

## Complete Matching のとれる確率 - パズルの複雑さについて -

京大 情報工学 矢島 脩三

§1. はじめに

$n$  件の仕事があつて,  $n$  人が, 1人1件, 1つおれかの仕事を  
受け持たされ,  $n$  件の仕事をすべて処理しようとする。た  
だし, 各人には, 志望する仕事と, 志望しない仕事の区別が  
ある。すべての人々の志望を満たすように各人に仕事を割当て  
る問題は, personal assignment problem, グラフでは  
bipartite graph の complete matching として知られ  
ている。この問題は, また,  $n \times n$  の将棋盤上に,  $n$  個の  
飛車を互いに捕らぬように置く nonattacking rooks の問  
題としても知られている [1]。

ここでは, この問題を別の観点より眺める。各人に対し,  
独立に, 優先順位をつけず, 志望する仕事を  $k$  個, 重複な  
しに, 1かき, 各々等確率にランダムに出させて, 各人に仕  
事を assign するものと1つ, それが可能となる, すなわち,  
complete matching のとれる確率  $P_n^k$  を求める。

つまり、各人とも、志望にどのくらいの幅があれば（心のゆとりがあれば、志望をどのくらい出させれば）troubleなしに assignment が可能になるかを評価しようというのである。

これは、また、飛車の場合、飛車を置く候補地を、各飛車につき、それぞれ独立に  $k$  個ランダムに定め、その候補地の中に、種々、飛車を置いて  $n$  枚の nontaking rook が作れるかどうかを調べ、各  $k$  に対する nontaking rook の作れる確率  $P_n^k$  を求めようということである。

当然、 $P_n^{k=0} = 0 \leq P_n^k \quad (k=0, \dots, n) \leq P_n^{k=n} = 1$  であり、 $k$  はゲームやパズルでいうと、どのくらいの範囲で打っ手を採るかに対応するわけで、 $P_n^k \approx \frac{1}{2}$  となる  $k; n$  をもって、この問題の難易度または“複雑さ”と定義する。他の種々のゲームやパズルにおいても、複雑さにつき類似の定義ができるであろう。

この問題は、学生の研究室志望分属、学生実験テーマの選択に関連して気付いた問題であり、研究室の大学院生にクイズとして出題していた。しかし、まだ、この解は、ほんの一部しか求まっておらず、計算も進行してないわけであるが、本研究会に、この問題が紹介されたとの事であり、とりあえず、現在までに得られた結果を報告する。

志望数  $k = 0, 1, n-1, n$  は trivial であるが、あとは意外に難しく、 $k=2$  は謝によつて [2]、 $k=n-2$  は独立に、謝 および 著者によつて計算された。

著者は、この  $P_m^k$  が、 $n$  が大きくなると、ある  $k/n$  の近傍において、急激に変化するという予測を立てており、その検証が、このタイプの問題の興味の中にある。

## § 2. $P_m^{k=1}$ , $P_m^{k=n-1}$ について

$P_m^{k=1}$  は、各人が、それぞれ 1 志望を出す。そのあらゆる場合の数は  $n^n$ 、complete matching のとれるのは、それが、permutation になつてゐる場合の数  $n!$  である。よつて、

$$P_m^{k=1} = \frac{n!}{n^n} \quad (1)$$

$P_m^{k=n-1}$  は、 $n-1$  個の仕事に志望するといふのを、逆に、1 個の仕事に拒否すると考える。ある 1 つの仕事が、みんなにさつて拒否された場合、その場合のみ complete matching は不能であるから、

$$P_m^{k=n-1} = \frac{n^n - n}{n^n} \quad (2)$$

§3.  $P_m^{k=2}$  について [2]

各人より提出された志望をもつて、はたして complete matching がとれるかどうかの判定に、P. Hall の定理 [3] を用いる。この定理を、本問題の場合に書きなおして示す。

[定理]  $n$  人の各々が志望する  $k$  個の仕事よりなる集合を  $S_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) とし、 $S = \{S_i \mid i=1, \dots, n\}$  とする。各  $S_i$  より、それぞれ異なる一つの仕事 (distinct representative) を取り出せるための (すなわち、complete matching がとれるための)、必要十分条件は、各  $\lambda = k+1, k+2, \dots, n$  につき、任意に  $\lambda$  個の互いに異なるインデックス  $i_1, i_2, \dots, i_\lambda \in \{1, \dots, n\}$  を定め  $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_\lambda} \in S$  を取り出したとき、それらの中に少なくとも  $\lambda$  個の異なる仕事が含まれていることである。

謝 [2] は、これを基本にして  $P_m^{k=2}$  を求めようとしているが、相当複雑な式になっている。ここでは、謝の示した  $P_m^{k=2}$  の比較的よい上限  $\hat{P}_m^{k=2}$  を示す。

$$\hat{P}_m^{k=2} = \frac{n!}{2!} \left(\frac{2}{n}\right)^n \quad (3)$$

#### §4. $P_m^{k=n-2}$ について

$m-2$  個の希望のかわりに, 2 個の拒否を出しつゝ, complete matching のとれな... 確率  $R_n^{l=2} = 1 - P_n^{k=n-2}$  を求める。前節の P. Hall の定理の逆, すなわち, complete matching のとれな... 場合を述べると,

[定理]  $m$  人の各々が拒否する  $l$  個 ( $l = m - k$ ) の仕事よりなる集合を  $V_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) とし,  $V = \{V_i \mid i = 1, \dots, m\}$  とする。complete matching のとれな... ための必要十分条件は, 各  $\lambda = m - l + 1 (= k + 1), \dots, m - 1, m$  につき, 任意に  $\lambda$  個の互いに異なるインデックス  $i_1, i_2, \dots, i_\lambda \in \{1, \dots, m\}$  を定め  $V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_\lambda} \in V$  を取り出したとき, どの  $V_{i_j}$  ( $j = 1, \dots, \lambda$ ) にも共通に, 少なくとも  $m - \lambda + 1$  個, 同じ仕事を含まれている (各人が共に拒否している) ことである。

$l=2$  の場合,  $\lambda = m, m-1$  であり,  $\lambda = m$  のとき, すなわち  $m$  の人に 1 つの 2 個共通に拒否される場合,  $\lambda = m-1$  のとき, 2 個共通に拒否される場合を計算する。結果を示す。

$$1 - P_m^{k=n-2} = R_m^{l=2} = \frac{2^m}{m^{m-1}} + \frac{1}{2 \cdot \binom{m}{2}^{m-1}} (m^3 - 5m^2 + 6m - 2) \quad m \geq 3 \quad (4)$$

§5.  $(k/n, P_m^k)$  のグラフ

$m = 2, 3, \dots, 6$  までにつき, 横軸を  $k/n$  ( $\stackrel{\text{def.}}{=} \alpha$ ), 縦軸を  $P_m^k$  にとり,  $m$  をパラメータにして, 各点を適当になめらかに接続すると下図のようなグラフとなる。  $m$  が増加するに従って,  $P_m^k = \frac{1}{2}$  となる  $k$  自身は増加するが,  $k/n$  は減少している。

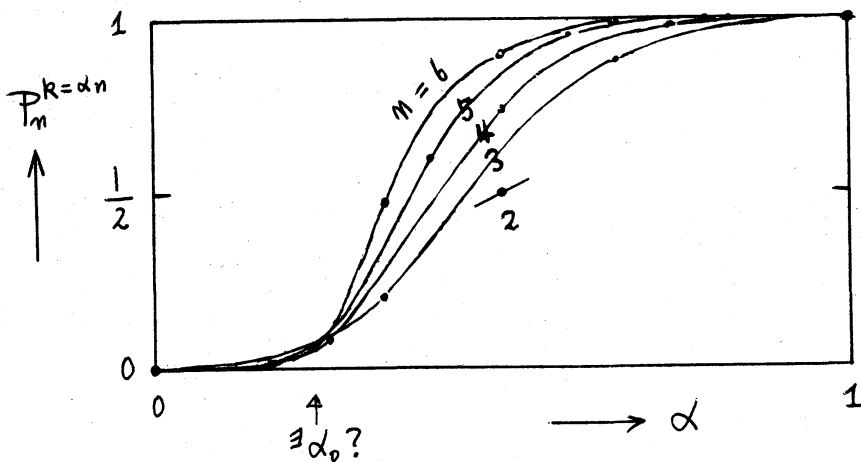
[Conjecture] つぎの  $\alpha_0$  (臨界値) が存在する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_m^{k=\alpha n} = \begin{cases} 0 & \alpha < \alpha_0 \\ 1 & \alpha > \alpha_0 \end{cases}$$

$P_m^k = \frac{1}{2}$  を与える  $\alpha \in \alpha_{\frac{1}{2}}(m)$  とすると,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_{\frac{1}{2}}(m) = \alpha_0$$

このような臨界値  $\alpha_0$  の存在するパズルのクラスは,  $\alpha_0 \in$  によって, このクラスのパズルの複雑さと定義する。



§ 6. おわりに

$P_m^{k=n-3}$  は, 著者と謝の結果が一致しておらず報告できなかった。その他の  $P_m^k$  は, まだ求まっていない。式の形ではなく, Algorithm の形で求め, あと, 計算機にたよることになるかもしれない。

ここで紹介した単純な問題でも, その複雑さを求める計算は極めて困難なようであり, simulation で, その概略値を求めるのも, この問題を調べる一手段であろう。

### 参考文献

- [1] C. L. Liu : Introduction to Combinatorial Mathematics, McGraw-Hill Book Co., 1968
- [2] 謝章文 : ある Simple Graph の Matching のとれる確率, 電子通信学会回路とシステム理論研究会資料 1970年1月24日
- [3] Philip Hall : On Representatives of subsets, J. London Math. Soc., 10(1935), 26-30  
または, Marshall Hall, Jr. : Combinatorial Theory, Blaisdell Pub. Co., 1967 p. 44