成に関し（非可換）群 G をつくる。[3] G の元の中で、(1.4) の k として0がとれるものを考える。この場合 $f(x+1)=f(x)$

$+1$ となるから、$f(0)=a$ とおくと、

$$f(x) = x + a$$

と書ける。これら'平行移動'の全体は、Gの部分群Hをつくる。

(1.3), (1.4) を満たすfに対し、座標xが$f(x) \geqq 0$を満たす場所に白石，$f(x) < 0$を満たす場所に黒石を置くことにより、Maya game の局面との対応がつく。ただし、平行移動（i.e. 座標の原点を取り換えること）によって局面は変わらないから、Maya game の局面とG/Hとが1対1に対応している。

判定条件Ⅱ.[4] $f \in G$が良形に対応する

$$\Leftrightarrow f \in G_0 = [G, G] \cdot H$$

以下、判定条件Ⅰ″をもっと詳しく考えることにしよう。そのために、2つの整数a, bの2進和$a \oplus b$を定義する。まず、

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0$$

と定義し、a, bの2進表示を

$$a = [\cdots\cdot\, a_2\, a_1\, a_0]_{2\text{-adic}}$$

$$b = [\cdots\cdot\, b_2\, b_1\, b_0]_{2\text{-adic}}$$

とするとき、$c_i = a_i \oplus b_i$とおけば、$a \oplus b$の2進表示は

$$a \oplus b = [\cdots\cdots c_2 c_1 c_0]_{2\text{-adic}}$$

で与えられる。ただし、負の数の2進表示は補数表示を使う。

すなわち、$a\ (\geqq 0)$ の2進表示を

$$a = [\cdots\cdots a_2 a_1 a_0]_{2\text{-adic}}$$

とするとき、

$$-a-1 = [\cdots\cdots \overline{a_2}\,\overline{a_1}\,\overline{a_0}]_{2\text{-adic}}$$

が $-a-1$ の2進表示である。ただし、$\overline{a_i} = a_i \oplus 1$ である。

（補数表示，2進和に関する詳しい説明は［2］付録2参照）

次に、整数 x の norm $N(x)$ を、

$$N(x) = \lambda(x) \oplus x$$

で定義する。ただし、$\lambda(x) = x-1$ である。すなわち、

$$2^k \| x \quad (\text{i.e. } 2^k | x,\ 2^{k+1} \nmid x)$$

とすると、

$$N(x) = [\cdots\cdots 0\overbrace{1\cdots 1}^{k+1}]_{2\text{-adic}} = 2^{k+1}-1$$

となる。この normを使うと、判定条件I″に出てきたF-number は、

$$F(D) = \sum_{\Gamma:\text{hook}}^{\oplus} N(\Gamma\text{の size})$$

と書ける。hookを使わず、(l_i) を使うと、

$$(1.5) \qquad F(D) = \sum_{i=0}^{n-1}{}^{\oplus}\, l_i \oplus \sum_{i<j}{}^{\oplus} N(l_i \oplus l_j)$$

と表わされる。[5]

§2. Maya algebra

前節の $(\mathbb{Z}, \oplus, \lambda)$ は

$$N(\lambda(x) \oplus \lambda(y)) = N(x \oplus y) \qquad (x, y \in \mathbb{Z})$$

という性質を持っている。そこで、この一般化として、次のように Maya algebra を定義する。（任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対して $x \oplus x = 0$ が成り立つから、$\oplus$ は引き算とみることもできるということに注意.）

(2.1) 定義： $A = (A, +, \lambda)$ が Maya algebra であるとは、次の (1), (2) を満たすことである。

(1) $(A, +)$ は可換群である.

(2) λ は A から A への写像であって、

$$N(x) = \lambda(x) - x$$

とおくと、

(2-i) $N(\lambda(x) - \lambda(y)) = N(x - y)$

が、また

$$\lambda'(x) = x + N(-x)$$

とおくと、

(2-ii) $N(\lambda'(x) - \lambda'(y)) = N(x - y)$

が、任意の $x, y \in A$ に対して成り立つ.

（注）A から A への写像 λ'' を

$$\lambda''(x) = x - N(x) = -\lambda'(-x)$$

と定義し、(2-ii) を

$$(2\text{-iii}) \quad N(\lambda''(x)-\lambda''(y)) = N(x-y)$$

でおきかえても、同値な Maya algebra の定義が得られる。

(注) $(A,+,\lambda')$, $(A,+,\lambda'')$ も Maya algebra となる。

すなわち、

$$N'(x) = \lambda'(x) - x = N(-x)$$

$$N''(x) = \lambda''(x) - x = -N(x)$$

とおくと、

$$N'(\lambda'(x)-\lambda'(y)) = N'(x-y)$$

$$N''(\lambda''(x)-\lambda''(y)) = N''(x-y)$$

が、任意の $x, y \in A$ に対し成り立つ.

(2.2) 定義: $M(x,y) = N(x-y)$ とおく。そして、A から A への写像 f が、

$$M(f(x), f(y)) = M(x,y) \quad (x, y \in A)$$

を満たす時、f は isometry であるという。

従って、定義 (2.1) における条件 (2-i), (2-ii) は、それぞれ、λ, λ' が isometry であるということを意味する。

以下、Maya algebra $A=(A,+,\lambda)$ を1つ固定して考えることにする。

(2.3) 定義: 集合 A から生成された自由 abel 群 $\mathbb{Z}(A)$

の元を divisor と呼ぶ。（Young diagram, すなわち, Maya game の局面の拡張と考えられる.）

（2.4）定義：$D \in \Phi(A)$ に対し、A から A への写像 φ_D を

$$\varphi_D(x) = x + M(x, D) \qquad (x \in A)$$

により定義する。ただし,

$$D = \frac{(a_1)\cdots\cdots(a_m)}{(b_1)\cdots\cdots(b_n)} \qquad (a_i,\ b_i \in A)$$

$$= (c_1)^{\nu_1}\cdots\cdots(c_\ell)^{\nu_\ell} \qquad (c_i \in A,\ \nu_i \in \mathbb{Z})$$

のとき、

$$M(x, D) = \sum_{i=1}^{m} M(x, a_i) - \sum_{j=1}^{n} M(x, b_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} \nu_i M(x, c_i)$$

とおく。また divisor $D' = (d_1)^{\mu_1}\cdots(d_k)^{\mu_k}$ に対しても

$$\varphi_D(D') = (\varphi_D(d_1))^{\mu_1}\cdots(\varphi_D(d_k))^{\mu_k}$$

と定義し、$\Phi(A)$ から $\Phi(A)$ への写像とも考える。

（2.5）定義：A から A への写像 μ を

$$\mu(x) = -x + N(0) \qquad (x \in A)$$

により定義し、$\mu(x)$ のことを x の complement と呼ぶ。

(2.6) $\mu^2 = id,$

$\lambda\mu\lambda' = \lambda'\mu\lambda = \mu.$

（証明）

$$\mu^2(x) = -\{-x + N(0)\} + N(0) = x \qquad (x \in A)$$

より $\mu^2 = id.$

$$N(0) = \lambda(0) = \lambda'(0)$$

に注意すれば，

$$\begin{aligned}\lambda\mu\lambda'(x) &= \lambda(-\lambda'(x) + N(0)) \\ &= -\lambda'(x) + N(0) + N(-\lambda'(x) + \lambda'(0)) \\ &= -(x + N(-x)) + N(0) + N(-x) \\ &= -x + N(0) \\ &= \mu(x)\end{aligned}$$

となる．同様に，

$$\begin{aligned}\lambda'\mu\lambda(x) &= \lambda'(-\lambda(x) + N(0)) \\ &= -\lambda(x) + N(0) + N(\lambda(x) - \lambda(0)) \\ &= -(x + N(x)) + N(0) + N(x) \\ &= \mu(x).\end{aligned}$$

従って，$\lambda \circ \mu\lambda'\mu = \mu\lambda'\mu \circ \lambda = \mu^2 = id$ となるから，

(2.7) $\mu\lambda'\mu$ は λ の逆写像である。従って，特に，λ は bijection である。

(2.8) φ_D ($D \in$ 亜(A)) は bijective isometry である。

(2.9) $D, D' \in$ 亜(A) ならば、

$$\varphi_{D'D} = \varphi_{\varphi_D(D')} \circ \varphi_D$$

が成り立つ。

(証明)

step 1. $D = (a)$ ($a \in A$) ならば、(2.8) が成り立つ。

$$\begin{aligned}\varphi_D(x) &= x + M(x, a) \\ &= x + N(x-a) \\ &= x + \lambda(x-a) - (x-a) \\ &= \lambda(x-a) + a \\ &= f_a^{-1} \circ \lambda \circ f_a(x)\end{aligned}$$

ただし、$f_a(x) = x - a$ とおく。f_a は明らかに bijective であって、かつ

$$\begin{aligned}M(f_a(x), f_a(y)) &= M(x-a, y-a) \\ &= N(x-y) \\ &= M(x, y)\end{aligned}$$

より、f_a は isometry である。故に、φ_D も bijective isometry となる。

step 2. φ_D が isometry ならば、(2.9) が成り立つ。

φ_D が isometry とすると、

$$\varphi_{D'D}(x) = x + M(x, D') + M(x, D)$$

$$= \varphi_D(x) + M(\varphi_D(x), \varphi_D(D'))$$

$$= \varphi_{\varphi_D(D')}(\varphi_D(x))$$

step 3. $D=(b)^{-1}$ $(b \in A)$ の時も、(2.8) が成り立つ。(従って (2.9) も成り立つ。)

$$D_1 = (b - \lambda(0)) \in \Phi(A)$$

とおくと、φ_{D_1} は *isometry* だから (*step* 1)

$$id = \varphi_{D_1^{-1}D_1} = \varphi_{\varphi_{D_1}(D_1^{-1})} \circ \varphi_{D_1}$$

となる。ところが、

$$\varphi_{D_1}(D_1^{-1}) = (\varphi_{D_1}(b - \lambda(0)))^{-1}$$

$$= (b - \lambda(0) + M(b-\lambda(0), b-\lambda(0)))^{-1}$$

$$= (b)^{-1}$$

$$= D$$

故に、$\varphi_D = (\varphi_{D_1})^{-1}$ は、*bijective isometry* である。

step 4. 任意の *divisor* $D = \dfrac{(a_1)\cdots\cdots(a_m)}{(b_1)\cdots\cdots(b_n)}$ についても、$m+n$ に関する帰納法により、(2.8), 従って (2.9) が証明できる。

(2.10) $\mathcal{G} = \{ \varphi_D \mid D \in \Phi(A) \}$ は写像の合成に関し群をつくる。特に $(\varphi_D)^{-1} = \varphi_{\varphi_D(D^{-1})}$ である。そこで、$D, D' \in \Phi(A)$ に対し、D' と D の新しい積 $D' * D$ を

$$D' * D = \varphi_D^{-1}(D') \cdot D$$

と定義すれば、$(\Phi(A), *)$ は群になり、

$$\mathcal{S}_{D' * D} = \mathcal{S}_{D'} \circ \mathcal{S}_{D}$$

が成り立つ。

(2.11)　$e_n = \lambda^{-n}(0)$ $(n \in \mathbb{Z})$ とおくと、

$$e_n = \begin{cases} -N(e_n) - N(e_{n-1}) - \cdots - N(e_1) & (n>0) \\ N(e_{n+1}) + N(e_{n+2}) + \cdots + N(e_{-1}) & (n<0) \end{cases}$$

が成り立つ。

(証明)　$N(x) = \lambda(x) - x$ より

$$e_n = -N(e_n) + \lambda(e_n)$$

となる。ところが

$$\lambda(e_n) = \lambda(\lambda^{-n}(0)) = \lambda^{1-n}(0) = e_{n-1}$$

$$\therefore\ e_n = -N(e_n) + e_{n-1}$$

これを繰り返せば、

$$\begin{aligned} e_n &= -N(e_n) + e_{n-1} \\ &= -N(e_n) - N(e_{n-1}) + e_{n-2} \\ &= \cdots \end{aligned}$$

となるが、

$$e_1 + N(e_1) = \lambda(e_1) = \lambda\lambda^{-1}(0) = 0$$

より、$e_1 = -N(e_1)$ に注意すれば、

$$e_n = -N(e_n) - N(e_{n-1}) - \cdots - N(e_1) \quad (n>0)$$

となることがわかる。$n<0$ の場合も同様。

(注) $A=(\mathbb{Z},\oplus,\lambda)$ とすると、$e_n=n$ である。従って (2.11) より

$$n=\begin{cases} N(n)\oplus N(n-1)\oplus\cdots\oplus N(1) & (n>0)\\ N(n+1)\oplus N(n+2)\oplus\cdots\oplus N(-1) & (n<0)\end{cases}$$

と書けることがわかる。これは整数を $[\cdots\cdots 0\,1\cdots 1]_{2\text{-adic}}$ という形の2進数の2進和として表わしたことになっている。

以下、M は symmetric, すなわち

$$M(x,y)=M(y,x)\qquad (x,y\in A)$$

を仮定することにする。6) これは $N(x)=N(-x)$ ということであるから、Maya algebra の定義における条件 (2-ii) は (2-i) より導かれることに注意する。

(2.12) 定義：divisor $D=\dfrac{(a_1)\cdots\cdots(a_m)}{(b_1)\cdots\cdots(b_n)}$ に対し、D の F-number $F(D)$ を

$$F(D)=a_1+\cdots+a_m-b_1-\cdots-b_n+\sum_{i<j\le m}M(a_i,a_j)+\sum_{i<j\le n}M(b_i,b_j)-\sum_{i,j}M(a_i,b_j)+n\,N(0)$$

により定義する。

(注) $D=(a_1)\cdots(a_m)=(c_1)^{\nu_1}\cdots(c_\ell)^{\nu_\ell}$ のときには、

$$\begin{aligned}F(D)&=a_1+\cdots+a_m+\sum_{i<j}M(a_i,a_j)\\&=\nu_1c_1+\cdots+\nu_\ell c_\ell+\sum_{i<j}\nu_i\nu_jM(c_i,c_j)\\&\quad+\sum_i\binom{\nu_i}{2}M(c_i,c_i)\end{aligned}$$

となり、$M(c_i, c_i) = N(0)$ だから、(2.12) は Young diagram に対する F-number (1.5) の自然な拡張になっている。

(2.13) F は $(\Phi(A), *)$ から $(A, +)$ への homomorphism になっている。すなわち、

$$F(D' * D) = F(D') + F(D) \qquad (D, D' \in \Phi(A))$$

が成り立つ。

(証明) $D'' = \mathcal{S}_D^{-1}(D')$ とおくと、$D' * D = D''D$ だから、

$$F(D''D) = F(D') + F(D)$$

を示せばよい。そこで、

$$D = \frac{(a_1)\cdots\cdots(a_m)}{(b_1)\cdots\cdots(b_n)}, \quad D'' = \frac{(c_1)\cdots\cdots(c_k)}{(d_1)\cdots\cdots(d_l)}$$

とすると、

$$\begin{aligned} &F(D') + F(D) \\ &\quad = a_1 + \cdots + a_m - b_1 - \cdots - b_n + \sum_{i<j} M(a_i, a_j) \\ &\quad + \sum_{i<j} M(b_i, b_j) - \sum_{i,j} M(a_i, b_j) + n N(0) \\ &\quad + \mathcal{S}_D(c_1) + \cdots + \mathcal{S}_D(c_k) - \mathcal{S}_D(d_1) - \cdots - \mathcal{S}_D(d_l) \\ &\quad + \sum_{i<j} M(\mathcal{S}_D(c_i), \mathcal{S}_D(c_j)) + \sum_{i<j} M(\mathcal{S}_D(d_i), \mathcal{S}_D(d_j)) \\ &\quad - \sum_{i,j} M(\mathcal{S}_D(c_i), \mathcal{S}_D(d_j)) + l N(0) \\ &\quad = \sum_i a_i - \sum_j b_j + \sum_{i<j} M(a_i, a_j) + \sum_{i<j} M(b_i, b_j) \\ &\quad - \sum_{i,j} M(a_i, b_j) + n N(0) + \sum_j \Big(c_j + \sum_i M(a_i, c_j) \end{aligned}$$

$$-\sum_i M(b_i, c_j)\Big) - \sum_j \Big(d_j + \sum_i M(a_i, d_j) - \sum_i M(b_i, d_j)\Big)$$
$$+ \sum_{i<j} M(c_i, c_j) + \sum_{i<j} M(d_i, d_j) - \sum_{i,j} M(c_i, d_j) + l\,N(0)$$
$$= F(D'' D)$$

(2.14) $\varphi_D(x) = F(D\cdot(x)) - F(D) \qquad (D \in \Phi(A),\ x \in A)$

（証明） $D = \dfrac{(a_1)\cdots\cdots(a_m)}{(b_1)\cdots\cdots(b_n)}$ とすると、

$$F(D\cdot(x)) - F(D)$$
$$= \sum_i a_i - \sum_j b_j + \sum_{i<j} M(a_i, a_j) + \sum_i M(x, a_i)$$
$$+ \sum_{i<j} M(b_i, b_j) - \sum_{i,j} M(a_i, b_j) - \sum_j M(x, b_j)$$
$$+ n\,N(0) - \Big\{ \sum_i a_i - \sum_j b_j + \sum_{i<j} M(a_i, a_j)$$
$$+ \sum_{i<j} M(b_i, b_j) - \sum_{i,j} M(a_i, b_j) + n\,N(0) \Big\}$$
$$= x + \sum_i M(x, a_i) - \sum_j M(x, b_j)$$
$$= \varphi_D(x)$$

(2.15) $\varphi_{D\cdot(x)}(x) = \varphi_D(x) + N(0)$

i.e. $\varphi_D(x) = -\mu\big(\varphi_{D\cdot(x)}(x)\big) \qquad (D \in \Phi(A),\ x \in A)$

（証明） $\varphi_{D\cdot(x)}(x) = x + M(x, x) + M(x, D)$
$$= \varphi_D(x) + N(0)$$

(2.16) $D \in \Phi(A)$, $t \in A$ に対し、
$$\psi_{D,t}(x) = \varphi_D^{-1}\big(\varphi_D(x) + t\big) \qquad (x \in A)$$

と定義する。

i.e. $\varphi_D\big(\psi_{D,t}(x)\big) = \varphi_D(x) + t$

このとき、

$$F(D\cdot(\psi_{D,t}(x))) = F(D\cdot(x)) + t$$

が成り立つ。

(証明) (2.14) より

$$\begin{aligned} F(D\cdot(\psi_{D,t}(x))) &= F(D) + \varphi_D(\psi_{D,t}(x)) \\ &= F(D) + \varphi_D(x) + t \\ &= F(D\cdot(x)) + t \end{aligned}$$

(2.17) $D \in \Phi(A)$ に対して

$$\begin{aligned} f_D(x) &= F(D\cdot(x)^{-1}) - F(D) \\ &= -\varphi_{D\cdot(x)^{-1}}(x) \\ &= -\varphi_D(x) + N(0) \\ &= \mu(\varphi_D(x)) \qquad (x \in A) \end{aligned}$$

と定義すると、f_D は isometry であって、

$$F(D\cdot D'^{-1}) - F(f_D(D')) = F(D) \qquad (D, D' \in \Phi(A))$$

が成り立つ。

(証明) $F(D\cdot D'^{-1}) = F(D) + F(\varphi_D(D')^{-1})$ であるから、

$$F(\varphi_D(D')^{-1}) = F(f_D(D'))$$

を示せばよい。 $D' = \dfrac{(a_1)\cdots(a_m)}{(b_1)\cdots(b_m)}$ とすると、

$$\begin{aligned} F(\varphi_D(D')^{-1}) = &-\sum_{i=1}^{m}\varphi_D(a_i) + \sum_{j=1}^{n}\varphi_D(b_j) \\ &+ \sum_{i<j}{}' M(\varphi_D(a_i), \varphi_D(a_j)) + \sum_{i<j}{}' M(\varphi_D(b_i), \varphi_D(b_j)) \\ &- \sum_{i,j} M(\varphi_D(a_i), \varphi_D(b_j)) + m\,N(0) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(-\varphi_D(a_i)+N(0)\right)-\sum_{j=1}^{m}\left(-\varphi_D(b_j)+N(0)\right)$$
$$+nN(0)+\sum_{i<j}M(a_i,a_j)+\sum_{i<j}M(b_i,b_j)$$
$$-\sum_{i,j}M(a_i,b_j)$$
$$=\sum_i f_D(a_i)-\sum_j f_D(b_j)+\sum_{i<j}M(f_D(a_i),f_D(a_j))$$
$$+\sum_{i<j}M(f_D(b_i),f_D(b_j))-\sum_{i,j}M(f_D(a_i),f_D(b_j))+nN(0)$$
$$=F(f_D(D'))$$

§3. *Maya game* の良形判定条件

以下、$A=(\mathbb{Z},\oplus,\lambda)$ で考えることにする。divisor は分母のないものだけ考えればよいから、$D=(a_1)\cdots(a_m)$ のことを、$D=(a_1,\cdots,a_m)$ とも書き、

$$\varphi_D(x)=\varphi(x\,|\,a_1,\cdots,a_m),$$
$$F(D)=F(a_1,\cdots,a_m)$$

とも書くことにする。また、この場合、

$$\mu(x)=x\oplus(-1)=-x-1$$

となっていることに注意する。

(3.1) 定義: $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への写像 $g_t\ (t\in\mathbb{Z})$ を

$$g_t(x)=(x\oplus t-x)\oplus(x\oplus t)$$

により定義する。

(注) $(x\oplus t-x)\oplus t$ は常に偶数である。そこで、

$$f_t(x)=\frac{1}{2}\left\{(x\oplus t-x)\oplus t\right\}$$

とおくと、

$$g_t(x) = x \oplus 2 f_t(x)$$

と書けるが、この f_t は projection の性質を持っている。すなわち、

$$f_t \circ f_t = f_t$$

が成り立つ。

(3.2) g_t は $(\mathbb{Z}, \oplus)$ の linear map である。

i.e. $g_t(x \oplus y) = g_t(x) \oplus g_t(y)$

(証明) [2] p.33 系2

($t, x, y \in \mathbb{Z}$ として成り立つ)

以下、$t \in \mathbb{Z}$, および $D = (l_0, l_1, \cdots, l_{n-1}) \in \Phi(A)$ を1つ固定して考える。まず、

$$h = F(D), \quad h' = h \oplus t$$

とおき、

$$D_i = D \cdot (l_i)^{-1} \qquad (0 \leq i \leq n-1)$$

$$D_{ij} = D \cdot (l_i)^{-1} \cdot (l_j)^{-1} \quad (0 \leq i < j \leq n-1)$$

$$l_i' = \psi_{D_i, t}(l_i) = \varphi_{D_i}^{-1}(\varphi_{D_i}(l_i) \oplus t)$$

$$b_i = f_D(l_i) = \varphi_{D_i}(l_i)$$

と定義する。§2. の結果を言い直すと、(2.16) より、

(3.3) $F(l_0, \cdots, l_i', \cdots, l_{n-1}) = h'$

(2.17) より、

(3.4) $M(b_i, b_j) = M(l_i, l_j)$

(3.5) $F(b_0, \cdots, b_{i-1}) \oplus F(l_i, \cdots, l_{n-1}) = h$

特に、$F(D_{ij}) \oplus h = F(b_i, b_j)$

(3.6) 定義： $\Phi_t(D) = \sum_{i=0}^{n-1}{}^{\oplus}((l_i' - l_i) \oplus l_i')$

$$\oplus \sum_{i<j}{}^{\oplus} M(h' \oplus (-1), F(D_{ij}))$$

(注) Φ_t を hook の言葉を使って表わすと、

$$\Phi_t(D) = \sum_{\Gamma : D\text{の}hook}{}^{\oplus} M(t, F(D) \oplus F(D-\Gamma))$$

と書ける[7]。ただし、$D-\Gamma$ というのは、D から hook Γ を取り去ったときできる Young diagram のことである。$F(D) \oplus F(D-\Gamma)$ というのは hook Γ を取り去ることによる F-number の変化量を表わしている。

(注) $\Phi_t(D)$ の定義における最後の項は

$$M(h' \oplus (-1), F(D_{ij}))$$

$$= M(t \oplus (-1), F(D) \oplus F(D_i) \oplus F(D_j) \oplus F(D_{ij}))$$

$$= M(t, \mathcal{S}_{D_i}(l_i) \oplus \mathcal{S}_{D_{ij}}(l_j) \oplus (-1))$$

$$= M(t, \mathcal{S}_{D_i}(l_i) \oplus \mathcal{S}_{D_i}(l_j))$$

と変形できる。従って、特に $t=0$ のときは、$h' = h$, $l_i' = l_i$ だから、

$$\Phi_0(D) = \sum{}^{\oplus} l_i \oplus \sum_{i<j}{}^{\oplus} M(\mathcal{S}_{D_i}(l_i), \mathcal{S}_{D_i}(l_j))$$

$$= \sum{}^{\oplus} l_i \oplus \sum_{i<j}{}^{\oplus} M(l_i, l_j)$$

$$= F(D)$$

となる。すなわち、$\Phi_0 = F$ である。従って、Φ_t というのは F-number の拡張と考えられるが、$\Phi_t(D)$ の値は、実は、$F(D)$ と t だけで決ってしまうというのが次の定理である。

(3.7) $\qquad \Phi_t(D) = g_t(F(D))$.

(証明) $D=(l_0, l_1, \cdots, l_{n-1})$ とし、n に関する帰納法で証明するのであるが、ここでは方針を示すだけにする。詳細は [3] を見られたい。

step 1. $D=(l_0)$ (i.e. $n=1$) の時、(3.7) は成り立つ。($l_0 = k$, $l_0' = k' = l_0 \oplus t$ に注意)

step 2. $D=(l_0, l_1, \cdots, l_{n-1})$ の時、(3.7) が成り立てば、$\bar{D} = (l_0 \oplus k, l_1 \oplus k, \cdots, l_{n-1} \oplus k)$ に対しても成り立つ。

何故なら、

$$F(\bar{D}) = k \oplus \overbrace{k \oplus \cdots \oplus k}^{n},$$

$$\Phi_t(\bar{D}) = \sum_i{}^{\oplus} \left((l_i' \oplus k - l_i \oplus k) \oplus (l_i' \oplus k) \right) \oplus \sum_{i<j}{}^{\oplus} M(k' \oplus (-1), F(D_{ij}))$$

となるが、

$$(l_i' - l_i) \oplus l_i' = g_{l_i' \ominus l_i}(l_i),$$

$$(l_i' \oplus k - l_i \oplus k) \oplus (l_i' \oplus k) = g_{l_i' \ominus l_i}(l_i \oplus k)$$

に注意すると、

$$\Phi_t(\overline{D}) = \Phi_t(D) \oplus \sum_i^{\oplus} g_{t_i}(k)$$
$$= g_t(h) \oplus \sum_i^{\oplus} g_{t_i}(k)$$

と書けることがわかる。ただし、$t_i = l_i' \oplus l_i$ とおく。ところが、$l_i' = \wp_{D_i}^{-1}(\wp_{D_i}(l_i) \oplus t)$ をとくと、

$$l_i' = t \oplus b_i \oplus \sum_{j \neq i} M(-t, b_i \oplus b_j),$$

となり、ここで $t=0$ とすると、

$$l_i = b_i \oplus \sum_{j \neq i} N(b_i \oplus b_j)$$

が得られる。従って

$$t_i = t \oplus \sum_{j \neq i}\left(N((-t) \oplus b_i \oplus b_j) \oplus N(b_i \oplus b_j)\right)$$

と書けるが、一般に、次の補題が成り立つ。([3] 補題12)

(3.8)　整数 $b_1, b_2, \cdots, b_n, m$ が与えられたとき、

$$e_{ij} = N(m \oplus b_i \oplus b_j) \oplus N(b_i \oplus b_j)$$

とおく。このとき、適当に番号をつけ変えれば、

$$\sum_{k \neq 1}^{\oplus} e_{1k} = \sum_{k \neq 2}^{\oplus} e_{2k}$$
$$\sum_{k \neq 3}^{\oplus} e_{3k} = \sum_{k \neq 4}^{\oplus} e_{4k}$$
$$\cdots\cdots$$

が成り立つようにできる。ただし、n が奇数のとき、最後の式は

$$\sum_{k \neq n}^{\oplus} e_{nk} = 0$$

となる。

この補題を使うと、

$$\sum_{i=0}^{n-1}{}^{\oplus}\, g_{t_i}(k) = \begin{cases} 0 & n : \text{even} \\ g_t(k) & n : \text{odd} \end{cases}$$

となることがわかる。故に、

$$\Phi_t(\overline{D}) = g_t(\overbrace{k \oplus k \oplus \cdots \oplus k}^{n}) = g_t(F(\overline{D}))$$

となる。

step 3. $D = (\lambda(l_0), \cdots, \lambda(l_{n-1}))$ に対し、(3.7)が成り立てば、$\overline{D} = (l_0, \cdots, l_{n-1}, 0)$ に対しても成り立つ。

何故なら、

$$F(\overline{D}) = F(D)$$

$$\Phi_t(\overline{D}) = \Phi_t(D)$$

となることが、容易に確かめられる。

(3.7)を使うことにより、次の定理が証明できる。

(3.9) *Maya game* の局面 $D = (l_0, l_1, \cdots, l_{n-1})$, および自然数 k' が与えられた時、D を $F(D') = k'$ を満たす局面 D' に変えるような手の数は、$F(D) = k$ とおくとき、$k' \geqq k$ ならば偶数個（特に $k' = k$ ならば1つもない）、$k' < k$ ならば奇数個（従って少なくとも1つ）ある。

（証明）D_i, D_{ij}, l_i' はこの節の初めに定義したものとする。そして $D_i' = D_i \cdot (l_i')$ とおくと、(3.3)により、$F(D_i') = h'$ となる。まず、$l_i' \neq l_j \ (i \neq j)$ に注意する。何故なら、$l_i' = l_j$ とすると、

$$\mathcal{S}_{D_i}(l_i') = \mathcal{S}_{D_i}(l_j)$$
$$= l_j \oplus \sum_{k \neq i,j}^{\oplus} M(l_j, l_k) \oplus M(l_j, l_j)$$

は負になるはずだが、

$$\mathcal{S}_{D_i}(l_i') = \mathcal{S}_{D_i}(l_i) \oplus t$$

が負になることはないから、矛盾である。

従って $l_i' < l_i$ ならば、D を D_i' に変えるのは許された手であり、逆に許された手はすべてこのようにして得られる。

(3.7) より

$$\sum_i^{\oplus} ((l_i' - l_i) \oplus l_i') \oplus \sum_{i<j}^{\oplus} M(h' \oplus (-1), F(D_{ij}))$$
$$= (h' - h) \oplus h'$$

となるが、$h' \geq h$ ならば右辺は正（または0）、従って左辺の中に負の項が偶数個あるはずである。ところが $M(h' \oplus (-1), F(D_{ij})) \geq 0$ であるから、$l_i' - l_i$ の中に負のものが偶数個ある。すなわち、$l_i' < l_i$ となる l_i' が偶数個あるわけである。$h' < h$ の時も、同様にして、$l_i' < l_i$ となる l_i' が奇数個あることがわかる。

特に $k'=k$ とすると $l_i'=l_i$ だから、許された手を実行すると、必らず F-number が変化することがわかる。

(3.9) より次の判定条件が得られることは明らかである。

(3.10) $F(D)=0$ となる局面 D が Maya game の良形(後手必勝形)である。

(補　注)

1) 佐藤の game とも呼ばれている。

2) 対称群の表現論などにおいて、Young diagram を扱う時には、通常、第 i 行目のマス目の数を f_i とするが、ここでは game との関係で、順番を逆にしてある。

3) (1.3), (1.4) を満たす f は bijection であって、f^{-1} もこれらを満たすことが容易にわかる。f, g が (1.3), (1.4) を満たす時、$f\circ g$ も満たすことは明らか。

4) [1] (p.128) において、Criterion II として、f が良形に対応するための条件は

$$f(x+2^{\mu}) \equiv f(x)+2^{\mu} \pmod{2^{\mu+3}}$$

が成り立つことである、と書いてあるが、これは f が良形に対応するための十分条件ではあるが、必要条件ではなかった。

5) $F(D)$ がこのような式で表わされることの証明。

第1行目のマス目からつくった hook の size は

$1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ f_{n-1}-f_{n-2}=\ell_{n-1}-\ell_{n-2}-1,$

$\ell_{n-1}-\ell_{n-2}+1,\ \cdots\cdots,\ \ell_{n-1}-\ell_{n-3}-1,$

$\ell_{n-1}-\ell_{n-3}+1,\ \cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots,\ \ell_{n-1}$

となる。すなわち、$1,2,\cdots\cdots,\ell_{n-1}$ のうち、$\ell_{n-1}-\ell_{n-2}$, $\ell_{n-1}-\ell_{n-3},\ \cdots\cdots,\ \ell_{n-1}-\ell_0$ が現われない。もっと一般に、第 i 行目では、$1,2,\cdots\cdots,\ell_{n-i}$ のうち、$\ell_{n-i}-\ell_j$ $(0\leqq j\leqq n-i-1)$ を除いたものが出てくる。

ℓ_{n-1}	$\cdots\cdots$	$\ell_{n-1}-\ell_{n-3}+1$	$\ell_{n-1}-\ell_{n-3}-1$	$\cdots$	$\ell_{n-1}-\ell_{n-2}+1$	$\ell_{n-1}-\ell_{n-2}-1$	$\cdots$	2	1
ℓ_{n-2}	$\cdots\cdots$	$\ell_{n-2}-\ell_{n-3}+1$	$\ell_{n-2}-\ell_{n-3}-1$	$\cdots$	1				
ℓ_{n-3}	$\cdots\cdots$	1							

$\cdots\cdots$

故に、

$$F(D)=\sum_{\Gamma:\text{hook}}{}^{\oplus} N(\Gamma \text{ の size})$$
$$=N(1)\oplus\cdots\cdots\oplus N(\ell_{n-1})\oplus\sum_{i=0}^{n-2}N(\ell_{n-1}-\ell_i)$$
$$\oplus N(1)\oplus\cdots\cdots\oplus N(\ell_{n-2})\oplus\sum_{i=0}^{n-3}N(\ell_{n-2}-\ell_i)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

となるが、(2.11) の (注) より

$$N(1)\oplus\cdots\cdots\oplus N(x)=x$$

が成り立つから、

$$F(D) = l_{n-1} \oplus l_{n-2} \oplus \cdots \oplus l_0 \oplus \sum_{i>j}^{\oplus} N(l_i - l_j)$$

と書ける。そして、

$$\begin{aligned} N(l_i - l_j) &= M(l_i - l_j, 0) \\ &= M(\lambda^{l_j}(l_i), 0) \\ &= M(l_i, \lambda^{-l_j}(0)) \\ &= M(l_i, l_j) \end{aligned}$$

より、

$$F(D) = \sum_{i=0}^{n-1}{}^{\oplus} l_i \oplus \sum_{i<j}^{\oplus} N(l_i \oplus l_j)$$

となる。

6) symmetric でない Maya algebra の例をあげておく。

A を $(u_\nu)_{\nu\in \mathbf{Z}}$ から生成される自由 abel 群とする。

$$A \ni x = \sum_{\nu\in\mathbf{Z}} n_\nu u_\nu \quad (\text{有限和})$$

に対して、

$$\sigma(x) = \sum_{\nu\in\mathbf{Z}} n_\nu \in \mathbf{Z}$$

と定義すると、σ は A から $\mathbf{Z}$ への homomorphism である。そこで、

$$N(x) = u_{\sigma(x)},$$
$$\lambda(x) = x + N(x)$$

とおくと、$(A, +, \lambda)$ は symmetric でない Maya algebra となる。

7) $\displaystyle\sum_{\Gamma:\text{hook}}^{\oplus} M(t, F(D) \oplus F(D-\Gamma))$ において、第 i 行目の hook だけを考えると、

$$\sum_{\substack{0 \le l < l_i \\ l \ne l_j}}^{\oplus} M(t, F(D) \oplus F(D_i \cdot (l)))$$

$$= \sum_{l=0}^{l_i - 1}{}^{\oplus} M(t, \mathcal{S}_{D_i}(l_i) \oplus \mathcal{S}_{D_i}(l))$$

$$\oplus \sum_{j<i}{}'^{\oplus} M(t, \mathcal{S}_{D_i}(l_i) \oplus \mathcal{S}_{D_i}(l_j))$$

となるが、

$$\sum_{l=0}^{l_i - 1}{}^{\oplus} M(t, \mathcal{S}_{D_i}(l_i) \oplus \mathcal{S}_{D_i}(l))$$

$$= \sum_{l}^{\oplus} M(\mathcal{S}_{D_i}^{-1}(\mathcal{S}_{D_i}(l_i) \oplus t), l)$$

$$= \sum_{l=0}^{l_i - 1}{}^{\oplus} N(l_i' - l)$$

$$= \left(\sum_{x=1}^{l_i'}{}^{\oplus} N(x)\right) \oplus \left(\sum_{x=1}^{l_i' - l_i}{}^{\oplus} N(x)\right)$$

$$= l_i' \oplus (l_i' - l_i)$$

より、

$$\sum_{\Gamma:\text{hook}}^{\oplus} M(t, F(D) \oplus F(D-\Gamma))$$

$$= \sum_{i}^{\oplus} (l_i' - l_i) \oplus l_i' \oplus \sum_{i<j}^{\oplus} M(t, \mathcal{S}_{D_i}(l_i) \oplus \mathcal{S}_{D_i}(l_j))$$

と書けることがわかる。