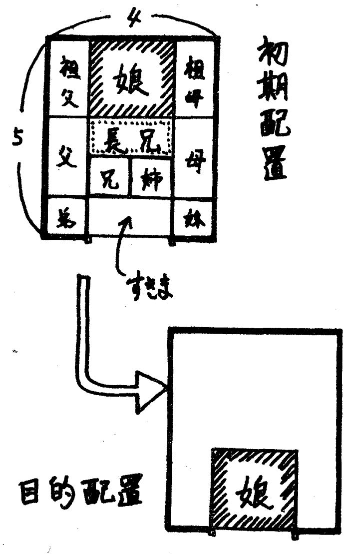
数理解析研究所講究録
第98巻 1970年 144-149

箱入娘 及び L^6
——解法と記述言語——

東大 理　後藤英一　川合 慧
佐藤 充

§1．箱入娘

計算機を用いて種々のパズルを解く際，多くの場合しらみつぶしに（可能な全ての場合を尽して）解を探すか，或はそれに多少の改良を加えた方法を採らねばならない。実際にはこの“多少の”改良が計算時間や記憶容量の節約に“多大の”寄与をすることが多く，ここで取上げる「箱入娘」の場合もその様な工夫なしでは解を得ることは容易ではない。「箱入娘」とは右図の様に4×5＝20個の単位正方形から成る矩形の枠に入った4種類10個の駒を上下又は左右にのみ動かして大きさ4の駒（娘）を最下段中央まで移動させるパズルである。操作の途中においては駒同志の重な



りや駒の除去は許されない。実際に人手でこれをやってみると"娘"と横長の駒(長兄或は番頭と呼ばれる)の存在が全体の動きを制約し，すぐ行詰ってしまうことが多い。このパズルを計算機を用いて解くわけであるが以後，各駒が枠の単位正方形にきっちりはまっている状態を"配置"(Configuration)と呼び，またある配置C_iから何れか一つの駒を上下又は左右に一単位長動かすことによって得られる配置C_jはC_iより一手の配置と定義する。(同じ駒が続けて動く限り一手と定義する方法もあるがここでは上述の様に手の数え方を定める。)

§2. 配置の表現法

局面の進行が一方向的であるパズルやゲーム(ペントミノや連珠など)と異り，このパズルでは以前に一度出現した配置に戻る(ループを作る)ことが可能である。このような道すじは解を得る為には不必要かつ有害であるから既出の配置は総て保存しておき，新しく得られた配置がその中にないことを確かめながら局面を進めてゆかねばならない。この目的の為の配置の表現法に要求される性質として(i)一つの配置当りのビット数が少いこと．(ii)実際に駒を動かす時の配置表現との間の変換が容易であること．があげられる。(i)は記憶容量の節約に，(ii)は演算時間の短縮にそれぞれ関係があるがたぶんに背反的な要求である。

我々は使用機（FACOM 270-20）が16ビットマシンであるということもあって次の様な表現法をとった。

(a) 大きさ２以上の６つの駒は存在し得る場所の数が16以下であるからこれに一連番号を与え各4ビットで表す。

(b) 2つの“空白”が存在し得る状態数は$_{20}C_2 = 190 < 256$であるからこれに一連番号を与え8ビットで表す。

(c) 4つの単位正方形の駒は上記の駒及び空白の場所を除く残りの位置を占るものとする。

これにより一つの配置を32ビット（1ダブルワード）で表すことができる。

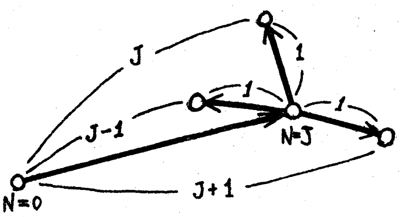
§3．探索の方法

解を求める方法としてまず考えられるのはいわゆるtree-search法であろう。この方法ではある配置から一手で移れる配置を総て記憶しておき，その中の一つを新しい配置としてまた先へ進み行詰ったら順に元へ戻って別の方向へ探してゆくということが行なわれる。もちろん今の場合は新しく得られたものが過去に存在しなかったことを確かめながら進まねばならない。HITAC-5020においてこの方法を用いた結果では一時間の演算で配置の数が数千に及びしかも解に達したかどうか不明であった（印刷枚数の制限による）。（佐藤）

そこで我々は最少手数の解を効率良く求める為に配置全体

を距離の概念を用いて区分し探索を行なうことにした。

今$d(C_i, C_j)$を"配置C_iより配置C_jに至る最少手数"で定義するとこのdは配置全体の作る空間内で距離の公理を満たしていることがわかる。次にU_Nを初期配置からの距離(上述のd)がNである配置の集合とするとU_Nに属する配置から一手で得られる配置は$U_{N-1} \cup U_N \cup U_{N+1}$に属する(三角不等式より明らか，ただし$N \geq 1$)。



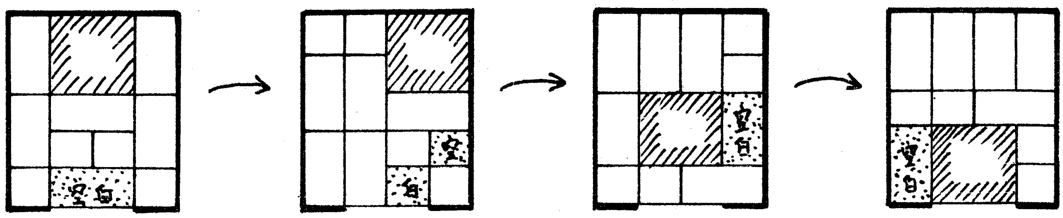
このU_Nによる配置の分類を手掛りにして解を求めることは次の2つの利点をもっている。

(i) 初期配置からU_1, U_2, U_3, $\cdots$と求めてゆき，目的とする配置がU_Mの中に初めて現れたとすれば最少手数はMであり，そこに至る経路がその解法となる。

(ii) U_NよりU_{N+1}を求める際，U_Nに属する一つの配置に一手を施して得られた配置がU_{N-1}, U_Nの中になければU_{N+1}に属するとしてよい。

(ii)は特に重要な点で索表の回数を大巾に減らすことができるばかりでなく，限られた容量のFirst Memoryでもこの演算が実行可能である保障を与えている。実際，コアメモリーには一手前の配置(U_{N-1})と現在の配置(U_N)，及び現在作りつつある一手先の配置(U_{N+1})が収容できればよく，それより前の配置の

表はドラムや磁気テープなどに移してしまってもよいのである。この様にして求めた解の一部を下に示す。



N=0　N=67　N=90　N=116

初期配置　　解　最少手数 116

計算時間は解に達するまでが4時間，解から逆にたどって全経過を印刷するのに6時間であった（言語はFORTRAN，二次記憶はドラム）。また，登録された配置の総数は12,071，$U_{N-1}+U_N+U_{N+1}$の最大数は1,110（N=57），ドラムへのスワップは8回であった。これは配置表をできる限りコアに置くアルゴリズムにした為である。これで見てもし全配置表をコアに置くプログラムを組んだとすれば8倍の作業領域を必要としたであろう事がわかる。「箱入娘」の様に状態の数が多く，かつ状態間の遷移規則のみが与えられているものに対するアルゴリズムとして上述のものは最適に近いものであろうと思われる。また現在までに「箱入娘」の全配置数が65,880であり，その全体が互に移り変れない898個のサブグループに分割され，その最大のものは配置数が25,955，最小のものは2

であることがわかっている(計算時間57分,川合)が,これに関連して"相互間の距離が最大である配置の対を求めよ"というのも面白い問題であろう。しかしこれは箱入娘のオリジナルよりも遙かに難問であると思われる。

§4. L^6(エルシックス)について(*)

L^6とはベル研究所のK.C.Knowltonが開発したリスト処理言語で,節点にデータが付属した多重有向グラフの表現及び処理に適している。我々の研究室ではこのコンパイラを作成し使用しているが,適用する問題の一つとして箱入娘を取り上げている。箱入娘では駒の動きは全て「他の駒や空白部分との隣接関係の変更」として表現できるのでこれを各種ポインタで,駒の種類や位置はデータとしてそれぞれ表わせば人間にも理解し易い記述法で解を求めることができる。

L^6ではこれらのポインタ操作が簡単であるばかりでなく,ポインタで構成された複雑な構造を持つデータ内の任意の部分の指定が容易であり,その内容に関する演算や判断を組合せてプログラムを作成してゆくことができる。この様な特長をもっているのでL^6は各種のゲームやパズルの解を求める為の言語として有力なものであろうと思われる。

(*) Knowlton, K.C. A Programmer's description of L^6 Comm. ACM, Vol 9, No 8, Aug. 1966 616-625